УДК 517.988.52

ИККИ ЖИНСЛИ ПОПУЛЯЦИЯНИНГ ДИНАМИКАСИ ҲАҚИДА

Расулов Хайдар Раупович
Бухоро давлат университети
e-mail: xrasulov71@mail.ru

Яшиева Феруза Юсуф қизи
Бухоро давлат университети

Аннотация. Мақолада популяция жараёнларини ўрганилиш тарихи, уларнинг амалий ва назарий аҳамияти ҳақида маълумотлар берилган. Ўзбекистонлик ва чет эллик олимларнинг ушбу соҳадаги фундаментал тадқиқотлари таҳлил қилиниб, икки жинсли популяцияни ифодаловчи вольтерра квадратик стохастик операторининг узлуксиз вақтли аналоги (умумлашган ҳоли киритилган) сонли усуллар орқали ўрганилиб, олинган назарий маълумотлар билан қиёсий таққосланган.

Калит сўзлар: Икки жинсли популяция, квадратик стохастик оператор, оддий дифференциал тенгламалар, динамик системалар, сонли ечимлар.

ABOUT THE DYNAMICS OF A TWO-SEX POPULATION

Rasulov Xaydar Raupovich
Bukhara State University

Yashiyeva Feruza Yusuf qizi
Bukhara State University

Annotation. The article provides information about the history of the study of population processes, their practical and theoretical significance. Fundamental research of uzbek and foreign scientists in this field is analyzed, the continuous time analogue of the volterra quadratic stochastic operator representing a two-sex population (generalized case) is studied by numerical methods and compared with the obtained theoretical data.

Keywords: a two-sex population, quadratic stochastic operator, simple differential equations, dynamic systems, numerical solutions.

Тирик мавжудотларнинг ривожланиши ҳар хил жараёнларда турли йўллар билан намоён бўлади. Бунда туғилиш, ўсиш, индивидуаллик, индивидларнинг ўлими, ташқи муҳит ва шу кабилар таъсир қилади. Шу ҳолатлар инобат олиниб популяциянинг математик модели қурилади.

Популяция сонининг ўзгариши унинг динамикасини ташкил қилади. Популяцивий динамика математик биологиянинг қисми бўлиб, ўз вақтида популяциянинг ҳолатини аниқлашга қаратилган «математик полигон» ҳисобланади. Чунки, математик моделлаштириш ўрганилаётган жараён ҳақида тўлиқ маълумот олишга, унинг ўсиш ёки камайиши тўғрисида хулоса чиқаришга имконият беради.

Популяцияни ўрганиш бўйича математик масалаларни қўйилиши қадимги вақтларга бориб тақалади. Ҳақиқатан ҳам бу каби масалаларни ўрганиш ва хулосалар чиқариш муҳим аҳамиятга эга.

Популяциянинг математик модели бўйича биринчи изланишлар 1170-1240 йилларда яшаб ўтган Леонардо Фибоначчининг «Ҳисоблаш ҳақида рисола» («Трактат о счете» («Liber abaci»)) асарида келтирилган.

Арифметик ва алгебраик маълумотлар тўплами бўлган ушбу китобда ўша вақт ва кейинчалик Европа бўйлаб тарқалган қуйидаги муаммо кўриб чиқилган: «бир жуфт қуёндан бир йил давомида нечта қуён туғилади, агарда бир жуфт қуён туғилганидан кейин икки ойдан сўнг улардан битта қуён туғилади». Бу масаланинг ечими қуйидаги сонлардан иборат:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Бу сонлар тарихда Фибоначчи сонлари сифатида киритилган.

Хақиқий популяцияларда кўпайиш ва ўлим даражаси турли гуруҳларда турлича бўлади. Масалан, ҳашаротлар тухум қўяди ва душманлари личинкаларни ўлдириб юборади, бундан ташқари, уларга атроф-муҳитдаги метаболик маҳсулотлар, каннибализм ва заҳарланишлар, ёш босқичлари ва уларнинг интенсивлиги таъсир кўрсатади.

Ўз навбатида икки жинсли популяциянинг динамикаси таҳлили ҳам назарий, ҳам амалий жиҳатдан муҳим аҳамиятга эга. Зараркунанда ҳашараротларнинг кўпайишини бошқариш усуллари (бепушт эркак ҳашаротларни чиқартириш, феромон тузоқлар ва шу кабилар) популяция структурасида маълум бир дисбалансни пайдо қилишга қаратилган бўлиб, уларнинг кўпайишини секинлаши ҳамда бузилишига олиб келади. Ушбу масалалар эпидемиологиянинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади.

Икки жинсли популяциянинг динамикаси моделнинг асосан узлуксиз вақтли ҳолида ўрганилган [1]. Оддий дифференциал тенгламалар системаси асосида қурилган бу моделлар бошқа жуда кўплаб турларнинг мавсумий кўпайиши динамикасини ифодалашда ижобий (кўпайиш жараёни дискрет бўлганлиги учун) натижалар бермайди.

Ушбу турдаги жараёнларни импульсли оддий дифференциал тенгламалар системаси орқали ифодаланган математик моделлари [2] энг маъқул моделлар ҳисобланади ва ўрганилаётган жараённи ҳақиқий жараёнга яқин ифодалайди. Хусусан, биологияда популяция эволюциясининг математик модели квадратик стохастик операторлар орқали ифодаланади [3].

Биологик система эволюцияси жараёнида ҳар хил типдаги индивидларнинг чегараланган тақсимотини топиш муаммоси квадратик стохастик операторнинг асимптотик хусусиятларини ўрганилишига тенгдир. Бундан ташқари, квадратик стохастик операторлар назариясида оддий ва ностандарт масалалар ҳамда ечилмаган масалаларнинг кўплиги математик нуқтаи-назардан катта қизиқиш уйғотади.

Квадратик стохастик оператор тушунчаси биринчи марта С.Н.Бернштейннинг «Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности» [4] асарида қўлланилган. Бу ерда квадратик стохастик операторлар траекторияларининг ҳатти-харакатларини ўрганиш вазифаси қўйилган. Шундан кейин квадратик стохастик операторлар назарияси ривожланиб, кўплаб мақолалар нашр этилган.

Операторларнинг ночизиқлиги, траекторияларни ўрганишда мураккаб ва қийин ҳисоблашлар мавжудлиги, аналитик ечимларни топиш усуллари кенг ривожланмаганлиги ва квадратик операторларни ўрганишда кўп сонли ҳисоблашларни ўтказиш зарурати борлиги бу турдаги масалаларни ечишда қизиқиш уйғотмади. Лекин, компьютерларнинг пайдо бўлиши натижасида квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг ҳолатини ўрганиш муаммосига қизиқишни қайта тикланди. Улам ва ҳамкасблари компьютерлар орқали квадратик операторларни ўрганиш борасида етарлича кўп ҳисоблашларни амалга оширдилар.

Икки жинсли популяциянинг динамикасини ўрганишга бағишланган [5] мақолада икки жинсли популяциянинг (математик модели) таърифи берилган ва ушбу мақолада ўрганилаётган ҳол учун шу турдаги популяцияни ифодаловчи квадратик стохастик операторларнинг кўринишлари келтирилган.

Эркин квадратик стохастик операторлар қўйидаги маънога эга. Фараз қиламиз, эркин популяция m та элементдан иборат бўлсин. У ҳолда

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

тўплам $(m-1)$ – ўлчамли симплекс дейилади.

S^{m-1} симплексни ўз-ўзига акслантирувчи квадратик стохастик оператор $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$,

$$V: x_k{}' = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i \, x_j, k = 1, \dots, m$$

кўринишга эга бўлади, бунда, $p_{ij,k}$ – ирсийлик коэффициенти ва

$$p_{ij,k} \geq 0, \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \qquad i, j, k = 1, \dots, m.$$

Маълумки, математик биологиянинг асосий вазифаси ўрганилаётган квадратик стохастик операторларнинг траекторияларини асимптотик қандай тутишини аниқлашдан иборат.

Бу масалалар вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар учун тўлиқ ўрганилган. Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар бўйича олиб борилган изланишлар масаладан келиб чиқиб, $p_{ij,k} = 0$, агар $k \Subset \{i,j\}$ шарти остида ўрганилган.

Ушбу мақолада [5] даги илмий ишда киритилган икки жинсли популяцияни ифодаловчи дискрет вақтли квадратик стохастик операторларнинг узлуксиз вақтли аналогини ўрганамиз.

Фараз қиламиз, G авлодни ҳолати $(x,y) -$ бўлсин. Унинг кейинги ҳолати қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$W := \begin{cases} x_j{}' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}{}^{(f)} x_i y_k \; 1 \le j \le n, \\ y_l{}' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}{}^{(m)} x_i y_k, 1 \le l \le v. \end{cases} \quad (1)$$

Таъриф: (1) эволюцион оператор икки жинсли вольтерра типидаги квадратик стохастик оператор дейилади, агарда

$$p_{ik,j}{}^{(f)} = 0,$$
$$j \Subset \{i,k\} \; 1 \le i,j \le n, 1 \le k \le v$$

ва

$$p_{ik,l}{}^{(m)} = 0, l \Subset \; \{i,k\}, 1 \le i \le n, 1 \le k, l \le v.$$

[5] да 16 та четки икки жинсли вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар мавжудлиги кўрсатилган.

Фараз қиламиз, $n = v = 2$ бўлсин. У ҳолда (1) нинг биринчи четки узлуксиз вақтли аналогининг умумлашган ҳоли қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a+c)x_2 y_1, \\ \dot{x}_2 = (b+d)x_2 y_2 - x_2, \\ \dot{y}_1 = x_1 + x_2 y_1 - y_1, \\ \dot{y}_2 = x_2 y_2 - y_2, \end{cases} \quad (2)$$

бунда $a, b \ge 0$ ва $a + b = 1$, $c, d \ge 0$ ва $c + d = 1$, $a + c \ne 0$, $b + d \ne 0$.

(2) оддий дифференциал тенгламалар системаси [6] да ўрганилган узлуксиз вақтли операторнинг умумлашмасидан иборат.

Динамик системалар ўрганилаётган жараёндан келиб чиқиб, дискрет вақтли ва узлуксиз вақтли системалар орқали ўрганилади. Каскадлар деб аталадиган дискрет вақтли системаларда системанинг ҳатти-ҳаракатлари (ёки бир хил бўлса, фазали фазосидаги системанинг траекторияси) ҳолатлар кетма-кетлиги билан тавсифланади. Оқим деб аталадиган узлуксиз вақтли динамик системаларда системанинг ҳолати вақтнинг ҳар бир лаҳзаси учун аниқланади.

Жараённи ҳар бир лаҳзадаги ҳолатини ўрганиш учун узлуксиз вақтли оператор ўрганилмоқда. (2) автоном оддий дифференциал тенгламалар системаси a, c, b, d ларнинг маълум бир қийматларида ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартларини қаноатлантиради. Шу сабабли бу системанинг ечимларини излаш ва таҳлил қилиш мумкин.

Маълумки, динамик системанинг мувозанат ҳолати дифференциал тенгламанинг критик (сингуляр, қўзғалмас) нуқталарига, ёпиқ фазали эгри чизиқлари эса унинг даврий ечимларига тўғри келади.

Мақолада (2) нинг қўзғалмас нуқталари топилган ва уларнинг тури аниқланган. a, b, c, d ларнинг турли қийматлари (2) системанинг сонли ечимлари топилган. Олинган натижалар таҳлил қилиниб, [4] да олинган назарий натижалар билан бир-бирини такрорланиши аниқланган.

Юқорида келтирилганлардан кўриниб турибдики, икки жинсли вольтерра типидаги квадратик стохастик операторларни ўрганиш катта амалий аҳамиятга эга. Шуни таъкидлаш кераккi, циклик ва хаотик динамик режимлар фақат ўз-ўзини бошқариш механизмларининг турли жинсдаги индивидлар таъсиридаги фарқлар маълум бир критик қийматга етганда пайдо бўлиши мумкин. Агар бундай фарқлар бўлмаса, унда тизимда ягона глобал барқарор мувозанат кузатилади.

Дискрет вақтли квадратик стохастик операторларнинг узлуксиз вақтли аналоги ўрганилганда, бу каби операторлар - чизиқли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар системалар ҳамда чизиқли бўлмаган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар [7-20] учун турли чегаравий масалаларни ўрганишга келтирилади. [7-20] мақолаларда динамик системаларнинг қўзғалмас нуқталари топилиб, таснифланган, айримларининг аналитик ва сонли ечимлари топилиб, қиёсий таққосланган ҳамда ечимининг мавжуд ва ягоналиги исботланган. Ўрганилаётган квадратик стохастик операторлар биологик жараёнларни ифодаловчи математик модель бўлиб ҳисобланади ва [21] мақолада биологик жараёнларни ифодаловчи турли математик моделлар таҳлил қилинган ва биология билан боғлиқлиги кўрсатиб ўтилган.

[22-30] мақолаларда олиб борилган илмий изланишларда юқорида ўрганилаётган масалаларни таҳлил қилишни осонлаштириш бўйича педагогик тавсиялар берилган. Чунки, ушбу турдаги муаммоларни ўрганиш ўқувчилардан (талабалардан) математик масалаларни мустақил равишда муҳокама қилиш имкониятини берадиган билим, кўникма ва малакаларга эга бўлишни талаб қилади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. А.С.Исаев, Р.Г.Хлебопрос, Л.В.Недорезев и др. Популяционная динамика лесных насекомых. М.: Наука, 2001 г., с. 374.

2. Недорезов Л.В. Моделирование массовых размножений лесных насекомых. Новосибирск, Наука, 1986 г., с.125.

3. Розиков У.А., Жамилов У.У. F-квадратичные стохастические операторы // Математические заметки, 83:4 (2008), с. 606-612.
4. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности, Ученые записки научно-исследовательской кафедры Украины, 1924 г., №1, с. 85-115.
5. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские КСО двуполой популяции // Украинский математический журнал, 63:17 (2011), с.985-998.
6. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
7. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
8. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
9. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
10. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.
11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
12. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
13. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66
14. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
15. Rasulov Kh.R. On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal, 4 (2018), p.126-131.

16. Джуракулова Ф.М. О численных решениях непрерывного аналога строго невольтерровского квадратичного стохастического оператора // Вестник науки и образования, 102:24-3 (2020), С. 6-9.
17. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
18. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
19. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.448-454.
20. Расулов Х.Р., Джўрақулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.455-462.
21. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
22. Boboeva M.N., Rasulov T.H. The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. Academy, 55:4 (2020), pp. 68-71.
23. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. Academy, 55:4 (2020), pp. 65-68.
24. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений. Молодой учёный, 90:10 (2015), с.16-20.
25. Марданова Ф.Я. Использование научного наследия великих предков на уроках математики. Проблемы педагогики. 51:6 (2020), с.40-43.
26. Rasulov T.H., Rashidov A.Sh. The usage of foreign experience in effective organization of teaching activities in Mathematics. International Journal of Scientific & Technology Research. 9:4 (2020), p.3068-3071.
27. Расулов Т.Х. Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения. Наука, техника и образование. 73:9 (2020), с.74-76.
28. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject. Journal of Global Research in Mathematical Archives, 6:10 (2019), p.43-45.
29. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.559-567.
30. Расулов Т.Х., Ширинова М.У. Об одном применение леммы Морса. Молодой учёный, 9 (2015), с.36-40.