БАЪЗИ ДИНАМИК СИСТЕМАЛАРНИНГ СОНЛИ ЕЧИМЛАРИ ҲАҚИДА

Хайдар Раупович Расулов
Бухоро давлат университети
xrasulov71@mail.ru

Фарангис Мурат қизи Джўрақулова
Бухоро давлат университети

АННОТАЦИЯ

Мақолада динамик системалар, динамик системаларнинг қўзғалмас нуқталари ва шу йўналишда олиб борилган илмий изланишлар таҳлиллари келтирилган. Бундан ташқари, дискрет вақтли квадратик стохастик операторнинг узлуксиз аналоги (оддий дифференциал тенгламалар системасига келтирилади) C++ тилида тузилган дастур ёрдамида ечилиб, ечимнинг аниқлик даражаси 0,001 гача ҳисобланган.

Калит сўзлар: квадратик стохастик операторлар, дастурлаш тили, сонли усуллар.

ABOUT NUMBER SOLUTIONS OF SOME DYNAMIC SYSTEMS

Khaydar Raupovich Rasulov
Bukhara State University
xrasulov71@mail.ru

Farangis Murat kizi Dzhurakulova
Bukhara State University

ABSTRACT

The article presents dynamic systems, fixed points of dynamic systems and analysis of scientific research in this area. In addition, a continuous analog of a discrete-time quadratic stochastic operator (reduced to a system of simple differential equations) was solved using a program written in C ++ and the accuracy level was found to be 0.001.

Keywords: quadratic stochastic operators, programming language, numerical methods.

КИРИШ

Энг аввало динамик системанинг таърифини келтирайлик. Динамик система – бу ҳақиқий жараён (физик, биологик, иқтисодий ва бошқалар) эволюциясининг математик модели бўлиб, ҳар қандай вақтда ҳам ҳолати ўзининг дастлабки ҳолати билан аниқланади. Динамик системаларнинг эволюция қонунининг берилиши турлича бўлади: чизиқли ёки ночизиқли дифференциал тенгламалар, дискрет акслантиришлар, графлар назарияси, Марков занжирлари назарияси, мувозанатда бўлмаган термодинамика назарияси, динамик хаослар назарарияси, синергетика ва бошқалар. Шу ўринда айтиб ўтиш лозимки, мувозанатда бўлмаган термодинамика - термодинамик мувозанат ҳолатидан ташқаридаги системаларни ва қайтариб бўлмайдиган жараёнларни ўрганади; - динамик хаослар назарияси эса маълум бир чизиқли бўлмаган динамик системаларнинг ҳатти-ҳаракатларини тавсифловчи математик аппарат бўлиб, маълум шароитларда хаос деб номланувчи ҳодисага боғлиқ; - синергетика (қадимги юнон тилидан олинган бўлиб, «фаолият» деган маънони англатади) - бу термодинамик мувозанатдан узоқ бўлган, моделларнинг шаклланиши ва ўзаро ташкил топиши ҳамда очиқ системалардаги структураларни ўрганадиган фаннинг фанлараро йўналиши ҳисобланади.

АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Динамик системалар ўрганилаётган жараёндан келиб чиқиб, дискрет вақтли ва узлуксиз вақтли системаларга ажратилади. Анъанавий равишда каскадлар деб аталадиган дискретли вақтли системаларда системанинг ҳатти-ҳаракатлари (ёки бир хил бўлса, фазали фазосидаги системанинг траекторияси) ҳолатлар кетма-кетлиги билан тавсифланади. Анъанавий равишда оқим деб аталадиган узлуксиз вақтли динамик системаларда системанинг ҳолати вақтнинг ҳар бир лаҳзаси учун аниқланади. Каскадлар ва оқимлар рамзий ва топологик динамикаларда кўриб чиқиладиган асосий мавзу ҳисобланади.

Динамик система (узлуксиз вақтли) кўпинча маълум бир соҳада аниқланган, мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартларини қаноатлантирадиган автоном дифференциал тенгламалар системаси орқали ифодаланади. Динамик системанинг мувозанат ҳолати дифференциал тенгламанинг критик (сингуляр, қўзғалмас) нуқталарига, ёпиқ фазали эгри чизиқлари эса унинг даврий ечимларига тўғри келади.

Динамик системалар назариясини ассосий вазифаси дифференциал тенгламалар билан аниқланадиган эгри чизиқларни ўрганишдир. Бунга фазали фазонинг траекторияларга бўлиш ва ушбу траекторияларнинг ҳолатини ўрганиш киради: мувозанат ҳолатини топиш ва таснифлаш, ўзига жалб қилувчи (аттракторлар) ва итарувчи (репеллерлар) тўпламларни аниқлашлар киради.

Замонавий динамик системалар назарияси математиканинг турли соҳаларида кенг қўлланилади ва самарали бирлаштирилади: топология ва алгебра, алгебраик геометрия ва ўлчовлар назарияси, дифференциал шакллар назарияси шулар жумласидандир.

Юқорида айтиб ўтилганидек, динамик системани таҳлил қилишнинг асосий вазифаларидан бири бу система ҳолатининг эволюциясини ўрганишдир. Одатда система ҳолати баъзи қонунлар билан берилади. Математик генетикада пайдо бўладиган ушбу қонуниятларни тавсифлаш учун кўпинча квадратик стохастик операторлардан фойдаланилади.

Стохастиклик (қадимги юнонча тос сўздан олинган бўлиб, мақсад, тахмин) - тасодифийликни англатади. Тасодифий (стохастик) жараён детерминистик бўлмаган жараён бўлиб, бундай системанинг кейинги ҳолати ҳам тахмин қилинадиган, ҳам тасодифий миқдорлар билан тавсифланади.

Математикада стохастиклик атамасидан фойдаланиш Владислав Борткевичнинг (рус иқтисодчиси ва статисти) гипотезалардан фойдаланиш борасида ёзган асарлари билан боғлиқ ҳисобланади.

МУҲОКАМА

Турли соҳалардаги бир қатор муаммолар чизиқли бўлмаган ўзгаришларнинг такрорланиши уларнинг эргодик ва асимптотик хусусиятларини ўрганиш зарурлигига олиб келади. Масалан, кўпайтирувчи ва тарқаладиган заррачаларнинг ўзаро таъсири билан шуғулланадиган физика муаммолари; ёпиқ генетик система популяцияси динамикасининг биологик муаммолари; жамоавий хулқ-атвор моделларида барқарорликнинг иқтисодий муаммолари ва бошқалар.

Эргодик назарияда чизиқли бўлмаган ўзгаришларнинг такрорланиши эҳтимолий-статистик тасаввурларнинг иштирок этиши билан боғлиқ бўлиб, ўзгармас ўлчовлар ва динамик системалар тушунчасига олиб келади.

Хусусан, биологияда популяция эволюциясининг математик модели квадратик стохастик операторлар орқали ифодаланади. Ушбу талқин билан ёпиқ биологик система эволюцияси жараёнида ҳар хил типдаги индивидларнинг чегараланган тақсимотини топиш муаммоси квадратик стохастик операторнинг асимптотик хусусиятларини ўрганилишига тенгдир. Бундан ташқари, квадратик стохастик операторлар назариясида оддий ва ностандарт масалалар ҳамда ечилмаган масалаларнинг кўплиги математик нуқтаи назардан катта қизиқиш уйғотади.

Квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг ҳолатини (яъни такрорланишлар кетма-кетлигини) ўрганиш муаммоси биринчи бўлиб С. Улам ва унинг сафдошлари [1] асарларида учрайди. Шунингдек, бир қатор илмий изланишларда компьютер ёрдамида икки ўлчовли S^2 симплексда берилган ҳар хил типдаги квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг сонли таҳлили ўтказилган. Кейинчалик С. Улам ва унинг ҳамкасбларининг изланишлари S^{n-1} симплексидаги квадратик стохастик операторларни ўрганиш учун зарур бўладиган Липшиц константаларини баҳолашга бағишланган.

Квадратик стохастик операторларнинг синф кенг бўлиб, ушбу мақолада баъзи типга тегишли бўлган квадратик стохастик операторнинг таърифини келтирамиз. Биз [2] ишдаги таърифлар ва белгилашлардан фойдаланамиз. $E = \{ 1,2, \dots , n\}$ бўлсин.

$$S^{n-1}=\left\{x=\{x_1,\dots,x_n\}\in R^n: x_i\geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$$

тўплам $(n-1)$ ўлчовли S^{n-1} симплекс деб аталади.

Ҳар бир $x\in S^{n-1}$ элемент E да эҳтимоллик катталиги бўлиб, уни n та элементдан ташкил топган биологик (физик ва ҳоказо) системани ҳолати деб изоҳлаш мумкин.

Квадратик стохастик оператор $V: S^{n-1}\to\ S^{n-1}$

$$V: x_k'=\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k}x_ix_j, \qquad (1)$$

бу ерда $p_{ij,k}$ ирсийлик даражаси бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$p_{ij,k}\ \geq 0,\ p_{ij,k}\ =p_{ji,k\,,}\sum_{k=1}^{n} p_{ij,k}=1.$$

Математик генетикада ушбу оператор V популяциянинг эволюцион оператори ёки квадратик стохастик операторлар синфига кирувчи оператор ҳисобланади. Популяция кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ бўлган организмлар бирлашмаси сифатида тавсифланади.

Популяцияда $F_1, F_2,\dots$ наслар кетма-кетлиги фарқланади. Турли насллар вакиллари ўртасида кесишиш содир бўлмайди деб тахмин қиламиз. Популяция таркибига кирадиган ҳар бир вакил $1,2,\dots,n$ турлардан бирига тегишли. Популяция ҳолати $x=(x_1,\dots,x_n)\in\ S^{n-1}$ орқали белгиланади. Асосий мақсад x нинг турли вақтлардаги ҳолатини ўрганиш ҳисобланади.

Ушбу мақолада юқорида айтиб ўтилган квадратик стохастик операторнинг (1) узлуксиз аналогининг муайян ҳолатини, яъни чизиқли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар системасини ўрганамиз.

$n=3$ ва $p_{ij,k}$ баъзи қийматларида ўрганилаётган система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\dfrac{1}{2}x_3^2+2x_2x_3-x_1, \\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{2}x_3^2+2x_1x_3-x_2, \\ \dot{x}_3=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_3. \end{cases} \qquad (2)$$

(2) системани, яъни оддий диференциал тенгламалар системасини (Коши масаласи) сонли ечиш учун Эйлер усулини қўллаймиз.

НАТИЖА

Айтиш жоизки, сонли усулларга бағишланган кўплаб дарслик ва ўқув қўлланмаларда асосан биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни

ISSN: 2181-1601

ечиш учун Эйлер усули батафсил баён этилади. Шу сабабли (1) системани ҳам оддий дифференциал тенгламага (вектор кўринишда) келтирилишини (оддий дифференциал тенгламалар системаларини сонли ечиш ечишга бағишланган бир қатор адабиётларда берилган) кўрсатиб ўтамиз. Бундан шундай хулоса қилиш мумкинки, оддий дифференциал тенгламаларни ечиш учун қўлланилган барча усулларни дифференциал тенгламалар системасига ҳам қўллаш мумкин.

Бунинг учун (1) оддий дифферециал тенгламалар системасини қуйидаги кўринишга ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \tag{3}$$

Бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин:

$x_1(0) = x_{10}$,
$x_2(0) = x_{20}$,
$x_3(0) = x_{30}$.

Тенгламалар системасини қулай кўринишда, яъни вектор кўринишида ёзиб оламиз:

$$\dot{X} = F(X),$$
$$X(0) = X_0,$$

бу ерда $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ ноъмалум функцияларнинг вектор устуни, $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ – (1) системанинг ўнг томонидан бериган функцияларнинг вектор устуни.

Эйлер усули ёрдамида (3) дифференциал тенгламалар системасини қуйидаги системага келтириб оламиз:

$$x_{ij+1} = x_{ij} + hf_i\left(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}\right),$$
$$i = 1,2,3,$$

$j -$ қадам рақами,

$$t_{j+1} = t_j + h.$$

Қайд қилиб ўтамиз, Эйлер усули бўлакли-чизиқли функция орқали интеграл эгри чизиғини яқинлаштиришга асосланган. C++ тилида дастурлаш ёрдамида сонли ечимлар (2) олинди. Қуйидаги жадвалда $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0.4, x_3(0) = 0.2$ бўлгандаги ечимларнинг қийматлари келтирилган:

j	t_{j+1}	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}
0	0	0.4	0.4	0.2
1	0.1	0.387	0.387	0.225
2	0.2	0.377	0.377	0.245
3	0.3	0.369	0.369	0.262
4	0.4	0.362	0.362	0.275
5	0.5	0.357	0.357	0.286

6	0.6	0.353	0.353	0.295
7	0.7	0.349	0.349	0.302
8	0.8	0.346	0.346	0.307
9	0.9	0.344	0.344	0.312
10	1	0.342	0.342	0.316
11	1.1	0.340	0.340	0.319
12	1.2	0.339	0.339	0.322
13	1.3	0.338	0.338	0.324
14	1.4	0.337	0.337	0.326
15	1.5	0.337	0.337	0.327
16	1.6	0.336	0.336	0.328
17	1.7	0.335	0.335	0.329
18	1.8	0.335	0.335	0.333
19	1.9	0.334	0.334	0.333
20	20	0.334	0.334	0.333

Дастур ёрдамида турли бошланғич қийматларда (3) динамик системанинг ечимлари топилган. Шуни таъкидлаш лозимки, олинган сонли ечимлар [2] да олинган назарий натижаларга тўлиқ мос келади. Шунингдек, узлуксиз вақтли квадратик стохастик операторлар - чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар системалари ҳамда чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар учун [3-16] да турли чегаравий масалалар ўрганилган.

ХУЛОСА

Маълумки, мақолада ўрганилган узлуксиз вақтли квадратик стохастик операторлар биологик жараёнларни ифодаловчи математик модель ҳисобланади. [17] мақолада биологик жараёнларни ифодаловчи математик моделлар, яъни бир қатор операторларнинг кўринишлари ва уларнинг биология билан боғлиқлиги кўрсатиб ўтилган.

Дискрет вақтли квадратик стохастик операторлар ҳам чуқур ўрганилган бўлиб, [18-28] мақолаларда уларнинг қўзғалмас нуқталари ва траекторияларининг ҳолати топилган ҳамда ушбу изланишларни таҳлил қилишни осонлаштириш учун педагогик тавсиялар берилган.

REFERENCES

1. Улам С. Нерешенные математические задачи // М. Наука, 1964, С. 168.
2. Розиков У.А., Жамилов У.У. О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Мат. сборник, **200**:9 (2009), с. 81–94.

3. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10, 2019.
4. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
5. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
6. Rasulov Kh.R. On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal, 4 (2018), p.126-131.
7. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
8. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
9. Джуракулова Ф.М. О численных решениях непрерывного аналога строго невольтерровского квадратичного стохастического оператора // Вестник науки и образования, 102:24-3 (2020), С. 6-9.
10. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века, 53:6 (2019), С.16-18.
11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
12. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
13. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66
14. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
15. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.

16. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
17. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
18. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли елементов истории математики в преподавании математики. Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom 27-29 May, 2020. С. 701-702.
19. Мамуров Б.Ж. Неравномерной оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин . Молодой учёный. **197**:11 (2018). С. 3-5.
20. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин. Academy. **55**:4 (2020). Pp. 13-16.
21. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes. Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017.
22. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type $(\sigma|\mu)$. arXiv: 2004.01702 [math.D.S]. Pp. 1-14.
23. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования. 96:18 (2020), часть 2, С 5-7.
24. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite genotypes. Scientific reports of Bukhara State University. 1:5,2018. Pp. 18-21.
25. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type $(\sigma|\mu)$. Markov Processes Relat.Fields 26, 915-933 (2020).
26. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов. Bulletin of Institute of Mathematics 2019. №6, p.35-39.
27. Мамуров Б.Ж. О кубических стохастических процессов. Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С.72.
28. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора. Наука, техника и образование. 77:2-2 (2021), Стр.10-15.