SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842 VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

www.openscience.uz

TABLE OF CONTENTS / МУНДАРИЖА

EXACT SCIENCES / АНИҚ ФАНЛАР

NATURAL SCIENCES / ТАБИИЙ ФАНЛАР

О некоторых символах математического анализа

Хайдар Раупович Расулов
xrasulov71@mail.ru
Бухоро давлат университети

Аннотация: В настоящей статье даны определения «o» малого и «O» большого, эквивалентных (асимптотически равных) функций, функций одного порядка, и их некоторые свойства. Приводятся доказательства отдельных их свойств. Указаны методы применения «o» малого и «O» большого при вычисления пределов и исследование интегралов.

Ключевые слова: «o» малое, «O» большое, предел, бесконечно малое, асимптотика, величина, эквивалентность.

About some notations of mathematical analysis

Xaydar Raupovich Rasulov
xrasulov71@mail.ru
Bukhara State University

Abstract: This article gives the definitions of little-o and big-O notations, equivalent (asymptotically equal) functions, one order function, and some of their properties. Proofs of some of their properties are given. Methods of using little-o and big-O notations in calculating the limits and studying integrals are indicated.

Keywords: little-o notation, big-O notation, limit, infinitesimal, asymptotes, magnitude, equivalence.

В настоящее время компьютерные технологии широко используются при выполнении математических вычислений. В частности, программы MathCAD, Maple предназначены для решения различных математических задач. Эти программы в основном специализируются на решении стандартных задач. Однако при решении ряда задач желательно использовать отдельные специальные методы.

Так, в многочисленных задачах возникают лимиты, интегралы и ряды, содержащие большой параметр. Случаи, когда такие интегралы явно вычисляются, крайне редки; еще реже удается просуммировать ряды. При больших значениях параметра вычисление интегралов и рядов - весьма трудоемкая задача даже для самых современных ЭВМ.

В этих целях использование асимптотических методов при вычислении пределов и интегралов дают хорошие результаты. Так, как в этих случаях решающие роль играют асимптотические методы. С учетом вышеизложенного дадим краткое описание «o» малого и «O» большого, вычисление некоторых пределов и интегралов с помощью асимптотическими методами.

«O» большое и «o» малое - математические обозначения для сравнения асимптотического поведения (асимптотики) функций. Используются в различных разделах математики, но активнее всего - в математическом анализе и в дифференциальном уравнение, теории чисел и комбинаторике, а также в информатике и теории алгоритмов. Под асимптотикой понимается характер изменения функции при стремлении её аргумента к определённой точке.

Обозначение «O» большое введено немецким математиком Паулем Бахманом (Paul Gustav Heinrich Bachmann) во втором томе его книги «Analytische Zahlentheorie» (Аналитическая теория чисел), вышедшем в 1894 году. Обозначение «o» малое впервые использовано другим немецким математиком, Эдмундом Ландау (Edmund Georg Hermann Landau) в 1909 году. С работами последнего связана и популяризация обоих обозначений, в связи с чем их также называют символами Ландау.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на некотором множестве M и a - предельная точка множества M. Как правило, независимое переменное x является вещественным или комплексным числом.

Будем использовать следующие общепринятые обозначения.

Формула	Определение
$f(x) \sim g(x)\ (x \to a, x \in M)$	$\lim\limits_{x\to a, x\in M} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$f(x) = o\,(g(x))\ (x \to a, x \in M)$	$\lim\limits_{x\to a, x\in M} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f(x) = O\,(g(x))\ (x \in M)$	Существует постоянная C такая, что $\lvert f(x)\rvert \le C\,\lvert g(x)\rvert$ при всех $x \in M$
$f(x) = O\,(g(x))\ (x \to a, x \in M)$.	Существуют постоянная C и окрестность U точки a такие, что $\lvert f(x)\rvert \le C\,\lvert g(x)\rvert$ при $x \in M \cap U$.

Неформально говоря, соотношение $f(x) = o(g(x))$ означает, что функция $f(x)$ стремится к нулю быстрее, чем функция g (говорят еще: $f(x)$: бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)$); соотношение $f(x) = O(g(x))$ означает, что $f(x)$ стремится к нулю не быстрее, чем $g(x)$.

В силу самого определения ясно, что слова «$f(x) = o(g(x))$» имеют смысл только вместе с уточнением при «$x \to a$». Тем не менее, на практике это уточнение всегда опускают, полагая, что из контекста ясно, что куда стремится.

Практический опыт показывает, что для начинающих символы o и O могут представлять известную трудность (например, одним и тем же символом $o(x)$ могут обозначаться совершенно разные функции). Тем не менее, такая символика и удобна, и общепринята.

В этих формулах указание на множество M будем опускать в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Примеры.

1. $\ln x = o\ (x^{-\alpha})\ (x \to +0), \alpha > 0;$
2. $\ln x = o\ (x^{\alpha})\ (x \to +\infty), \alpha > 0 -$ любое;
3. $\sin z \sim z\ (z \to 0);$
4. $\sin x = O\ (1)\ (-\infty < x < \infty);$
5. $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n\ (n \to \infty);$
6. Пусть S_ε- сектор $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ в комплексной плоскости z, $c > 0$.

Тогда

$$e^{-cz} = O\left(e^{-c'|z|}\right)(z \in S_\varepsilon), c' > 0.$$

Так как $Re\ z \geq |z|\ (\sin \varepsilon)^{-1}$ при $z \in S_\varepsilon$, то

$|e^{-cz}| \leq e^{-\frac{c}{\sin \varepsilon}|z|}\ (z \in S_\varepsilon).$

7. При любых $a, b > 0$

$e^{-a|z|} = o\ (|z|^{-b})\ (|z| \to \infty).$

Еще раз повторяем, что соотношение $f(x) = o\ (g(x))\ (x \to a)$ означает, что функция $f(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$. Аналогично соотношение $f(x) = O\ (g(x))\ (x \to a)$ означает, что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$. В частности, если $f(x) = o\ (1)\ (x \to a)$, то $f(x)$ - бесконечно малая величина при $x \to a$; если же $f(x) = O\ (1)\ (x \to a)$, то $f(x)$ ограничена при $x \to a$. Отсюда нетрудно получить ряд правил действий с символами o, O:

$o\big(f(x)\big) + o\big(f(x)\big) = o\big(f(x)\big),$

$o\big(f(x)\big)\, o(g(x)) = o\big(f(x)g(x)\big),$

$o(o(f(x))) = o\big(f(x)\big).$

В этих формулах $x \to a$, $x \in M$, множество M и точка a - одни и те же в левой и правой части каждого равенства.

Расшифруем и докажем первую формулу; остальные доказываются аналогично.

Пусть $g_1(x) = o\big(f(x)\big), g_2(x) = o\big(f(x)\big)$ при $x \to a$; тогда $g_1(x) + g_2(x) = o\big(f(x)\big)$ при $x \to a$ - это содержание первой формулы.

Доказательство:

$$\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)+g_2(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{f(x)}+\lim_{x\to a}\frac{g_2(x)}{f(x)}=0.$$

Точно такие же формулы справедливы для символа O. Далее, имеют место формулы

$$o\big(f(x)\big)+O\big(f(x)\big)=O\big(f(x)\big),$$
$$o\big(f(x)\big)\,O\big(g(x)\big)=\ o\big(f(x)g(x)\big),$$
$$O\Big(o\big(f(x)\big)\Big)=o\big(f(x)\big), o\Big(O\big(f(x)\big)\Big)=o\big(f(x)\big)$$

(здесь всюду $x\to a\ x\in M$).

Отсюда следует, что также имеют место следующие:

$$x+o(x)=O(x);\ O(\varphi)O(\psi)=O(\varphi\psi);\ O(\varphi)o(\psi)=O(\varphi\psi);$$
$$O(\varphi)+O(\psi)=O(|\varphi|+|\psi|);\ O\big(O(\varphi)\big)=O(\varphi);$$
$$O\big(o(\varphi)\big)=o\big(O(\varphi)\big)=o\big(o(\varphi)\big)=o(\varphi);\ O(\varphi)o(\psi)=o(\varphi)o(\psi).$$

Примеры.

1. $e^x=1+x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+O(x^2)(x\to 0);$

2. $ln\{1+O(x)\}=O(x)(x\to 0).$

Соотношения вида

$$f(x)\sim g(x), f(x)=o\big(g(x)\big), f(x)=O\big(g(x)\big)$$

называются асимптотическими формулами или асимптотическими оценками.

Приведем простейшие асимптотические оценки некоторых интегралов и простые достаточные условия, при которых асимптотические оценки можно интегрировать.

Свойства 1. Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны, $g(x)>0$ при $a<x<b$, и пусть

$$\int_{x_0}^{b} g(x)\,dx=+\infty,$$

где $a<x_0<b$. Тогда:

1°. Если $f(x)=O\big(g(x)\big)\ (x\to b)$, то

$$\int_{x}^{b} f(x)\,dx=O\left(\int_{x}^{b} g(x))\right)\ (x\to b);$$

2°. Утверждение 1° остается в силе, если всюду заменить O на o.

3°. Если $f(x)\sim g(x)\ (x\to b)$, то

$$\int_x^b f(x)dx \sim \int_x^b g(x)dx \ (x \to b).$$

Для примера, докажем 2°. Применяем правило Лопиталя, тогда

$$\lim_{x\to b}\frac{\int_x^b f(x)dx}{\int_x^b g(x)dx} = \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

Примеры.

$$(x+1)^3 \sim x^3 \ (x\to\infty);\ sh\,x \sim \frac{1}{2}e^x \ (x\to+\infty);$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \ (x\to\infty);\ \frac{1}{x} = o(1) \ (x\to\infty);$$

$$\sin x = O(1) \ (x\in R);\ \sin x = O(x) \ (x\in R);$$

$$x^2 = O(x) \ (x\to 0);\ x = O(x^2) \ (x\to\infty);\ \ln x^{\frac{1}{x}} = O(1) \ (x\to\infty);$$

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} = O(x) \ (x\to\infty);\ e^x = 1 + x + O(x^2) \ (x\to 0).$$

Также можно отметить, эквивалентность следующих функций при $x \to 0$.

$$sinx = x + o(x);\ tgx = x + o(x);\ 1 - cosx = \frac{1}{2}x^2 + o(x);$$

$$arcsinx = x + o(x);\ arctgx = x + o(x);\ a^x - 1 = x + o(x)$$

$$a^x - 1 = x + o(x);\ \log_a(1+x) = \frac{x}{lna} + o(x);\ (1+x)^a - 1 = a\cdot x + o(x).$$

Эти соотношения останутся в силе, если в них вместо переменной x записать отличную от нуля функцию $\varphi(x)$, стремящуюся к нулю при $x \to x_0$. Например:

$$sinx^2 = x^2 + o(x) \ (x\to 0);\ tg\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o(x) \ (x\to\infty),$$

$$tgsin(x-1)^2 = sin(x-1)^2 = (x-1)^2 + o(x) \ (x\to 1).$$

Для вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,(2x)\cdot(e^{3x}-1)}{2-2cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 3x}{2\frac{x^2}{2}} = 6.$$

Пример 2. Раскрытие неопределенности $[1^\infty]$. Пусть

$$\alpha(x) \to 0 \ (\alpha(x) \neq 0), \beta(x) \to \infty.$$

Тогда в силу непрерывности показательной функции,

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)(\alpha(x)+o(\alpha(x)))}.$$

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = A$, то

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)(\alpha(x)+o(\alpha(x))) = \lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot\frac{\alpha(x)+o(\alpha(x))}{\alpha(x)} =$$

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)\left(1+\frac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)}\right) = A.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = A.$$

Для самостоятельного решения предлагаем следующие примеры. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = \infty.$

Доказать, что

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = 0, \text{если } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = -\infty.$$

Если же,

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = +\infty, \text{то } \lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = +\infty.$$

Также, покажем применение приведенных выше свойств к исследованию интегралов. Здесь в следующих предложениях достаточно потребовать измеримости функций f, g и суммируемости на каждом отрезке $I \subset (a,b)$:

а) если $f(x) = O(x^{\alpha})\ (x\to+\infty)$, то при $x\to+\infty$

$$\int_0^x f(t)dt = O(x^{\alpha+1}), \alpha > -1,$$

$$\int_0^x f(t)dt = O(\ln x),\ \alpha = -1;$$

б) если $f(x) \sim x^{\alpha}\ (x\to+\infty)$, то при $x\to+\infty$

$$\int_0^x f(t)dt \sim \begin{cases} x^{\alpha+1}/(\alpha+1), \alpha > -1, \\ \ln x, \alpha = -1, \end{cases}$$

$$\int_\infty^x f(t)dt \sim x^{\alpha+1}/(\alpha+1), \alpha < -1.$$

в) пусть

$$f(x) = \sum_{k=-1}^{n} a_k x^k + O(x^{-2})\ (x\to+\infty).$$

Тогда при $x\to\infty$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + a_1 \ln x + O(1).$$

г) пусть

$$f(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k x^{-k} + O(\,x^{-n-1})\ (x \to +\infty).$$

Тогда при $x \to +\infty$

$$\int_x^{\infty} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + O(x^{-n}).$$

д)

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt = \ x + \frac{1}{2} \ln x + O(1)\ (x \to +\infty).$$

Приведем простейшие оценки для рядов.

Свойства 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонна при $x \geq 0$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + O(f(n+1)) + O(1)\ (x \to \infty).$$

Пусть $f(x)$ возрастает для определенности. Тогда

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)dt,$$

и, суммируя эти неравенства при $1 \leq k \leq n$, получаем

$$f(0) \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt \leq f(0) + \int_n^{n+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \leq f(n+1) +$$
$$+f(0) - \int_0^1 f(t)dt.$$

Тем самым свойства 2 доказано. Без доказательство приведем следующую предложению.

Свойства 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geq 0$. Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)dx \right| \leq \int_0^n |f'(x)|\, dx + |f(0)|.$$

Отметим, что свойства 2 и 3 удобны при вычислении асимптотики сумм типа $\sum_{k=0}^{n} f(k)$, если $f(x)$ растет не быстрее некоторой степени x при $x \to +\infty$.

Приведем следующие примеры. Так, при $n \to +\infty$ имеем

а) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$;

б) $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha > -1$;

в) $\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha} (\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}, \alpha > -1$;

г) $\sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k} \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha > -1$.

Характеризующий этот же самый подход, касается отыскания больших положительных корней уравнения $x tg\, x = 1$. Это уравнение можно обратить следующим образом:

$$x = n\pi + arctg \frac{1}{x}$$

где n- целое, а $arctgx$ принимает главное значение. Так как в этом случае он изменяется в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, мы находим, что $x \sim n\pi$ при $n \to \infty$. Далее, если $x > 1$, то

$$arctg \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \cdots.$$

Следовательно,

$$x = n\pi + O\left(\frac{1}{x}\right) = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применяя метод асимптотических итераций еще два раза, найдем

$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

и

$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3(\pi n)^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

и т.д.

В заключение отметим, что материалы, представленная в данной статье, упрощает изучение и применение этих символов в практических задачах. Обеспечивает удобство для студентов для вычислении ряда пределов и интегралов [1-7]. Нужно отметить, что студентами и магистрами опубликован ряд научных работ по этой направление [8-21].

В будущем, для повышения эффективности обучения предмета математического анализа, важно предоставить информацию о преподавании математики и ее применении на практике, использовании ряда передовых педагогических технологий [22-28] и интеграции с другими дисциплинами [29-30].

Использованная литература

1. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // *XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019*, с. 197-199.

2. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // *«Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ* (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

3. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // *Ученый XXI века, международный научный журнал*, 53:6-1 (2019), с.16-18 .

4. Расулов Т.Х. (2020). Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения. *Наука, техника и образование.* 73:9, С. 74-76.

5. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // *Вестник науки и образования,* 97:19-1 (2020), С. 6-9.

6. Расулов Т.Х. (2011). О числе собственных значений одного матричного оператора. *Сибирский математический журнал*, 52:2, С. 400-415.

7. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. Молодой ученый. №15, С. 105-106.

8. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.42-48.

9. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.23-26.

10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.81-96.

11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.39-52.

12. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional*

Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

13. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.665-672.

14. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) c.19-22.

15. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) c.27-30.

16. Расулов Х.Р., Джўрақулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.455-462.

17. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.448-454.

18. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

19. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // *Science and Education, scientific journal*, 2:9 (2021), p.7-20.

20. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p. 586-595.

21. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.596-607.

22. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.559-567.

23. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // *Наука, техника и образование*, 72:8 (2020) c.29-32.

24. Ахмедов О.С. (2021). Методы организации работы с одаренными учащимся. *Science and Education*. 2 (10), 239-248 b.

25. Ахмедов О.С. (2021). Преимущества историко-генетического метода при обучении математики. *Scientific progress*. 2:4 (2021), p. 523-530.

26. Ахмедов О.С. (2021). Определение предмета и место математики в системе наук. *Scientific progress*. 2:4, p. 531-537.

27. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. *Academy*. **55**:4, pp. 68-71.

28. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

29. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // *Проблемы педагогики,* № 53:2 (2021), с. 7-10.

30. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // *Scientific progress*, 2:2 (2021), p.870-879.

References

1. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.

2. Rasulov Kh.R. On a boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference Collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18-22, 2019), pp.65-66.

3. Rasulov Kh.R. et al. On the solvability of the Cauchy problem for a degenerate quasilinear hyperbolic equation // Scientist of the XXI century, international scientific journal, 53: 6-1 (2019), pp.16-18.

4. Rasulov T.Kh. (2020). Innovative technologies for studying the topic of linear integral equations. Science, technology and education. 73: 9, pp. 74-76.

5. Rasulov Kh.R., Rashidov A.Sh. On the existence of a generalized solution to a boundary value problem for a nonlinear equation of mixed type // Bulletin of Science and Education, 97: 19-1 (2020), pp. 6-9.

6. Rasulov T.Kh. (2011). On the number of eigenvalues of one matrix operator. Siberian Mathematical Journal, 52: 2, pp. 400-415.

7. Dilmurodov E.B. (2017). Numerical image of the multidimensional generalized Friedrichs model. Young scientist. No. 15, S. 105-106.

8. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 42-48.

9. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On some Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) p.23-26.

10. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the bisexual population and its mathematical model // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.81-96.