Х. Р. Расулов, Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022, номер 4,

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 1–x
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1914
EDN: AAAAAA

УДК 517.956.6

Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения

Х. Р. Расулов[1,2]

[1] Бухарское отделение Института математики
им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

[2] Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Введен класс $\mathbf{R_1}$ обобщенных решений в гиперболической части области. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Доказательство существования решения проводится методом интегральных уравнений. Краевая задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений, разрешимость которой доказана с помощью принципа Шаудера. В результате применения принципа Шаудера получена глобальная разрешимость исследуемой задачи без каких-либо ограничений на размер площади рассматриваемой области и на значение заданных функций.

Ключевые слова: обобщенное решение, нормальная кривая, метод интегралов энергии, интегральное уравнение нормального типа, индекс интегрального уравнение, регуляризация, равностепенная непрерывность, принцип Шаудера.

Получение: 7 марта 2022 г. / Исправление: 6 октября 2022 г. / Принятие: 28 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 9 декабря 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Расулов Х. Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 1–x. EDN: AAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu1914.

Сведения об авторе
Хайдар Раупович Расулов https://orcid.org/0000-0001-8525-4701
кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник;
e-mail: xrasulov71@mail.ru

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y|y|^m U_{xx} + \operatorname{sign} x|x|^m U_{yy} = f(x, y, U), \tag{1}$$

где $m = \text{const}$, причем $2/3 \leqslant m < 2$.

Пусть Ω — конечная односвязная область на плоскости переменных (x, y), ограниченная при $x > 0$, $y > 0$ нормальной кривой σ_0: $x^{2p} + y^{2p} = 1$, а при $x < 0$, $y > 0$ и $x > 0$, $y < 0$ — характеристиками BC: $(-x)^p + y^p = 1$, CD: $x + y = 0$, DA: $x^p + (-y)^p = 1$ уравнения (1), соответственно, $2p = m + 2$.

Введем обозначения:

$$\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad \Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\},$$
$$\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, \quad I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\},$$
$$I_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\},\ P = \{(x, y, U) : (x, y) \in \overline{\Omega}, -\infty < U < +\infty\}.$$

Задача T. *Найти функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами*:

1) $U(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2)$;
2) $U(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (1) *в области* Ω_0;
3) $U(x, y)$ — *обобщенное решение класса* $\mathbf{R_1}$ *уравнения* (1) *в области* Ω_i, $i = 1, 2$;
4) $U(x, y)$ — *удовлетворяет краевым условиям*:

$$U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \sigma_0,$$
$$U|_{DA} = 0, \quad 2^{-1/p} \leqslant x \leqslant 1,$$
$$U|_{BC} = 0, \quad 2^{-1/p} \leqslant y \leqslant 1;$$

5) *на линиях параболического вырождения уравнения* (1) *выполняются условия склеивания*:

$$U_y(x, +0) = U_y(x, -0), \ \ (x, 0) \in I_1; \quad U_x(+0, y) = U_x(-0, y), \ \ (0, y) \in I_2,$$

причем $U_y(x, 0)$ ($U_x(0, y)$) непрерывна в I_1 (I_2), а при $x \to 0$ ($y \to 0$) может иметь особенность порядка меньше единицы, а при $x \to 1$ ($y \to 1$) ограничена.

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость задачи T для уравнения (1).

Краевые задачи для линейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения изучены достаточно глубоко. Так, в работе [1] доказан критерий единственности решения первой краевой задачи методом спектрального разложения для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями степенного вырождения. В [2] получены условия на комплексный параметр, при которых решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа единственно.

В работах [3,4] исследованы внешние задачи Трикоми и Франкля, а также Бицадзе—Лаврентьева для уравнений смешанного типа Бицадзе—Лаврентьева с восемью параболическими вырождающимися прямыми и предложены некоторые открытые задачи, имеющие жизненно важные значения в механике жидкости.

В [5] получены условия на комплексный параметр, при которых единственно решение задачи Трикоми для уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа. В [6,7] для уравнения с двумя перпендикулярными внутренними линиями изменения типа изучены задачи с граничными условиями первого и второго рода на границе прямоугольной области и спектральным методом доказаны теоремы единственности и существования решения.

В работе [8] исследована нелокальная задача для уравнения смешанного типа с перпендикулярными линиями вырождения, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а в гиперболических частях обобщенные производные от значений решения на характеристиках поточечно связаны со значениями решения и нормальных производных от нее на линиях параболического вырождения.

В работе [9] исследована граничная задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе в классе регулярных и ограниченных в бесконечности решений.

Однако разрешимость краевых задач для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения изучена сравнительно мало, поскольку нет общей теории, которая может быть применена для исследования таких уравнений. Среди последних работ можно отметить [10, 11].

2. Класс $\mathbf{R_1}$. Рассмотрим линейное уравнение

$$LU \equiv \operatorname{sign} y|y|^m U_{xx} + \operatorname{sign} x|x|^m U_{yy} + c(x,y)U = f(x,y) \tag{2}$$

в области Ω_i, $i=1,2$, где $c(x,y)$ и $f(x,y)$ — заданные непрерывные функции.

Решение задачи Коши в области Ω_1 (Ω_2) с начальными данными

$$U(x,0)=\tau_1(x),\ \ (x,0)\in \overline{I}_1, \quad \lim_{y\to -0} U_y(x,y)=\nu_1(x),\ (x,0)\in I_1$$

$$\Big(U(0,y)=\tau_2(y),\ \ (0,y)\in \overline{I}_2, \quad \lim_{x\to -0} U_x(x,y)=\nu_2(y),\ \ (0,y)\in I_2\Big)$$

для уравнения (2) с помощью метода Римана [12, стр. 32] представим в виде

$$U(\xi,\eta)=U_0(\xi,\eta)+\int_\xi^\eta d\xi'\int_{\xi'}^\eta H_i(\xi',\eta')c_i(\xi',\eta')U_0(\xi',\eta')V_i(\xi',\eta';\xi,\eta)d\eta' +$$
$$+\int_\xi^\eta d\xi'\int_{\xi'}^\eta H_i(\xi',\eta')f_i(\xi',\eta')V_i(\xi',\eta';\xi,\eta)d\eta' \equiv U_0(\xi,\eta)+\overline{U}(\xi,\eta), \tag{3}$$

где $\sqrt{\xi}=\operatorname{sign} x|x|^p+\operatorname{sign} y|y|^p$, $\sqrt{\eta}=|x|^p+|y|^p$,

$$U_0(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_\xi^\eta \frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\tau_i(t^{1/(2p)})}{(\eta-t)^{1-\beta}(t-\xi)^{1-\beta}}dt -$$
$$-\frac{2^{4\beta-2}\Gamma(1-2\beta)}{p\Gamma^2(1-\beta)}\int_\xi^\eta \frac{t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})}{(\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta}dt;$$

$U_0(\xi,\eta)$ — решение задачи Коши для уравнения (2) при $c(x,y)\equiv f(x,y)\equiv 0$ в области Ω_i, $i=1,2$; $c_i(\xi,\eta)=c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$, $f_i(\xi,\eta)=f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$,

$H_i(\xi,\eta) = 2^{8\beta-4}/(\sqrt{\xi\eta}(\eta-\xi)^{4\beta}p^2)$, $V_i(\xi',\eta';\xi,\eta)$ — функция Римана для уравнения $LU=0$ в области Δ; Δ — образ области Ω_i, $i=1,2$, на плоскости (ξ,η), $2\beta = m/(m+2)$, причем $1/8 \leqslant \beta < 1/4$. Здесь и далее при $i=1$ $x>0$, $y<0$, при $i=2$ $x<0$, $y>0$.

Определение 1. Обобщенным решением класса $\mathbf{R_1}$ [12, стр. 38] уравнения (2) в области Ω_i, $i=1,2$, назовем функцию $U(\xi,\eta)$, определяемую формулой (3), где $\tau_i(t^{1/(2p)})$ и $t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера с показателями $\alpha_1 > 1-\beta$ и $\alpha_2 > \beta$ при $0<t<1$, соответственно.

Для дальнейших исследований класса $\mathbf{R_1}$ будем предполагать, что коэффициент $c(x,y)$ и свободный член $f(x,y)$ уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$\big||x|^{2p}-|y|^{2p}\big|^{-1}|xy|^{-\gamma p}c(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}_i), \tag{4}$$

$$\big||x|^{2p}-|y|^{2p}\big|^{-1}|xy|^{-\gamma p}f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}_i), \quad i=1,2, \quad \gamma > 2\beta. \tag{5}$$

Имеют места следующие леммы.

Лемма 1. *Если $U(x,y)$ — обобщенное решение класса $\mathbf{R_1}$ уравнения (2) в области Ω_1 (Ω_2), то U_x и U_y непрерывны в области Ω_1 (Ω_2), а U_y (U_x) непрерывна вплоть до линии вырождения OA (OB) и*

$$\lim_{y\to-0}\frac{\partial U}{\partial y} = \nu_1(x), \;\; 0<x<1 \quad \Big(\lim_{x\to-0}\frac{\partial U}{\partial x} = \nu_2(y), \;\; 0<y<1\Big).$$

Лемма 2. *Для любого обобщенного решения $U(\xi,\eta)\in\mathbf{R_1}$ можно найти такую последовательность $\{U_n(\xi,\eta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (2) таких, что в любом $\overline{\Delta}_1 \in \Delta$ будем иметь*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)$$

и для любого $\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$:

$$\Big|\frac{\partial U_n}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\Big| < \varepsilon(\eta-\xi)^{-2\beta}, \quad \Big|\frac{\partial U_n}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Big| < \varepsilon(\eta-\xi)^{-2\beta}.$$

Доказательства лемм 1 и 2 проводятся аналогично доказательству леммы [12, стр. 38] с учетом условий (4) и (5).

3. Единственность решения задачи T.

Определение 2. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_0 будем называть функцию $U(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω_0.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y,U)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам в P и удовлетворяет условиям*

$$0 \leqslant f_U(x,y,U) < \frac{1}{4}m(m+2)|xy|^{-2}\big||x|^{-2p}-|y|^{-2p}\big|, \quad (x,y)\in\Omega_1\ (\Omega_2), \tag{6}$$

$$0 \leqslant f_U(x,y,U), \quad (x,y)\in\Omega_0, \tag{7}$$

то задача T *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$, тогда их разность $W(x,y) = U_1(x,y) - U_2(x,y)$ будет удовлетворять уравнению

$$\operatorname{sign} y|y|^m W_{xx} + \operatorname{sign} x|x|^m W_{yy} = f(x,y,U_1) - f(x,y,U_2) \tag{8}$$

с граничными условиями

$$W(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \sigma_0,$$

$$W|_{DA} = 0, \ \ 2^{-1/p} \leqslant x \leqslant 1; \quad W|_{BC} = 0, \ \ 2^{-1/p} \leqslant y \leqslant 1.$$

Так как функция $f(x,y,U)$ имеет непрерывное производное по U, то правую часть уравнения (8) запишем в виде [13, стр. 321]:

$$f(x,y,U_1) - f(x,y,U_2) = \overline{f}_U W, \tag{9}$$

где

$$\overline{f}_U = \int_0^1 f_U(x,y,tU_1 + (1-t)U_2)dt.$$

Тогда в силу (9) уравнение (8) принимает вид

$$\overline{L}W \equiv \operatorname{sign} y|y|^m W_{xx} + \operatorname{sign} x|x|^m W_{yy} - \overline{f}_U W = 0. \tag{10}$$

Для дальнейшего доказательства теоремы 1 приведем две леммы.

Лемма 3. *Пусть* $W(x,y)$ — *регулярное решение уравнения* (10) *в области* Ω_0, *обладающее следующими свойствами*:

1) *функции* $x^{m/2}W_y(x,y)$ *и* $y^{m/2}W_x(x,y)$ *ограничены в* $\overline{\Omega}_0$;
2) *функция*

$$\overline{\nu}_1(x) = \lim_{y\to+0} W_y(x,y) \quad \Big(\overline{\nu}_2(y) = \lim_{x\to+0} W_x(x,y)\Big)$$

непрерывна в I_1 (I_2), *а при* $x \to 0$ $(y \to 0)$ *может обращаться в бесконечность порядка не выше* $2\beta/(1-2\beta)$, *а при* $x \to 1$ $(y \to 1)$ *ограничена*;
3) $W(x,y)$ *обращается в нуль на кривой* σ_0.

Тогда имеет место формула

$$\iint_{\Omega_0} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \overline{f}_U W^2)dxdy + \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 t^m \overline{\tau}_i(t)\overline{\nu}_i(t)dt = 0,$$

где $W(x,0) = \overline{\tau}_1(x)$, $(x,0) \in \overline{I}_1$; $W(0,y) = \overline{\tau}_2(y)$, $(0,y) \in \overline{I}_2$.

Доказательство. Интегрируя тождество $W\overline{L}W \equiv 0$ по области $\Omega_{0\varepsilon}$, получаемой исключением из Ω_0 ε-окрестностей точек O, A и B с помощью нормальных кривых, имеющих параметр $\varepsilon > 0$ и центры соответственно в точках O, A и B, и применяя формулу Грина, получим

$$\iint_{\Omega_{0\varepsilon}} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \overline{f}_U W^2) dxdy +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\varepsilon^{1/(2p)}}^{1-\varepsilon^{1/(2p)}} t^m \overline{\tau}_i(t) \overline{\nu}_i(t) dt + \sum_{j=1}^{3} \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0, \quad (11)$$

где $c_{j\varepsilon}$ — части упомянутых нормальных кривых, лежащих в области Ω_0;

$$A_s[W] = y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial W}{\partial x} - x^m \frac{dx}{ds} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{dy}{ds} = -\cos(n, x), \quad \frac{dx}{ds} = \cos(n, y),$$

n — внутренняя нормаль к $c_{j\varepsilon}$, $j = 1, 2, 3$.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{3} \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0.$$

Пусть $j = 1$ и кривая $c_{1\varepsilon}$ представлена параметрическими уравнениями

$$p^{-1} x^p = \varepsilon \cos\theta, \quad p^{-1} y^p = \varepsilon \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,$$

тогда из (11) имеем

$$\int_{c_{1\varepsilon}} W A_s[W] ds =$$
$$= \varepsilon \int_0^{\pi/2} W W_x [p\varepsilon \sin\theta]^{2\beta} \cos\theta d\theta + \varepsilon \int_0^{\pi/2} W W_y [p\varepsilon \cos\theta]^{2\beta} \sin\theta d\theta.$$

Отсюда, в силу условий 1), 2) леммы 3 и с учетом $1/8 \leqslant \beta < 1/4$, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_{1\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0, \quad j = 2, 3.$$

Отсюда и из (11), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\iint_{\Omega_0} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \overline{f}_U W^2) dxdy + \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 t^m \overline{\tau}_i(t) \overline{\nu}_i(t) dt = 0. \quad (12)$$

Заметим, что выполнение условий условий 1), 2) леммы 3 доказывается ниже. Лемма 3 доказана. □

С другой стороны, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если $W(x, y)$ — обобщенное решение класса $\mathbf{R_1}$ уравнения (1) в области Ω_1 (Ω_2), обращающееся в нуль на DA (BC), а функция $f_U(x, y, U)$ удовлетворяет условию (6), то имеет место неравенство*

$$\int_0^1 t^m \overline{\tau}_1(t) \overline{\nu}_1(t) dt \geqslant 0 \quad \left(\int_0^1 t^m \overline{\tau}_2(t) \overline{\nu}_2(t) dt \geqslant 0 \right). \quad (13)$$

Лемма 4 доказывается также, как в работе [14], при этом дополнительно учитывается условие (6).

Отсюда, в силу (7) и (13), из (12) получим, что $W(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_0$, откуда и следует единственность решения задачи T. Теорема 1 доказана. □

4. Существование решения задачи T.

Теорема 2. *Если функция $f(x,y,U)$ удовлетворяет условию*

$$f(x,y,U) = (xy)^{2p+1} f_1(x,y,U), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_0, \tag{14}$$

$$f(x,y,U) = (|x|^{2p} - |y|^{2p})|xy|^{\gamma p} f_1(x,y,U), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \ \ \gamma > 2\beta, \tag{15}$$

где функция $f_1(x,y,U)$ имеет непрерывные производные первого порядка в P по всем аргументам и $\max(|f_1|,|f_{1u}|) \leqslant \mathrm{const}$, *то существует по крайней мере одно решение задачи T.*

Доказательство. Сначала рассмотрим линейное уравнение

$$\operatorname{sign} y|y|^m U_{xx} + \operatorname{sign} x|x|^m U_{yy} = f(x,y). \tag{16}$$

Решение задачи Коши—Гурса с граничными условиями

$$\lim_{y\to -0} U_y(x,y) = \nu_1(x), \quad (x,0) \in I_1, \quad U|_{DA} = 0, \quad 2^{-1/p} \leqslant x \leqslant 1$$

$$\Big(\lim_{x\to -0} U_x(x,y) = \nu_2(y), \quad (0,y) \in I_2, \quad U|_{BC} = 0, \quad 2^{-1/p} \leqslant y \leqslant 1\Big)$$

для уравнения (16) в области Δ методом, аналогичным методу из [12, стр. 87], представим в виде

$$U_i(\xi,\eta) = \gamma_3 \int_\eta^1 \frac{\rho_i(t)dt}{(t-\eta)^\beta (t-\xi)^\beta} - \\ - \int_\eta^1 d\eta' \int_\xi^{\eta'} H_i(\xi',\eta') f_i(\xi',\eta') V(1-\eta', 1-\xi'; 1-\eta, 1-\xi) d\xi', \tag{17}$$

где

$$\gamma_3 = 2^{-2/p}\Gamma(\beta)/(p\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)), \quad \rho_i(t) = t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)}), \quad i = 1,2,$$

$V(\xi',\eta';\xi,\eta)$ — функция Римана—Адамара для уравнения (16) при $f(x,y) \equiv 0$ в области Δ и имеет вид [12, стр. 89]:

$$V(\xi',\eta';\xi,\eta) = \begin{cases} (\eta'-\xi')^\beta(\eta-\xi)^{-\beta} F(\beta, 1-\beta; 1; s), & \eta' \geqslant \xi, \\ k((\eta'-\xi')^{2\beta}(\xi-\xi')^{-\beta}(\eta-\eta')^{-\beta} F(\beta,\beta;2\beta;1/s), & \eta' \leqslant \xi, \end{cases}$$

$$k = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}, \qquad s = \frac{(\xi-\xi')(\eta-\eta')}{(\eta'-\xi')(\eta-\xi)},$$

$F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [12, стр. 39].

Положив в (17) $\eta = \xi = x$, имеем

$$\tau_i(x^{1/(2p)}) = \gamma_3 \int_x^1 \frac{\rho_i(t)dt}{(t-x)^{2\beta}} + \overline{L}_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{18}$$

где

$$U(x,0)=\tau_1(x),\ \ (x,0)\in\overline{I}_1;\quad U(0,y)=\tau_2(y),\ \ (0,y)\in\overline{I}_2;$$

$$\overline{L}_i(x)=-k\int_x^1 d\eta\int_x^\eta H_i(\xi,\eta)f_i(\xi,\eta)(\eta-x)^{-\beta}(\xi-x)^{-\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}d\xi,\quad i=1,2.$$

Решение задачи Неймана с граничными условиями $U(x,y)=0,(x,y)\in\sigma_0$,

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial U}{\partial y}=\nu_1(x),\ \ (x,0)\in I_1;\quad \lim_{x\to+0}\frac{\partial U}{\partial x}=\nu_2(y),\ \ (0,y)\in I_2$$

для уравнения (16) в области Ω_0 аналогично [15, стр. 64] представим в виде

$$U(x,y)=-\int_0^1 t^m\nu_1(t)G_2(t,0;x,y)dt-\int_0^1 t^m\nu_2(t)G_2(0,t;x,y)dt-\\-\iint_{\Omega_0} f(\xi,\eta)G_2(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta,\quad (19)$$

где $G_2(\xi,\eta;x,y)$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения (16) при $f(x,y)\equiv 0$ в области Ω_0 и имеет вид [16]:

$$G_2(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)-(r_0^2)^{-2\beta}q_2(\xi,\eta;\overline{x},\overline{y}),$$

где

$$q_2(\xi,\eta;x,y)=\gamma_{02}(r_1^2r_2^2)^{-\beta}F(\beta,\beta;2\beta;1-s),$$

$$\gamma_{02}=4^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)/(\pi\Gamma(2\beta)),\quad 1-s=1-(r_3^2r_4^2)/(r_1^2r_2^2),$$

$$r_{1,2}^2=(\xi^p\mp x^p)^2+(\eta^p\pm y^p)^2,\quad r_{3,4}^2=(\xi^p\pm x^p)^2+(\eta^p\pm y^p)^2,$$

$$r_0^2=x^{2p}+y^{2p},\quad \overline{x}^p=x^p/r_0^2,\quad \overline{y}^p=y^p/r_0^2.$$

Полагая в формуле (19) сначала $y=0$, а затем $x=0$ и заменяя x на $x^{1/(2p)}$, y на $y^{1/(2p)}$, t на $t^{1/(2p)}$ (потом y на x), находим соотношения между $\tau_i(x^{1/(2p)})$ и $\rho_i(x)$, $i=1,2$, принесенные из эллиптической части Ω_0 области Ω:

$$\tau_i(x^{1/(2p)})+\frac{\gamma_{02}}{2p}\int_0^1[|t-x|^{-2\beta}-(1-xt)^{-2\beta}]\rho_i(t)dt+\\+\frac{\gamma_{02}}{2p}\int_0^1[(t+x)^{-2\beta}-(1+xt)^{-2\beta}]\rho_j(t)dt=\\=\overline{M}_i(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad i,j=1,2,\ \ i\neq j,$$

где

$$\overline{M}_1(x)=-\iint_{\Omega_0} f(\xi,\eta)G_2(\xi,\eta;x^{1/(2p)},0)d\xi d\eta,$$

$$\overline{M}_2(x)=-\iint_{\Omega_0} f(\xi,\eta)G_2(\xi,\eta;0,x^{1/(2p)})d\xi d\eta.$$

Исключая функции $\tau_i(x^{1/(2p)})$ из этого соотношения и равенств (18) и применяя оператор $D_{x1}^{1-2\beta}[\,\cdot\,]$ [17, стр. 43] к обеим частям полученного равенства, находим

$$A_i(\rho_i(x)) = \gamma_4 D_{x1}^{1-2\beta}\overline{L}_i(x) + \gamma_4 D_{x1}^{1-2\beta}\overline{M}_i(x) \equiv L_i(x) + M_i(x), \ \ 0 < x < 1, \quad (20)$$

где

$$A_i(\rho_i(x)) = \rho_i(x) - \lambda \int_0^1 \Big[\frac{1-t}{1-x}\Big]^{1-2\beta}\Big(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-tx}\Big)\rho_i(t)dt +$$
$$+ \lambda \int_0^1 \Big[\frac{1-t}{1-x}\Big]^{1-2\beta}\Big(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{1+tx}\Big)\rho_j(t)dt, \quad i,j = 1,2, \ \ i \neq j;$$

$$\lambda = \frac{\cos\beta\pi}{\pi(1+\sin\beta\pi)}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{\gamma_3\Gamma(1-2\beta)(1+\sin\beta\pi)}.$$

Меняя порядок интегрирования в $L_i(x)$, получим

$$L_i(x) = -\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)}\int_x^1 (\eta - x)^{\beta-1}d\eta \int_x^\eta H_i(\xi,\eta) f_i(\xi,\eta)(\eta-\xi)(\xi-x)^{\beta-1}d\xi =$$
$$= -\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)}(1-x)^{1+2\beta}\int_0^1 t^{2\beta}dt \int_0^1 (1-z)z^{\beta-1}H_i(x+(1-x)tz, x+(1-x)t) \times$$
$$\times f_i(x+(1-x)tz, x+(1-x)t)dz, \quad i = 1,2.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое правой части интегрального уравнения (20) и учитывая, что $G_2(\xi,\eta;1,0) = G_2(\xi,\eta;0,1) = 0$, будем иметь

$$M_i(x) = \frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)}\int_x^1 (t-x)^{2\beta-1}\overline{M}'_i(t)dt, \quad i = 1,2.$$

Проводя вычисления аналогично [10], нетрудно убедиться, что функция Грина $G_2(\xi,\eta;x,y)$ и ее производные по x и y допускают следующие оценки:

$$|G_2(\xi,\eta;x,y)| \leqslant C/(r_1^{2\beta}r_2^{2\beta}r_4^{2\varepsilon}), \quad |G_{2x}(\xi,\eta;x,y)| \leqslant C/(r_1^{2\beta}r_4),$$

$$|G_{2y}(\xi,\eta;x,y)| \leqslant C/(r_2^{2\beta}r_4),$$

где C — известная константа, зависящая от заданных функций; ε — достаточно малое положительное число.

Учитывая оценки функции Грина и принимая во внимание условие (14), заключаем, что функции

$$\iint_{\Omega_0} G_{2x}(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad \text{и} \quad \iint_{\Omega_0} G_{2y}(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

ограничены в $\overline{\Omega}_0$. Из теоремы 3.6 [17, стр. 65] следует, что $M_i(x) \in H^{0,2\beta}(0,1)$, $i = 1,2$, а функции $L_i(x)$ в силу условий (15) принадлежат классу $C^1(0,1)$ и, кроме того, $M_i(x) + L_i(x)$, $i = 1,2$, имеют нули порядка 2β при $x = 1$.

Введя обозначения

$$\mu_i(x) = \rho_1(x) \pm \rho_2(x), \quad Q_i(x) = L_1(x) + M_1(x) \pm (L_2(x) + M_2(x))$$

и произведя замену переменных $\tau = 2t^2/(1+t^4)$, $\zeta = 2x^2/(1+x^4)$, перепишем систему (20) в виде

$$m_i(\zeta)\mu_i(\zeta) - \lambda \int_0^1 \frac{m_i(\tau)\mu_i(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau = P_i(\zeta) + R_i(\zeta), \tag{21}$$

где

$$P_i(\zeta) = \mp\lambda m_i(x) \int_0^1 \Big[\frac{1-x}{1-t}\Big]^{2\beta} \frac{1-t^2}{(x+t)(1+xt)} \Big(1 - \Big(\frac{1-t}{1+t}\Big)^{2\beta}\Big)\mu_i(t)dt \equiv$$

$$\equiv m_i(x) \int_0^1 K_i(x,t)\mu_i(t)dt, \quad R_i(\zeta) = m_i(x)Q_i(x), \quad i = 1, 2; \tag{22}$$

$$m_1(x) = \frac{1+x^4}{x(1-x)^{2\beta}}, \quad m_2(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)(1-x)^{2\beta}}.$$

С учетом свойства $M_i(x) + L_i(x)$ из (22) имеем, что $R_i(\zeta) \in H^{0,2\beta}(0,1)$, $i = 1, 2$, $R_1(\zeta)$ имеет особенность порядка $1/2$ при $\zeta \to 0$, а при $\zeta \to 1$ функции $R_i(\zeta)$ ограничены.

Таким образом, задача T для уравнения (16) эквивалентна в смысле разрешимости системе сингулярных интегральных уравнений (21). Так как $1 + \pi^2\lambda^2 \neq 0$, уравнение (21) является интегральным уравнением нормального типа. Кроме того, индекс интегрального уравнения (21) равен нулю в классе $h(1)$, т.е. в классе функций, ограниченных при $\zeta \to 1$ и неограниченных при $\zeta \to 0$.

Регуляризируя уравнение (21) методом Карлемана—Векуа [18, стр. 194], получим

$$\mu_i(x) + \int_0^1 \overline{K}_i(x,t)\mu_i(t)dt = \overline{Q}_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

где $\overline{K}_i(x,t)$ и $\overline{Q}_i(x)$ выражаются через известные функции и допускают оценки

$$|\overline{K}_i(x,t)| \leqslant C_1 x^{\beta-1/2}(1-x)^{2\beta}\big((t+x)^{2\beta-1} + t^{\beta-1/2-\delta_1}\big), \tag{24}$$

$$|\overline{Q}_i(x)| \leqslant C_2 x^{\beta-1/2}(1-x)^{2\beta}, \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

где C_1 и C_2 — известные константы, $0 < \delta_1 < \beta/2$.

Заметим, что уравнение (23) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи T для уравнения (16). Решение уравнения (23) (возвращаясь к старым обозначениям) представим в виде

$$\rho_1(x) = \frac{1}{2}\big(\overline{R}_1(\overline{Q}_1(x)) + \overline{R}_2(\overline{Q}_2(x))\big), \quad \rho_2(x) = \frac{1}{2}\big(\overline{R}_1(\overline{Q}_1(x)) - \overline{R}_2(\overline{Q}_2(x))\big),$$

где
$$\overline{R}_i(\overline{Q}_i(x)) = \overline{Q}_i(x) + \int_0^1 \overline{Q}_i(t)\Gamma_i(x,t)dt,$$
$\Gamma_i(x,t)$ — резольвента ядра $\overline{K}_i(x,t)$, $i=1,2$. На основании (24) и (25) находим, что
$$|\rho_i(x)| \leqslant C_3 x^{-\beta_1}(1-x)^{2\beta}, \quad i=1,2, \tag{26}$$
где C_3 — известная константа, $\beta_1 = \max(1-4\beta, 1/2-\beta)$.

Решение задачи Неймана в области Ω_0 обозначим через $U^+(x,y)$, а решение задачи Коши—Гурса в области Ω_i через $U_i^-(x,y)$, $i=1,2$. Тогда функция
$$U(x,y) = \begin{cases} U^+(x,y), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_0, \\ U_i^-(x,y), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_i,\ i=1,2 \end{cases}$$
является решением задачи T для уравнения (16).

Если считать нелинейную часть уравнения (1) известной, то задача T для этого уравнения вышеизложенным методом сводится к следующей системе:
$$U^+(x,y) \equiv -\int_0^1 t^m\nu_1(t)G_2(t,0;x,y)dt - \int_0^1 t^m\nu_2(t)G_2(0,t;x,y)dt - \\ - \iint_{\Omega_0} f(\xi,\eta,U)G_2(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta, \tag{27}$$
$$U^-(x,y) \equiv U_i(\xi(x,y),\eta(x,y)) = \gamma_3\int_\eta^1 \frac{t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta(t-\xi)^\beta}dt - \\ - \int_\eta^1 d\eta' \int_\xi^{\eta'} H_i(\xi',\eta')f_i(\xi',\eta',U_i)\times \\ \times V(1-\eta',1-\xi';1-\eta,1-\xi)d\xi', \quad i=1,2. \tag{28}$$

Обозначим через $F_0(U)$ и $F_i(U)$, $i=1,2$, интегральные операторы, равные правым частям уравнений (27) и (28), соответственно. Докажем, что $F(U)$ отображает множество $S=\{U(x,y)\in C(\overline{\Omega}), |U|\leqslant C^*\}$ в себя, где
$$F(U) = \begin{cases} F_0(U), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_0, \\ F_i(U), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_i,\ i=1,2, \end{cases}$$
$$U(x,y) = \begin{cases} U^+(x,y), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_0, \\ U_i^-(x,y), & \text{при } (x,y)\in\overline{\Omega}_i,\ i=1,2, \end{cases}$$
C^* — известная константа, зависящая от $\max(|f(x,y,U)|, m, \gamma_{02})$.

Действительно, принимая во внимание $|f_1(x,y,U)|\leqslant M$, находим, что для любых $U(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ интегральный оператор $|F(U)|\leqslant C^*$.

Это верно и для $U(x,y)\in S$. Отсюда вытекает, что множество всех функций $U=F(U)$, $U(x,y)\in S$ равномерно ограничено.

Докажем, что множество функций $F_i(U)$ $i=0,1,2$, равностепенно непрерывно. Из (27) находим

$$|F_0(U(x_1,y_1))-F_0(U(x_2,y_2))|\leqslant J_1+J_2+J_3,$$

$$J_1=\left|\int_0^1 t^m\nu_1(t)(G_2(t,0;x_1,y_1)-G_2(t,0;x_2,y_2))dt\right|, \tag{29}$$

$$J_2=\left|\int_0^1 t^m\nu_2(t)(G_2(0,t;x_1,y_1)-G_2(0,t;x_2,y_2))dt\right|, \tag{30}$$

$$J_3=\left|\iint_{\Omega_0} f(\xi,\eta,U)(G_2(\xi,\eta;x_1,y_1)-G_2(\xi,\eta;x_2,y_2))d\xi d\eta\right|. \tag{31}$$

Из (29) имеем

$$J_1\leqslant\left|\int_0^1 t^m\nu_1(t)(q_2(t,0;x_1,y_1)-q_2(t,0;x_2,y_2))dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^1 t^m\nu_1(t)((r_{01}^2)^{-2\beta}q_2(t,0;\overline{x}_1,\overline{y}_1)-(r_{02}^2)^{-2\beta}q_2(t,0;\overline{x}_2,\overline{y}_2))dt\right|\equiv J_{11}+J_{12},$$

где $r_{0i}^2=x_i^{2p}+y_i^{2p}$, $i=1,2$.

Рассмотрим первое слагаемое J_1. Пусть

$$r_{1i}^2=(t^p\mp x_1^p)^2+y_1^{2p},\quad r_{2i}^2=(t^2\mp x_2^p)^2+y_2^{2p},$$

где при $i=1$ берется верхний знак, а при $i=2$ — нижний. Тогда, учитывая (26) имеем

$$J_{11}=\left|\int_0^1\Big(\frac{t^m\nu_1(t)}{(r_{11}^2r_{12}^2)^\beta}-\frac{t^m\nu_1(t)}{(r_{21}^2r_{22}^2)^\beta}\Big)dt\right|\leqslant\left|\int_0^1\frac{t^m\nu_1(t)}{r_{12}^{2\beta}}\Big(\frac{1}{r_{11}^{2\beta}}-\frac{1}{r_{21}^{2\beta}}\Big)dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^1\frac{t^m\nu_1(t)}{r_{21}^{2\beta}}\Big(\frac{1}{r_{12}^{2\beta}}-\frac{1}{r_{22}^{2\beta}}\Big)dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_4\rho^\beta\int_0^1\frac{t^{p-1}(t^{p\beta}+x_1^{p\beta}+x_2^{p\beta}+y_1^{p\beta}+y_2^{p\beta})}{(r_{11}^2r_{12}^2r_{21}^2)^\beta}dt+$$
$$+C_5\rho^\beta\int_0^1\frac{t^{p-1}(t^{p\beta}+x_1^{p\beta}+x_2^{p\beta}+y_1^{p\beta}+y_2^{p\beta})}{(r_{12}^2r_{21}^2r_{22}^2)^\beta}dt\leqslant C_6\rho^\beta, \tag{32}$$

где $\rho^2=(x_1^p-x_2^p)^2+(y_1^p-y_2^p)^2$, C_6 — известная константа.

Аналогичным образом, с учетом (26), находим

$$|J_{12}|<C_7\rho^\beta, \tag{33}$$

где C_7 — известная константа. В силу (32) и (33) имеем

$$J_1<(C_6+C_7)\rho^\beta. \tag{34}$$

Точно так же из (30), получим

$$J_2 < C_8 \rho^{\beta}, \tag{35}$$

где C_8 — известная константа. Принимая во внимание (34) и (35), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) = [\varepsilon/(2(C_6 + C_7 + C_8))]^{1/\beta}$ такое, что при $\rho < \delta(\varepsilon)$ имеет место

$$J_1 + J_2 < \varepsilon/2. \tag{36}$$

Учитывая оценки функции Грина $G_2(\xi, \eta; x, y)$ и ее производных по x и y, заключаем, что функция

$$\iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U) G_2(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

имеет ограниченные производные по x и y. Отсюда следует, что она удовлетворяет условию Липшица, т.е. из (31) находим

$$\left| \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U)(G_2(\xi, \eta; x_1, y_1) - G_2(\xi, \eta; x_2, y_2)) d\xi d\eta \right| \leqslant$$
$$\leqslant C_9(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = C_9 \rho_1,$$

где C_9 — известная константа.

В этом случае, если $\rho_1 < \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon/(2C_9)$, то

$$J_3 < \varepsilon/2. \tag{37}$$

Таким образом, в силу (36) и (37) находим, что

$$|F_0(U(x_1, y_1)) - F_0(U(x_2, y_2))| < \varepsilon$$

при $\rho^* < \delta^*(\varepsilon)$, где $\rho^* = \max(\rho, \rho_1)$, $\delta^*(\varepsilon) = \min(\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon))$. Используя рассуждения, как и выше, получим

$$|F_i(U(x_1, y_1)) - F_i(U(x_2, y_2))| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и вытекает равностепенная непрерывность рассматриваемого множества $F(U)$, $U(x, y) \in S$. Согласно теореме Арцела [19, стр. 198], операторы $F_i(U)$, $i = 0, 1, 2$, отображают S в себя. Следовательно, согласно принципу Шаудера [19, стр. 401] система интегральных уравнений (27), (28) имеет на S по крайней мере одно решение. Тем самым доказано существование решения задачи T.

Далее, изучим поведение функций $x^{m/2} U_y(x, y)$ и $y^{m/2} U_x(x, y)$ в $\overline{\Omega}_0$. Дифференцируя (19) по y, имеем

$$x^{m/2} U_y^+(x, y) = A_1 + A_2 + A_3, \tag{38}$$

где

$$A_1 = -x^{m/2} \int_0^1 G_{2y}(t, 0; x, y) t^m \nu_1(t) dt,$$

$$A_2 = -x^{m/2}\int_0^1 G_{2y}(0,t;x,y)t^m\nu_2(t)dt,$$

$$A_3 = -x^{m/2}\iint_{\Omega_0} G_{2y}(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta,U)d\xi d\eta.$$

Рассмотрим выражение A_1:

$$A_1 = U_1(x,y)+U_2(x,y)+U_3(x,y)+U_4(x,y),$$

где

$$U_1(x,y) = a(x)\int_0^1 \frac{t^m\nu_1(t)dt}{r_1^{2\beta+2}r_2^{2\beta}}, \quad U_2(x,y) = -a(x)\int_0^1 \frac{t^m\nu_1(t)dt}{r_1^{2\beta}r_2^{2\beta+2}},$$

$$U_3(x,y) = -a(x)\int_0^1 \frac{t^{m+2p}\nu_1(t)dt}{r_{33}^{2\beta+2}r_{44}^{2\beta}}, \quad U_4(x,y) = a(x)\int_0^1 \frac{t^{m+2p}\nu_1(t)dt}{r_{33}^{2\beta}r_{44}^{2\beta+2}},$$

$$a(x) = 2\beta\gamma_0 p y^{2p-1}x^{m/2}, \quad r_{1,2}^2 = (t^p \mp x^p) + y^{2p}, \quad r_{33,44}^2 = (1 \pm t^p x^p)^p + t^{2p}y^{2p}.$$

Справедливы следующие очевидные неравенства:

$$r_0^2 \leqslant r_2^2, \quad x^p \leqslant r_0, \quad t^p y^p \leqslant r_{33}, \quad t^p y^p \leqslant r_{44}. \tag{39}$$

Учитывая (26), находим

$$|U_1(x,y)| \leqslant \text{const}\cdot y^{2p-1}x^{m/2}\int_0^1 \frac{t^{p-1}dt}{r_1^{2\beta+2}r_2^{2\beta}} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\cdot y^{2p-1}\frac{x^{m/2}}{r_0^{2\beta}}\int_0^1 \frac{dt^p}{((t^p-x^p)^2+y^{2p})^{\beta+1}}.$$

Отсюда, заменяя $t^p = x^p + y^p z$, с учетом (39), находим

$$|U_1(x,y)| \leqslant \text{const}\cdot \frac{x^{m/2}y^{3p-1}}{r_0^{2\beta}(y^{2p})^{\beta+1}}\int_{-x^p/y^p}^{(1-x^p)/y^p} \frac{dz}{(1+z^2)^{\beta+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\beta+1}} \leqslant \text{const}. \tag{40}$$

Аналогично, используя (39) для $U_j(x,y)$ получим

$$|U_j(x,y)| \leqslant \text{const}, \quad j = 2,3,4. \tag{41}$$

Точно так же, непосредственными вычислениями для A_j имеем следующую оценку:

$$|A_j| \leqslant \text{const}, \quad j = 2,3. \tag{42}$$

Таким образом, принимая во внимание оценки функции Грина и ее производных, (40), (41), (42), из (38) находим, что

$$|x^{m/2}U_y(x,y)| \leqslant \text{const}.$$

Дифференцируя (27) по x, аналогично, как и выше, имеем

$$|y^{m/2}U_x(x,y)| \leqslant \mathrm{const}.$$

Отсюда следует выполнение условия 1) леммы 3.

Теперь изучим поведение функции $U_{i\xi}(\xi,\eta)$ на $\overline{\Delta}$, $i=1,2$. Пусть

$$U_{i\xi}(\xi,\eta) = A_4 + A_5,$$

где

$$A_4 = \gamma_3\Big(\int_\eta^1 \frac{t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta(t-\xi)^\beta}dt\Big)_\xi,$$

$$A_5 = 4^{-2/p}p^{-2}\int_\eta^1 \frac{(\eta'-\xi)^{\gamma-3\beta}}{(\eta-\xi)^\beta} f_{1i}(\xi,\eta',U_i)d\eta' -$$
$$- 4^{-2/p}p^{-2}\int_\eta^1 d\eta' \int_\xi^{\eta'}(\eta'-\xi')^{\gamma-4\beta}f_{1i}(\xi',\eta',U_i)V_\xi(1-\eta',1-\xi';1-\eta,1-\xi)d\xi'.$$

Так как $t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)}) \in H^{0,2\beta}(0,1]$, $i=1,2$, используя формулы [15, стр. 33], имеем

$$\int_\eta^1 \frac{t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta(t-\xi)^\beta}dt = \nu_i(1)\int_\eta^1 \frac{dt}{(t-\eta)^\beta(t-\xi)^\beta} +$$
$$+ \int_\eta^1 (t-\eta)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\Big[\int_t^1 (s-t)^{\beta-1+\varepsilon}\psi(s)ds\Big]dt.$$

Меняя порядок интегрирования и используя интегральное представление гипергеометрической функции, с учетом $\nu_i(1)=0$, $i=1,2$, получаем

$$\int_\eta^1 \frac{t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta(t-\xi)^\beta}dt = \frac{\Gamma(\beta+\varepsilon)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \int_\eta^1 (s-\eta)^\varepsilon(s-\xi)^{-\beta}F\Big(\beta,\beta+\varepsilon;1+\varepsilon;\frac{s-\eta}{s-\xi}\Big)\psi(s)ds.$$

Отсюда следует, что A_4 существует и допускает оценку

$$|A_4| \leqslant \mathrm{const}\cdot(\eta-\xi)^{-2\beta}. \tag{43}$$

В силу оценки производной функции Римана—Адамара по ξ [12, стр. 121]:

$$|V_\xi(1-\eta',1-\xi';1-\eta,1-\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant |(\eta'-\xi')/((\eta-\xi)^{2\beta}(\eta-\xi')^{1-\beta}|\eta'-\xi|^{1-\beta})|$$

и с учетом условия (15), непосредственными вычислениями получим

$$|A_5| \leqslant \mathrm{const}\cdot(\eta-\xi)^{-\beta}. \tag{44}$$

В силу (43) и (44) получим

$$|U_{i\xi}(\xi,\eta)| \leqslant \text{const}\cdot(\eta-\xi)^{-2\beta}, \quad i=1,2.$$

Дифференцируя (28) по η, аналогично, как и выше, находим

$$|U_{i\eta}(\xi,\eta)| \leqslant \text{const}\cdot(\eta-\xi)^{-2\beta}, \quad i=1,2.$$

Что и требовалось доказать. □

Замечание. Метод, используемый при решении данной краевой задачи T, без принципиальных затруднений применяется для неоднородных граничных условий и когда эллиптическая область Ω_0 ограничена достаточно гладкой кривой σ.

5. Заключение. Заметим, что при исследовании классической разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений смешанного типа с одной линией вырождения, многими авторами применяется в основном метод последовательных приближений. В результате налагается сильное ограничение на размер площади рассматриваемой области или на значение заданных функций. Применение в данной работе принципа Шаудера ослабляет эти ограничения, что позволяет установить глобальную разрешимость краевой задачи T.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Вагапова Э. В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2013. Т. 49, № 1. С. 68–78. EDN: PUAVHB.
2. Сабитов К. Б., Гималтдинова А. А. О единственности решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром с двумя линиями изменения типа // *Диффер. уравн.*, 2014. Т. 50, № 12. С. 1607–1622. EDN: TAJWWH DOI: https://doi.org/10.1134/S037406411412005X.
3. Rassias J. M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations with eight parabolic lines // *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011. vol. 4, no. 2. pp. 186–208. https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/1175.
4. Rassias J. M. The exterior Bitsadze–Lavrentjev problem for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations in a doubly connected domain // *Tbilisi Math. J.*, 2014. vol. 7, no. 2. pp. 111–136. DOI: https://doi.org/10.2478/tmj-2014-0022.
5. Гималтдинова А. А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в специальной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 46–52. EDN: QCJAFH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1173.
6. Гималтдинова А. А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 634–649. EDN: VQDCMP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1384.
7. Гималтдинова А. А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2016. Т. 466, № 1. С. 7–11. EDN: VCPQPZ. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565216010059.

8. Репин О. А., Кумыкова С. К. О задаче с обобщёнными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №1(30). С. 150–158. EDN: QCJAIJ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1141.
9. Вагапов В. З. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, №1. С. 7–19. EDN: ZCCHIT. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1647.
10. Rasulov X. R. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // *Uzbek Math. J.*, 2020. no. 3. pp. 117–125.
11. Rasulov X. R. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 2070, 012002. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2070/1/012002.
12. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Выш. шк., 1977. 159 с.
13. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Салахитдинов М. С., Менгзияев Б. О задачах типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / *Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения*. Ташкент: Фан, 1976. С. 3–16.
15. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.
16. Менгзияев Б. *Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1978.
17. Самко С. Г. Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
18. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968. 512 с.
19. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Физматлит, 2002. 488 с. EDN: SUQZOL.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 1–x
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1914

MSC: 35M12

An analogue of the Tricomi problem for a mixed type of quasilinear equation with two lines of degeneracy

X. R. Rasulov[1,2]

[1] Bukhara Branch of the Institute of Mathematics
named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences
of the Republic of Uzbekistan,
11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

[2] Bukhara State University,
11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

The paper proves the unique solvability of an analog of the Tricomi problem for a quasilinear equation of mixed type with two lines of degeneracy. The class $\mathbf{R_1}$ of generalized solutions in the hyperbolic part of the domain is introduced. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals. The existence of a solution is proved by the method of integral equations. The boundary value problem is reduced to an equivalent system of integral equations, the solvability of which is proved using the Schauder principle. As a result, the application of the Schauder principle resulted in the global solvability of the problem under study without any restrictions on the size of the area of the region under consideration and on the value of the given functions.

Keywords: generalized solution, normal curve, method of integrals energy, integral equation of normal type, index of integral equation, regularization, equicontinuity, Schauder's principle.

Received: 7$^{\text{th}}$ March, 2022 / Revised: 6$^{\text{th}}$ October, 2022 /
Accepted: 28$^{\text{th}}$ October, 2022 / First online: 9$^{\text{th}}$ December, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Rasulov X. R. An analogue of the Tricomi problem for a mixed type of quasilinear equation with two lines of degeneracy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 1–x. EDN: AAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu1914 (In Russian).

Author's Details:
Xaydar R. Rasulov https://orcid.org/0000-0001-8525-4701
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher;
e-mail: xrasulov71@mail.ru

References

1. Sabitov K. B., Vagapova E. V. Dirichlet Problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain, *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 68–78. EDN: RFIKQD. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266113010072.
2. Sabitov K. B., Gimaltdinova A. A. On the uniqueness of the solution of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with complex parameter and with two lines of type change, *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1609–1624. EDN: UFWDQD. DOI: https://doi.org/DOI:10.1134/S0012266114120052.
3. Rassias J. M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations with eight parabolic lines, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 186–208. https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/1175.
4. Rassias J. M. The exterior Bitsadze–Lavrentjev problem for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations in a doubly connected domain, *Tbilisi Math. J.*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 111–136. DOI: https://doi.org/10.2478/tmj-2014-0022.
5. Gimaltdinova A. A. Tricomi problem for a mixed type equation with two lines of type changing in a special area, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 46–52 (In Russian). EDN: QCJAFH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1173.
6. Gimaltdinova A. A. The Dirichlet problem for mixed type equation with two lines of degeneracy in a rectangular area, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 634–649 (In Russian). EDN: VQDCMP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1384.
7. Gimaltdinova A. A. Neumann problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 1–5. EDN: WWATAL. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562416010038.
8. Repin O. A., Kumykova S. K. On the problem with generalized operators of fractional differentiation for mixed type equation with two degeneracy lines, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 150–158 (In Russian). EDN: QCJAIJ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1141.
9. Vagapov V. Z. Dirichlet problem for the mixed type equation with two degeneration lines in a half-strip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 7–19 (In Russian). EDN: ZCCHIT. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1647.
10. Rasulov X. R. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration, *Uzbek Math. J.*, 2020, no. 3, pp. 117–125.
11. Rasulov X. R. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2070, 012002. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2070/1/012002.
12. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Hyperbolic Equations]. Minsk, Vysh. Shk., 1977, 159 pp. (In Russian)
13. Courant R. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1964, 830 pp. (In Russian)
14. Salakhitdinov M. S., Mengziiaev B. On problems of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneracy, In: *Kraevye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii i ikh prilozheniia* [Boundary Value problems for Differential Equations and Their Applications]. Tashkent, Fan, 1976, pp. 3–16 (In Russian).
15. Smirnov M. M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Mixed Type Equations]. Moscow, Nauka, 1970, 296 pp. (In Russian)
16. Mengziyaev B. *Some boundary value problems for equations of mixed type with two lines of degeneracy*, Cand. Disser. (Phys. & Math. Sci.). Tashkent, 1978 (In Russian).
17. Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)

18. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnie integral'nie uravneniya* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968, 512 pp. (In Russian)
19. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 1968, 488 pp. (In Russian). EDN: SUQZOL