ISSN: 2181-1601

ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Хайдар Раупович Расулов
Бухарский Государственный Университет

Собир Журакулович Собиров
Бухарский Государственный Университет

АННОТАЦИЯ

В данной статье изучается единственность и существование решение задачи типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Единственность доказывается методом интегралов энергии. А существование решение задачи доказывается принципом Шаудера.

Ключевые слова: односвязная область, краевые задачи, метод интегралов энергии.

A PROBLEM OF THE TYPE OF HELLERSTEDT PROBLEMS FOR ONE EQUATION OF A MIXED TYPE WITH TWO DEGENERATION LINES

Khaydar Raupovich Rasulov
Bukhara State University

Sobir Dzurakulovich Sobirov
Bukhara State University

ABSTRACT

In this article, we study the uniqueness and existence of a solution to a problem of the Gellerstedt type for one equation of mixed type with two lines of degeneration. The uniqueness is proved by the method of energy integrals. And the existence of a solution to the problem is proved by the Schauder principle.

Keywords: simply connected domain, boundary value problems, method of energy integrals.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа находится в центре внимания специалистов по дифференциальным уравнениям с частными производными, благодаря глубокому математическому содержанию этих задач и наличию многочисленных приложений при исследовании проблем математической физики. Эта теория включает рассмотрение ряда трудных и интересных задач. К их числу относятся краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Отметим, что в последние годы большое внимание уделяется задачам, в которых краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области. Нелокальные задачи и типа задачи Геллерстедта для различных классов дифференциальных уравнений изучали А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинов и их ученики.

Исследования данной работы примыкают с одной стороны к направлениям, связанным с краевыми задачами для уравнений смешанного типа, а с другой - к направлению, связанному с теорией дробного интегро-дифференцирования.

Так, теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, который интенсивно развивается. Такой интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями.

Возникшая в начале 20-ых годов прошлого столетия теория уравнений смешанного типа получила значительное развитие благодаря многочисленным приложениям в газовой динамике, в магнитной гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в теории оболочек, в прогнозировании уровня грунтовых вод и других областях науки и техники.

Подобные граничные условия возникают при изучении вопросов тепло и массообмена в капилляро-пористых средах, математическом моделировании задач газовой динамики, теории плазмы, излучения лазера, при изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде.

В основном эти первые исследования в теории уравнений смешанного типа проводились для модельных уравнений Лаврентьева-Бицадзе, Трикоми и обобщенного уравнения Трикоми. Изучение этих задач имело важное прикладное значение.

В последствии, различные обобщения стали носить чисто теоретический характер. Такие обобщения шли в следующих направлениях: во-первых, усложнение уравнений за счет добавления новых слагаемых, повышения порядка вырождения, образования нелинейности, во-вторых, увеличение количества рассматриваемых уравнений (изучение систем), в-третьих, изменение геометрии области, в-четвертых, замена классических краевых условий новыми, в частности, нелокальными, в-пятых, изучение спектральных задач и т.д.

Однако, до сих пор, несмотря на большое количество работ в этой области, остаются нерешенными в полной мере классические задачи. И особенно ценным в таких условиях является результат, где получены известные факты, но при существенно более слабых ограничениях на коэффициенты, геометрию области, граничные функции [1-5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$|y|^k u_{xx} + sgn(xy)|x|^k u_{yy} + c(x,y)u = 0, \quad k > 0. \qquad (1\ )$$

Пусть D – конечная односвязная область плоскости xy, ограниченная кривой Жордана σ с концами в точках A (1,0) B (0,1), лежащей на первом квадрате $x > 0, y > 0$, и характеристиками

$$BC: (-x)^p + y^p = 1, \qquad CD: x + y = 0\,, \qquad DA: x^p + (-y)^p = 1,$$

уравнение (1), где $2p = k + 2$. Эллиптическую часть области обозначим через D_1, а гиперболические - через D_2 и D_3. Пусть A $(x_0, 0)$ и B $(0, \mathrm{y}_0)$ – произвольные точки отрезков OA и OB соответственно. Под A_0P_1, A_0P_2 и $B_0E_1\,, B_0E_2$ будем понимать характеристики

$$x^p + (-y)^p = x_0,\ x^p - (-y)^p = x_0,$$
$$(-x)^p + y^p = y_0, (-x)^p - y^p = y_0$$

уравнение (1), соединяющие точки

$$\mathrm{A}\ (x_0, 0)\ (0 \le \mathrm{x}_0 \le 1) \text{ и } \mathrm{B}(0, \mathrm{y}_0)\ (0 \le \mathrm{y}_0 \le 1)$$

с точками

$$P_1\left\{\left(\frac{x_0}{2}\right)^{1/p}, -\left(\frac{x_0}{2}\right)^{1/p}\right\},\ P_1\left\{\left(\frac{x_0+1}{2}\right)^{1/p}, -\left(\frac{x_0+1}{2}\right)^{1/p}\right\},$$
$$E_1\left\{\left(\frac{y_0}{2}\right)^{1/p}, -\left(\frac{y_0}{2}\right)^{1/p}\right\},\ P_1\left\{\left(\frac{y_0+1}{2}\right)^{1/p}, -\left(\frac{y_0+1}{2}\right)^{1/p}\right\}.$$

Через D* обозначим область, ограниченную контуром $A\sigma BE_2B_0E_1OP_1 \times A_0P_2A$.

Задача Г. Найти решение уравнение (1) в области D* при $xy \neq 0$, обладающее следующими свойствами

1) $u(x,y) \in C(D^*) \cap\ C^2(D^*)$

2) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0}$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1 в точке O(1,0), $A_0(x_0, 0), B_0(0, y_0)$ и меньше $1/p$ в точках A(1,0), B(0,1);

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_\sigma = \varphi(\xi)(\xi - \text{точка контура } \sigma) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u\big|_{A_0P_1} = \psi_1(x), x\epsilon\overline{I_1};\ u\big|_{A_0P_2} = \psi_2(x), x\epsilon\overline{I_2} \\ u\big|_{B_0E_1} = \psi_3(y), y\epsilon\overline{I_3};\ u\big|_{B_0E_2} = \psi_4(y), y\epsilon\overline{I_4} \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$I_1 = \left(\left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < x < x_0\right), \quad I_2 = \left(x_0 < x < \left(\frac{x_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

$I_3 = \left(\left(\frac{y_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < y < y_0\right), \quad I_4 = \left(y_0 < y < \left(\frac{y_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$

и $\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ заданные функции.

Относительно заданных функций потребуем, чтобы:

а) $\varphi(\xi) = \xi\eta\varphi^*(\xi)$ (ξ и η − координаты точки ξ)

б) $\psi_i \epsilon C(\overline{I_1}) \cap C^3(I_i)$

в) $\psi_i'(t)$при $t \to x_0$ и $t \to y_0 \left(t \to \left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, t \to \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$

могли иметь особенности порядка ниже $1(1/p)$, причем

$\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0), \;\; \psi_3(y_0) = \psi_4(y_0), \;\; i = 1,2,3,4.$

г) $||x|^{2p} - |y|^{2p}|^{-1}|xy|^{-2}c(x,y) \in C^1(\overline{D}_i)$,

$0 \le c(x,y) < \frac{1}{4}k(k+2) \mid xy \mid^{-2} || \, x \mid^{-2p} - \mid y \mid^{-2p}|, (x,y) \in D_i \; (1 = 2,3),$

$0 \le c(x,y), \quad (x,y)\epsilon D_1.$

Примем следующие обозначение:

$$u(x,0) = \tau_1(x), \;\; 0 \le x \le 1; \;\; u(0,y) = \tau_2(y), 0 \le y \le 1;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_2(y), 0 < y < 1; \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu_1(x), 0 < x < 1.$$

Отметим, что задача **Г** для уравнения (1) при $c(x,y) \equiv 0$ исследовано в работе [1].

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Единственность решения задачи **Г** докажем методом интегралов энергии.

В области $D_i(i = 1, 2, 3)$ справидлево тождество

$$|y|^k \frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + sgn(xy)|x|^k \frac{\partial}{\partial x}(uu_y) - |y|^k u_x^2 -$$
$$-sgn(xy)|x|^k u_y^2 + c(x,y)u^2 \equiv 0. \qquad (4)$$

Пусть $D_1^{(\delta,\varepsilon)}$ − подобласть ограниченная простой другой Жордана $\sigma^{(\delta)}$, которая расположена сторога внутри области D_1 и совпадает с другой σ при $\delta \to 0$, и отрезками прямых $x = \varepsilon$, $y = \varepsilon$, и где $\varepsilon -$ сколь угодно малое положительное число. Интегрурия (4) по области $D_1^{(\delta,\varepsilon)}$ и применная формулу Грина, в пределе при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\delta \to 0$ в предположении $\varphi \equiv 0$ получим

$$\int_0^1 x^k \tau_1(x)\, \nu_1(x) dx + \int_0^1 y^k \tau_2(y)\, \nu_2(y) dy +$$

$$+ \iint_{D_1} \left(y^k u_x^2 + x^k u_y^2 + c(x,y)u^2\right) dxdy = 0. \qquad (5)$$

Положив $\psi_1(x) \equiv 0 \; (\psi_3(x) \equiv 0), \psi_2(x) \equiv 0 \; (\psi_4(x) \equiv 0),$ нетрудно установить справедливость неравенств

$$\int_0^{x_0^{1/p}} x^k \tau_i(x) v_i(x) dx \geq 0,$$

$$\int_{x_0^{1/p}}^1 x^k \tau_i(x) v_i(x) dx \geq 0, \qquad i = 1, 2, \tag{6}$$

Из неравенств (6) и равенства (5) непосредственно вытекает единственность решения задачи **Г.**

Существование решения задачи **Г** доказывается сведением ее к системе линейных интегральных уравнений, при этом используются свойства дробного дифференцирования и гипергеометрических функций Гаусса, теория сингулярных интегральных уравнений, а также принцип Шаудера.

Также, заметим, что разные краевые задачи для дифференциальных уравнений были исследованы в работах [7-14]. Изучение задач этого типа требует от исследователей (студентов) наличия знаний, навыков и компетенций, позволяющих самостоятельно обсуждать математические задачи [15-16].

Известно, что гармонический оператор, также известный как лапласиан ∇^2, является дифференциальным оператором. Дискретный гармонический оператор возмущенный одномерным потенциалом, в импульсном представление можно рассматривать как модель Фридрихса в $L_2(T^d)$, где T^d - d-мерный тор. Напомним, что спектр модели Фридрихса и обобщенной модели Фридрихса широко применяются при изучении спектральных свойств модельных операторов, ассоциированный с системой трех частиц на -мерной решетке [17-22] и операторных матриц в обрезанных подпространствах Фока [23-30], соответственно.

REFERENCES

1. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
2. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
3. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения»

Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.
4. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
5. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века, международный научный журнал, 53:6-1 (2019), с.16-18 .
6. Салахитдинов М.С., Менгзияев Б. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения // Ташкент, “Фан”, 1976 г., с.3-16.
7. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
8. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.
9. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
10. Rasulov Kh.R. On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal, 4 (2018), p.126-131.
11. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
12. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.448-454.
13. Расулов Х.Р., Джўракулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.455-462.
14. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
15. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
16. Ахмедов О.С. Метод «диаграммы венна» на уроках математики // Наука, техника и образование, 8: 72 (2020), с.40-43.
17. Bahronov B.I., Rasulov T.H. Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation // European science, 2-2:51 (2020), pp. 15-18.

18. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Threshold eigenvalues and resonances of a Friedrichs model with rank two perturbation // Scientific reports of Bukhara State University, 3 (2020), pp. 31-38.
19. Хайитова Х., Ибодова С. Алгоритм исследования собственных значений модели Фридрихса // Наука, техника и образование, 2-2:77 (2021), с. 48-52.
20. Хайитова Х.Г. О числе собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением // Наука, техника и образование, 8:72 (2020), с. 5-8.
21. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice // European science, 2:51 (2020), pp. 19-22.
22. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form // Academy, 4:55 (2020), pp. 8-13.
23. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра // *ТМФ*, 3:205 (2020), с. 368-390.
24. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Analysis of the spectrum of a 2× 2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 2:11 (2020), pp. 138-144.
25. Muminov M., Rasulov T., Tosheva N. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices // Comm. in Math. Analysis, 1:11 (2019), pp. 17-37.
26. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Связь между числовым образом и спектром модели Фридрихса с двумерным возмущением // Молодой ученый, 9 (2015), с. 20-23.
27. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. Явный вид резольвенты обобщенной модели Фридрихса // Наука, техника и образование, 2-2:77 (2021), с. 39-43.
28. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Исследование числовой области значений одной операторной матрицы // Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки., 35:2 (2014), с. 50–63.
29. Rasulov T.H., Tosheva N.A. Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 5:10 (2019), pp. 511-519.
30. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Связь между числовым образом и спектром модели Фридрихса с двумерным возмущением // Молодой ученый, 9 (2015), с. 20-23.