SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842

VOLUME 4, ISSUE 5

MAY 2023

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 4, ISSUE 5

MAY 2023

2021
IMPACT FACTOR
3.848
SJIFactor

www.openscience.uz

SCIENCE AND EDUCATION
SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 4 ISSUE 5

TABLE OF CONTENTS / MUNDARIJA

EXACT SCIENCES / ANIQ FANLAR

NATURAL SCIENCES / TABIIY FANLAR

Hardi tengsizligi va uning parametrining baholanishi

Gulrux Rustam qizi Sayliyeva
Maftuna Madiyor qizi Nurilloyeva
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada Hardi tengsizligi, Hardi tengsizligi haqida dastlabki tushunchalar, Hardi tengsizligi tadbig‘iga oid dastlabki masalalar, bugunga qadar ilmiy-izlanishlar natijasi keltirilgan. Shu bilan bir qatorda Hardi tengsizligining parametri uchunmuhim baholashlar keltirib chiqarilgan.

Kalit so‘zlar: Hardi tengsizligi, diskret Hardi operatori, Gurka masalasi, oddiy differensial tenglama, Hardi tengsizligi parametri

Hardy's inequality and estimation of its parameters

Gulrux Rustam qizi Sayliyeva
Maftuna Madiyor qizi Nurilloyeva
Bukhara State University

Abstract: This article presents Hardy's inequality, initial concepts of Hardy's inequality, initial issues related to the application of Hardy's inequality, and the results of scientific research until today. In addition, important estimates for the parameter of Hardy's inequality are derived.

Keywords: Hardy inequality, discrete Hardy operator, Gurka problem, ordinary differential equation, Hardy inequality parameter

Ushbu maqolada Hardi tengsizligi, Diskret Hardi operatori, ularning qo‘llanilish sohalari o‘rganilgan. Diskret Hardi operatorini o‘rganishimiz uchun avvalo uni funksional va garmonik tahlil qilishimiz kerak bo‘ladi. Xususan so‘nggi yillarda Hardi tengsizligini o‘rganish bo‘yicha ko‘pgina yutuqlarga erishildi. Diskret Hardi operatori mavzusi shular jumlasidandir [1-12]. Ushbu borada bugungi kungacha o‘rganilgan bir nechta masalalarni ko‘rib chiqamiz va tahlil qilamiz. Hardi tengsizligidan foydalangan holda turli sohalar, xususan chiziqli integral tenglamalar, operatorlar nazariyasi, operatorlarni chiziqli va chegaralanganlikka tekshirishda [4-6] muhim natijalarga erishilgan. Dastlabki qo‘yilgan masalalardan biri, bu bir o‘lchovli Hardi tipidagi tengsizlikning haqiqiyligi va uning oddiy differensial tenglamaning yechilishi orasidagi bog‘liqliqlikni ifodalovchi Gurka masalasi hisoblanadi. Gurkaning natijalari Bisak, Kafner va Tribel Mukenhaptlarning ko‘pgina ishalariga asoslangan edi [13-18].

Gurka o‘zining ilmiy izlanishlari natijasida olgan natijasini ifodalash uchun zarur bo‘lgan tushunchalarni kiritamiz:

$v(x)$ funksiyani $\forall x \epsilon (0, a)$ nuqtada birinchi tartibli hosilasi mavjud deb faraz qilib, $v(x)$ uchun ushbu munosabat o‘rinli bo‘lsin

$$\int_0^{\varepsilon} v^{1-p^*}(x)dx < +\infty \quad (2)$$

(1) munosabatda $\varepsilon \epsilon (0, a)$ bo‘lib, bu yerda p^*, p ning konjugant soni hisoblanib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

$\gamma > 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi $y(x)$ yechimga ega ushbu tenglama berilgan bo‘lsin:

$$\gamma \frac{d}{dx}\left[v^{\frac{q}{p}}(x)(v'(x))^{\frac{q}{p^*}}\right] + u(x)y^{\frac{q}{p^*}}(x) = 0 \ (3)$$

(3) tenglamada $u(x)$ lokal uzluksiz hamda birinchi tartibli hosilaga ega funksiya bo‘lib, (3) tenglama uchun quyidagi munosabatlar bajarilsin.

$$y(x) > 0, y'(x) > 0 \ (0 < x < a).$$

Agar doimiy uzluksiz bo‘lgan $C_0 > 0$ soni va $(0, a)$ oraliqda mutlaqo uzluksiz bo‘lgan $f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = 0$ tenglik o’rinli bo’lladigan barcha $f(x)$ funksiyalar olinganda tengsizlikning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\left(\int_0^a |f(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 \left(\int_0^a |f'(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \ (4)$$

Bu shart bir o‘lchovli uzluksiz Hardi tipidagi tengsizlikning haqiqiyligi uchun zaruriy va yetarlilik sharti hisoblanadi. Biroq, Gurka o‘z natijasi bo‘lmish (4) munosabatdagi C_0 ning optimal uzliuksiz ekanligini isbotlay olmadi. Gurkaning g‘oyasi va (4) dan foydalanib, Gussoub va Moradifanlar n o‘lchovli tengsizlikning haqiqiyligi uchun shartlarni keltirib chiqardilar. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki bu shartlar faqat $p = q = 2$ bo‘lgandagina o‘rinli edi [19-23]. Bu shartlarning asosiy natijasi quyidagi teooremaga olib keladi. $B_R\{x\}$ belgilash orqali markazi $x \epsilon R^n$ nuqtada bo‘lgan R radiusli $(0 < R \leq +\infty)$, R^n da $(n \geq 1)$ aniqlangan aylana chizig’ini ifodalaymiz.

Teorema 1. Ixtiyoriy musbat radial V va W funksiyalar , C^1 fazoda $B_R\{0\}$ bo‘yicha aniqlangan bo‘lsin

Faraz qilaylik,

$$\int_0^a \frac{1}{r^{n-1}V(r)}dr = +\infty, \int_0^a \frac{1}{r^{n-1}V(r)}dr \leq \infty \ => \ 0 < a < R.$$

Munosabatlar bajarilib, ushbu oddiy differensial tenglama:

$$y''(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)}\right)y'(r) + \frac{W(r)}{V(r)}y(r) = 0 \ (5)$$

$[0, R]$ oraliqda musbat aniqlangan bo‘lsin (ba’zan y(R)=0 bo‘lishi ham mumkin), u holda $y(x)$ funksiya uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_{B_k} W(x)u^2(x)dx \ \leq \int_{B_k} V(x)|\nabla u(x)|^2 dx \ (6)$$

Barcha $u \in C_0^\infty(B_R)$ ga tegishli bo’lgan nuqtalarda o’rinli.

Endi keyingi misolni ko‘raylik. Ikkinchi misol Hardi tipidagi tengsizlikda optimal o‘zgarmaslarga erishgan har qanday funksiya xususiy bo‘lmagan qiymat tenglamasini qanoatlantirishini isbotlashdir. Buni ko‘rib chiqish uchun bir marta uni eng yuqori chegarasi:

$$\sup\left\{\frac{\left(\int_0^1|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^1|u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} : u \in L^2(0,1), u' \in L^2(0,1), u(0) = u(1) = 0\right\} \ (7)$$

Bunda $u(x)$ quyidagi yechimlarga ega bo’ladi:

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + lu^{q-1} = 0 \\ u(0) = u(1) = 0, u \geq 0 \end{cases} (8)$$

(8) tenglikda l Lagranj ko‘paytmasi bilan berilgan Lagranj soni bo‘lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$l = \frac{\int_0^1|u(x)|^p dx}{\int_0^1|u(x)|^q dx}$$

Ko‘rinib turibdiki, $u(x) = 1$ va $v(x) = 1$ bo‘lganda (0,1) bir o‘lchamli Hardi tipidagi tengsizlikning (4) optimal o‘zgarmaslarga mos keladi. Buning asosiy g‘oyasi va olingan natija Johan Bernulliga tegishli bo‘lib hisoblanadi.

So‘nggi o‘n yillikda Hardi tipidagi tengsizliklarni qo‘llash yanada kengaydi. Ehtimollar nazariyasi ayniqsa stoxastik jarayonlarning turli barqarorlik tezligini o‘rganishda, masalan Chenning bir qator tadqiqiotlarida bu o‘z aksini yaqqol topdi.

Uzluksiz holatdan farqli ravishda, bu maqolada Hardi tipidagi tengsizliklarning optimal parametri tahliliga qaratilgan.

Bizga berilgan ikki parametr p va q lar uchun $1 < p \leq q < \infty$ munosabat hamda musbat va diskret $[1, N] \coloneqq \{1, 2, 3, \dots, N\}$ oraliqda aniqlangan (bu yerda

$N < +\infty$ deb olingan) u va v funksiyalar uchun yozilgan ushbu tengsizlik:

$$\left[\sum_{n=1}^{N} u_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq A\left(\sum_{n=1}^{N} v^n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

Yuqoridagi tengsizlikka Hardi tipidagi tengsizlik deyiladi. Bu yerda x_n $[1,N] \coloneqq \{1,2,3,\dots,N\}$ oraliqda aniqlangan va manfiy bo‘lmagan ketma-ketlikdir. Tengsizlik to‘la o‘rinli bo‘lishi uchun A parametr optimal deb qabul qilinadi.

Ushbu maqolada biz optimal o‘zgarmaslarning bir necha variatsion formulalarini berib, variatsion formulalarning asosiy qo‘llanilish sohalari, taqribiy protsedurasi va asosiy hisob-kitobalarini ko‘rib chiqamiz.

Teorema 2. Hardi tipiga mansub (9) tengsizlikdagi A parametr uchun ushbu baholashlar o‘rinlidir. Yuqoridan baholash:

$$A \leq \inf_{x\in A[1,N]} \left(\sup_{n\in[1,N]} II_n^*(x)\right)^{\frac{1}{p^*}} = \inf_{x\in A[1,N]} \left(\sup_{n\in[1,N]} I_n^*(x)\right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (10)$$

Quyidan baholash:

$$A \geq \sup_{x\in A[1,N]} \|x\|_{l^p(v)}^{\frac{p}{q}-1} \left(\inf_{n\in[1,N]} II_n(x)\right)^{\frac{p-1}{q}} \geq \sup_{x\in A[1,N]} \|x\|_{l^p(v)}^{\frac{p}{q}-1} \left(\inf_{n\in[1,N]} I_n(x)\right)^{\frac{p-1}{q}}$$

Ushbu teoremani N ning chekli oraliqqa tegishli bo‘lgan holatdagi isbotini Bennet o‘z ilmiy-izlanishlarida asoslab bergan. Biz Hardi tengsizligi va oddiy differensial tenglamaning yechilish masalasi orasidagi bog`lanishni ushbu lemma orqali ifodalaymiz. Faraz qilaylik

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n < \infty \ (11)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsin. $y_n \geq 0$, $n\in[1,N]$, Hardi tipidagi tengsizlik har bir manfiy bo‘lmagan x ketma-ketlik uchun o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari optimal parametr A$\leq \lambda^{\frac{1}{q}}$ tengsizlik ham o’rinlidir.

Lemma 1. Agar (11) qatorning yig‘indisi chekli musbat son bo‘lsa u holda (2) differensial tenglama quyidagi ko’rinishni oladi:

$$u_n\big(Hy(n)\big)^{\frac{q}{p^*}} + \lambda\left(v_{n+1}^{\frac{q}{p}} y_{n+1}^{\frac{q}{p^*}} - v_n^{\frac{q}{p}} y_n^{\frac{q}{p^*}}\right) = 0 \ (12)$$

Isbot. Qulaylik uchun , biz x ni

$$\sum_{n=1}^{N} v_n x_p^n < \infty$$

deb olamiz. Bizda y (12) tenglikni qanoatlantiruvchi $y_n \geq 0$ yechim bo’lsin, aniqlik kiritish uchun ushbu belgilashni qaraylik:

$$F_n = -\lambda\left(v_{n+1}^{\frac{q}{p}} y_{n+1}^{\frac{q}{p^*}} - v_n^{\frac{q}{p}} y_n^{\frac{q}{p^*}}\right),$$

$$G_n = x_p^n y_n^{-\frac{q}{p^*}}$$

(12) tenglikka binoan

$$F_n = u_n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{q}{p^*}} \quad (13)$$

Hyolder tengsizligini qo‘llah orqali biz quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz:

$$u_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^q = u_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^{\frac{1}{p^*}} y_i^{-\frac{1}{p^*}}\right)^q \le u_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p y_i^{-\frac{p}{p^*}}\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{q}{p^*}}$$

$$= F_n\left(\sum_{i=1}^{n} G_i\right)^{\frac{q}{p}}. (14)$$

Bu yerda $r = \frac{q}{p}$ deb belgilash kiritish orqali $\frac{1}{r}$ ga bog‘liq Hyolder- Minkovskiy tengsizligi hosil bo’ladi.

$$\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\big(Hx(n)\big)^q\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{n=1}^{N} F_n\left(\sum_{i=1}^{n} G_i\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \sum_{n=1}^{N} G_n\left(\sum_{i=n}^{N} F_i\right)^{\frac{1}{r}}.$$

F_n ning ta’rifiga ko‘ra biz quyidagini yoza olamiz:

$$\sum_{i=n}^{N} F_i = -\lambda\left(v_{N+1}^{\frac{q}{p}} y_{N+1}^{\frac{q}{p^*}} - v_n^{\frac{q}{p}} y_n^{\frac{q}{p^*}}\right) \le \lambda v_n^{\frac{q}{p}} y_n^{\frac{q}{p^*}}.$$

Shunday qilib biz quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\big(Hx(n)\big)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \lambda^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{N} G_n v_n y_n^{\frac{p}{p^*}}.\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bu (9) tengsizlikning $\lambda^{\frac{1}{q}}$ parametr orqali hosil qilingan shaklidir. ko‘rinib turibdiki, bu yerda A≤ $\lambda^{\frac{1}{q}}$. Lemma isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Zhong -Wei liao, Discrete Hardy-type Inequalities, Advanced Nonlinear Studies June 2014, Advanced Nonlinear Studies 15 (2015), 805–834.

2. P. R. Beesack, Hardy’s inequality and its extensions, Pacific. J. Math. XI (1961).

3. G. Bennett, Some elementary inequalities III, Quart. J. Math. Oxford (2). 42 (1991), 149–174.

4. T. Rasulov, N. Tosheva, Main property of regularized Fredholm determinant corresponding to a family of 3×3 operator matrices. European science. 2.(51) 2020, pp. 11-14.

5. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2020). Analysis of the spectrum of a 2x2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 2(11), 138-144.

6. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. (2021). Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining rezolventasi. Scientific progress. 2:2, 580-586.

7. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики, Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.

8. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.

9. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. Молодой учёный. № 9, С. 17-20.

10. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. (2021). Икки каналли молекуляр-резонанс модели хос қийматларининг мавжудлиги. Scientific progress. 2:1, 111-120.

11. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices.

12. Латипов Ҳ.М., Ҳайитова М.А. (2021). Компакт тўпламда узлуксиз функция хоссалари ёрдамида ечиладиган айрим масалалар. Scientific progress. 2:3, 77-85-betlar.

13. Сайлиева Г.Р. (2021). Использование новых педагогических технологий в обучении «Аналитическая геометрия». Вестник науки и образования. 68-71.

14. Г.Р Сайлиева, Использование метода «математический рынок» в организации практических занятий по «дискретной математике», Проблемы педагогики. 53(2), 27-30.

15. Sayliyeva G.R., Diskret matematika va matematik mantiq fanining «predikatlar mantig'i» bobi mavzularini tushuntirishda samarali yondashuv va undagi zamonaviy usul va metodlar, scientific progress. 2:1, 552-558.

16. Sayliyeva G.R., Sharipova S.A. (2022). Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanida «Daraxt ko'rki» va «Talaba hayoti va ehtimolliklar». Образование и наука в XXI веке. Центр научных публикаций (buxdu. uz). 8 (8), 25(4), 1493-1502.

17. Sayliyeva G., Sharipov I. Kompleks sonlar'' mavzusini o'qitishda'' bumerang'' texnologiyasi, Образование и наука в XXI веке. 25(4).

18. Сайлиева Г.Р. (2022), Использование метода «Определения, теоремы, дока-зательства, формулы, примера». Образование и наука в XXI веке, Центр научных публикаций (buxdu. uz). 8 (8), 25(4), 1569-1579 с.

19. Sayliyeva G.R., Yahyoyeva Sh.M. (2022). Interfaol usullarni qo‘llab funksiyaning differensiali va uni taqribiy hisoblashga doir misollar yechish. Образование и наука в XXI веке. Центр научных публикаций (buxdu. uz) 8 (8). 25(4), 1580-1590.

20. Sayliyeva G.R., Использование метода «определения, теоремы, доказательства, формулы, примера» на предмет теория вероятностей и математической статистике, Образование и наука в XXI веке. научных публикаций Центр научных публикаций (buxdu. uz) 8 (8). 25(4), 1474-1484.

21. Sayliyeva G., Salimov F. ko'phaddagi hadlar soni va koeffitsiyentini aniqlashda " Zinama-zina" va" Charxpalak" metodlaridan foydalanish, Образование и наука в XXI веке. Центр научных публикаций (buxdu. uz) 8 (8). 25(4),1484-1493.

22. Sayliyeva G. Diskret matematika va matematik mantiq fanining amaliyot darslarida o`tilgan mavzuni mustahkamlashda “G`oyaviy charxpalak”, “Charxpalak” texnologiyasi va “Assotsatsiyalar” metodlaridan foydalanish, Pedagogik mahorat, Центр научных публикаций (buxdu. uz). 8 (8),

23. Sayliyeva G.R., Diskret matematika va matematik mantiq fanida bul funksiyalarni jegalkin ko’phadlariga yoyish mavzusini mustahkamlashda «matematik domino» metodidan foydalanish, Scientific progress, 2(2), 2021, 773-780.