Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, № 7, с. 66–70 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Б.ДЖ. МАМУРОВ

ВЫПУКЛАЯ КОМБИНАЦИЯ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА $2D$-СИМПЛЕКСЕ

Аннотация. В данной статье рассматривается квадратичный оператор на двумерном симплексе, являющийся выпуклой комбинацией двух квадратичных стохастических операторов. Доказано, что центр симплекса является единственной неподвижной точкой оператора, и эта неподвижная точка является притягивающей.

Ключевые слова: симплекс, квадратичный стохастический оператор, выпуклая комбинация, неподвижная точка.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-7-66-70

Введение

Изучение развития состояния системы является основной задачей теории динамических систем. Нелинейные операторы используются для решения проблем, возникающих в математической генетике, физике и химии. Решение ряда прикладных задач ведет к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов, являющихся наипростейшими нелинейными стохастическими операторами.

Квадратичные стохастические операторы были впервые введены С. Бернстайном [1]. Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов из различных областей математики и ее приложений (см., например, [2]–[6]). Напомним определения и обозначения, следуя работе [2].

Пусть $= \{1, 2, \dots, n\}$. Множество

$$S^{n-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

называется $(n-1)$-мерным симплексом. Каждый элемент $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E и может быть интерпретирован как состояние биологической (физической и т. д.) системы, состоящей из n элементов.

Квадратичный стохастический оператор $V : S^{n-1} \to S^{n-1}$ имеет вид

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j,$$

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

где

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1, \quad i,j,k = 1,\dots,n.$$

Определение 1. Точка $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ называется неподвижной точкой квадратичного стохастического оператора V, если $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Определение 2 ([7])**.** Неподвижная точка $\mathbf{x}^*$ называется гиперболической, если якобиан $DV(\mathbf{x}^*)$ не имеет собственных значений на единичной окружности.

Определение 3 ([7])**.** Гиперболическая неподвижная точка $\mathbf{x}^*$ называется

i) *притягивающей*, если все собственные значения якобиана $DV(\mathbf{x}^*)$ по модулю меньше единицы;
ii) *отталкивающей*, если все собственные значения якобиана $DV(\mathbf{x}^*)$ по модулю больше единицы;
iii) *седловой*, в противном случае.

В работах [8], [9] изучалась динамика двух квадратичных стохастических операторов V_0 и V_1 на S^2. В данной статье мы исследуем динамические свойства квадратичного стохастического оператора, являющегося выпуклой комбинацией V_0 и V_1.

1. Выпуклая комбинация квадратичных стохастических операторов

В работе [8] был рассмотрен оператор $V_0 : S^2 \to S^2$, где $V_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$ и

$$x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \;\; x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \;\; x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Показано, что оператор V_0 обладает четырьмя неподвижными точками $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$, $M_3(0,0,1)$, $C(1/3,1/3,1/3)$, где центр C — отталкивающая точка, а M_1, M_2, M_3 — седловые точки.

В работе [9] автором изучался оператор

$$V_1 : \begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{3}x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x^2{}_3 + 2x_1x_2, \\[2mm] x_2' = \dfrac{1}{3}x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x_3^2 + 2x_2x_3, \\[2mm] x_3' = \dfrac{1}{3}x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases}$$

Доказана следующая

Теорема 1 ([9])**.** *Для оператора V_1 выполняются следующие утверждения*:

i) *центр $C = (1/3, 1/3, 1/3)$ является единственной неподвижной точкой*;
ii) *центр C является притягивающей точкой*;
iii) *для любой начальной точки $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ траектория $\mathbf{x}^{(n)}$ стремится к центру.*

Выпуклая комбинация $V_\lambda : S^2 \to S^2$ операторов V_0 и V_1 определяется формулой

$$V_\lambda = (1-\lambda)V_0 + \lambda V_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Ясно, что квадратичный оператор V_λ имеет вид

$$V_\lambda: \begin{cases} x_1' = \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) x_1^2 + \frac{\lambda}{3} x_2^2 + \frac{\lambda}{3} x_3^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = \frac{\lambda}{3} x_1^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) x_2^2 + \frac{\lambda}{3} x_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = \frac{\lambda}{3} x_1^2 + \frac{\lambda}{3} x_2^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, что V_λ также является квадратичным стохастическим оператором, отображающим S^2 в себя. Найдем теперь неподвижные точки оператора V_λ.
Из (1) следует

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (1-\lambda)\big(x_1^2 - x_2^2\big) + 2x_2(x_1 - x_3), \\ x_2 - x_3 &= (1-\lambda)\big(x_2^2 - x_3^2\big) + 2x_3(x_2 - x_1), \\ x_3 - x_1 &= (1-\lambda)\big(x_3^2 - x_1^2\big) + 2x_1(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)(1 - (1-\lambda)(x_2 + x_1)) &= 2x_2(x_1 - x_3), \\ (x_2 - x_3)(1 - (1-\lambda)(x_3 - x_2)) &= 2x_3(x_2 - x_1), \\ (x_3 - x_1)(1 - (1-\lambda)(x_3 - x_1)) &= 2x_1(x_3 - x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что $x_1 \le x_2 \le x_3$, тогда из системы (2) получаем $x_1 = x_2 = x_3$. Поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, имеем $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$. Остальные случаи могут быть рассмотрены схожим образом. Отсюда видно, что центр $C = (1/3, 1/3, 1/3)$ является единственной неподвижной точкой оператора V_λ.

Определим теперь тип неподвижной точки C. Чтобы выяснить тип неподвижной точки оператора V_λ, запишем систему (1) с учетом равенства $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1' &= \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x_1^2 + 2\frac{\lambda}{3} x_2^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) x_1x_2 - 2\frac{\lambda}{3} x_1 - 2\frac{\lambda}{3} x_2 + \frac{\lambda}{3}, \\ x_2' &= 2\frac{\lambda}{3} x_1^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) x_2^2 + 2\left(\frac{\lambda}{3} - 1\right) x_1x_2 - 2\frac{\lambda}{3} x_1 + 2\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x_2 + \frac{\lambda}{3}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(x_1, x_2) \in \big\{(x, y): \ x, y \ge 0, \ 0 \le x + y \le 1\big\}$, а $x_1, \ x_2$ — две первые координаты точки, лежащей в S^2.

Из системы (3) получаем

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x_1 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) x_2 - \frac{2\lambda}{3}, \qquad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = \frac{4\lambda}{3} x_2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) x_1 - \frac{2\lambda}{3},$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = \frac{4\lambda}{3} x_1 + 2\left(\frac{\lambda}{3} - 1\right) x_2 - \frac{2\lambda}{3}, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) x_2 + 2\left(\frac{\lambda}{3} - 1\right) x_1 + 2\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right).$$

В точке $C = (1/3, 1/3, 1/3)$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}(C) = \frac{4}{9} - \frac{2\lambda}{3}, \qquad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}(C) = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}(C) = -\frac{2}{3}, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}(C) = \frac{2}{3} - \frac{2\lambda}{3}.$$

Таким образом, матрица Якоби оператора (3) имеет вид

$$J_C = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{2\lambda}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2\lambda}{3}, \end{pmatrix},$$

$\det(J_C - \mu E) = 0$ имеет два комплексных собственных значения:

$$\mu_1 = -\frac{2}{3}\lambda + \frac{5}{9} - \frac{\sqrt{35}}{9}i, \quad \mu_2 = -\frac{2}{3}\lambda + \frac{5}{9} + \frac{\sqrt{35}}{9}i,$$

$$|\mu_{1,2}| = \sqrt{\Big(-\frac{2}{3}\lambda + \frac{5}{9}\Big)^2 + \frac{35}{81}} = \frac{2}{9}\sqrt{9\lambda^2 - 15\lambda + 15}.$$

Рассмотрим уравнение $\frac{2}{9}\sqrt{9\lambda^2 - 15\lambda + 15} = 1$. Это уравнение эквивалентно уравнению $12\lambda^2 - 20\lambda - 7 = 0$, которое имеет два решения $\lambda_{1,2} = (5 \pm \sqrt{46})/6$. Легко увидеть, что $\lambda_{1,2} \notin [0,1]$.

Рассмотрим теперь неравенство

$$\frac{2}{9}\sqrt{9\lambda^2 - 15\lambda + 15} < 1 \quad \Rightarrow \quad 12\lambda^2 - 20\lambda - 7 < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5 - \sqrt{46}}{6} < \lambda < \frac{5 + \sqrt{46}}{6}.$$

Отсюда видно, что $|\mu_{1,2}| < 1$ для всех $\lambda \in [0,1]$.

Аналогично можно показать, что неравенство $|\mu_{1,2}| > 1$ не имеет решений на отрезке $[0,1]$.

Нами доказана

Теорема 2. *Для оператора V_λ выполняются следующие утверждения*:

i) *квадратичный стохастический оператор V_λ имеет единственную неподвижную точку $C = (1/3, 1/3, 1/3)$;*

ii) *неподвижная точка C является притягивающей точкой при любом $\lambda \in [0,1]$.*

Автор благодарит рецензента за ценные предложения, существенно улучшившие содержание этой статьи.

Литература

[1] Bernstein S. *Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity*, Ann. Math. Stat. **13** (1), 53–61 (1942).

[2] Розиков У.А., Жамилов У.У. *F-квадратичные стохастические операторы*, Матем. заметки **83** (4), 606–612 (2008).

[3] Жамилов У.У., Розиков У.А. *О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе*, Матем. сб. **200** (9), 81–94 (2009).

[4] Mamurov B.J., Rozikov U.A. *On cubic stochastic operators and processes*, J. Phys.: Conf. Ser. **697** (1), 012017 (2016).

[5] Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. *Quadratic stochastic processes of type* $(\sigma|\mu)$, Markov Processes Relat. Fields **26**, 915–933 (2020).

[6] Lyubich Y.I. *Mathematical structures in population genetics,* Biomathematics, Vol. 22 (Springer, Berlin, 1992).

[7] Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems* (Westview Press, Boulder, Studies in Nonlinearity, 2003).

[8] Валландер С. *О предельном поведении последовательностей итераций некоторых квадратичных преобразований*, Докл. Академии наук **202** (3), 515–517 (1972).

[9] Mamurov B.J. *Regularity of a non-Volterra quadratic stochastic operator on the $2D$ simplex*, Ilm sarchashmalari **11**, 29–31 (2022).

Бобохон Джураевич Мамуров

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 705018, Республика Узбекистан,

`e-mail:` bmamurov.51@mail.ru

B.J. Mamurov

A convex combination of two quadratic stochastic operators acting in the $2D$-simplex

Abstract. In this paper, we consider a quadratic operator on the two-dimensional simplex, which is a convex combination of two quadratic stochastic operators. It is proved that the center of the simplex is a unique fixed point of the operator and this fixed point is an attracting point.

Keywords: Simplex, quadratic stochastic operators, convex combinations, fixed point.

Bobohon Juraevich Mamurov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 705018 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` bmamurov.51@mail.ru