Наука, техника и образование

2021. № 2 (77). Часть 2

Москва
2021

Содержание

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ **5**

Шарипов М.З., Файзиев Ш.Ш., Низомова Ш.К. ОСОБЕННОСТИ МАГНИТООПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛА БОРАТА ЖЕЛЕЗА / *Sharipov M.Z., Fayziev Sh.Sh., Nizomova Sh.K.* FEATURES OF MAGNETO-OPTICAL PROPERTIES OF IRON BORATE SINGLE CRYSTAL 5

Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О ТИПАХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА / *Mamurov B.Zh., Sohibov D.B.* ON TYPES OF FIXED POINTS OF A SINGLE SQUARE STOCHASTIC OPERATOR 10

Кодиров Ж.Р., Мавлонов У.М., Хакимова С.Ш. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНЦЕНТРАТОРОВ / *Kodirov Zh.R., Mavlonov U.M., Khakimova S.Sh.* ANALYTICAL REVIEW OF CHARACTERISTICS OF PARABOLIC AND PARABOLOCYLINDRICAL HUBS 15

Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ / *Rasulov H.R., Dzhurakulova F.M.* ONE DYNAMIC SYSTEM WITH CONTINUOUS TIME 19

Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О НЕКОТОРЫХ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ ДВУПОЛОЙ ПОПУЛЯЦИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ / *Rasulov H.R., Yashiyeva F.Yu.* ABOUT SOME WOLTERRIAN SQUARE STOCHASTIC OPERATORS OF TWO-SEXAND POPULATION WITH CONTINUOUS TIME 23

Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. ОБ АНАЛИЗЕ НЕКОТОРЫХ НЕВОЛЬТЕРРОВСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ / *Rasulov H.R., Kamariddinova Sh.R.* ON ANALYSIS OF SOME NON-VOLTERRIAN DYNAMIC SYSTEMS WITH CONTINUOUS TIME 27

Бахронов Б.И., Холмуродов Б.Б. ИЗУЧЕНИЕ СПЕКТРА ОДНОЙ 3X3-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ С ДИСКРЕТНЫМ ПАРАМЕТРОМ / *Bahronov B.I., Kholmurodov B.B.* INVESTIGATION OF THE SPECTRUM OF A 3X3 OPERATOR MATRIX WITH DISCRETE VARIABLE 31

Бахронов Б.И., Мансуров Т.З. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА В СИСТЕМЕ MAPLE / *Bahronov B.I., Mansurov T.Z.* CALCULATION OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL IN THE MAPLE SYSTEM 35

Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. ЯВНЫЙ ВИД РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА / *Tosheva N.A., Ismoilova D.E.* AN EXACT FORM OF THE RESOLVENT OF A GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL 39

Тошева Н.А., Шарипов И.А. О ВЕТВЯХ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 3X3-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ / *Tosheva N.A., Sharipov I.A.* ON THE BRANCHES OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A 3X3 OPERATOR MATRIX 44

Хайитова Х.Г., Ибодова С.Т. АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА / *Khayitova Kh.G., Ibodova S.T.* AN ALGORITM OF THE INVESTIGATION OF EIGENVALUES OF THE FRIEDRICHS MODEL 48

О ТИПАХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Мамуров Б.Ж.[1], Сохибов Д.Б.[2] Email: Mamurov1177@scientifictext.ru

[1]Мамуров Бобохон Жураевич - кандидат физико-математических наук, доцент;
[2]Сохибов Дилшод Бекназарович – магистр,
кафедра математического анализа, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет,
г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *одна из основных задач динамической системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Для решения задач, возникающих в математической генетике, используются квадратичные и кубические стохастические операторы. Ряд задач прикладного характера приводит к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий нелинейных стохастических операторов. В данной работе с целью дальнейшего рассмотрения выпуклых комбинаций с другими квадратичными операторами, изучаются типы неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора.*
Ключевые слова: *симплекс, квадратичные стохастические операторы, неподвижные точки, якобиан оператора.*

ON TYPES OF FIXED POINTS OF A SINGLE SQUARE STOCHASTIC OPERATOR

Mamurov B.Zh.[1], Sohibov D.B.[2]

[1]Mamurov Bobohon Zhuraevich - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor;
[2]Sohibov Dilshod Beknazarovich - Master Student,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL ANALYSIS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY,
BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *one of the main tasks of a dynamical system is to study the evolution of the state of the system. To solve problems that arise in mathematical genetics, quadratic and cubic stochastic operators are used. A number of problems of an applied nature make it necessary to study the asymptotic behavior of the trajectories of nonlinear stochastic operators. In this paper, with the aim of further considering convex combinations with other quadratic operators, we study the types of fixed points of one quadratic stochastic operator.*
Keywords: *simplex, quadratic stochastic operators, fixed points, operator Jacobian.*

УДК 517.988.52

Понятие квадратичных стохастических операторов было первые сформулировано С.Н. Бернштейном.

Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложениях (см., например, [1]-[19]).

В данной работе с целью дальнейшего рассмотрения выпуклых комбинации с другими квадратичными операторами, изучаются типы неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора.

Пусть $E=\{1,2,...,n\}$. Множество $S^{n-1}=\left\{x=(x_1,...,x_n)\in R^n : x_i\geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$ называется $(n-1)$ - *мерным симплексом.* Каждый элемент $x\in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E, и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

Квадратичный стохастический оператор $V: S^{n-1} \to S^{n-1}$ имеет вид

$$V: x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j, \text{ где } p_{ij,k} \geq 0, \; p_{ij,k} = p_{ji,k}, \; \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1.$$

В S^2 рассмотрим квадратичный стохастический оператор :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2^1 &= x_2^2 + 2x_2x_3, \\ x_3^1 &= x_3^2 + 2x_3x_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Оператор (1) имеет четыре неподвижные точки:

$$M_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \; M_2 = (1,0,0), \; M_3 = (0,1,0), \; M_4 = (0,0,1).$$

Определим типы этих неподвижных точек.

Определение (см. [4]). Если якобиан I оператора V в неподвижной точке λ^* не имеет собственного значения на единичной окружности, то точка λ^* называется *гиперболической*.

Определение (см. [4]). Гиперболическая неподвижная точка λ^* называется *притягивающей*, если все абсолютные величины собственных значений матрицы якоби $J(\lambda^*)$ меньше единицы; отталкивающий, если все абсолютные величины собственных значений матрицы якоби $J(\lambda^*)$ больше единицы *седловой*, в остальных случаях.

Используя $x_3 = 1 - x_2 - x_1$ второе уравнение квадратичный оператор (1) запишем в виде:

$$x_2^1 = x_2^2 + 2x_2(1 - x_2 - x_1) = x_2^2 + 2x_2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 = -x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2.$$

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2^1 &= -x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $(x_1, x_2) \in \{(x, y); x, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$, а $x_1, x_2 -$ первые где координаты точек симплекса S^2. Составим матрицы якоби оператора (2) в точке $\lambda_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\frac{\partial x_1^1}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2, \; \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2} = 2x_1.$$

$$\left.\frac{\partial x_1^1}{\partial x_1}\right|_{\lambda_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}; \; \left.\frac{\partial x_1^1}{\partial x_2}\right|_{\lambda_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{\partial x_2^1}{\partial x_1} = -2x_2, \; \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2} = -2x_2 - 2x_1 + 2.$$

$$\left.\frac{\partial x_2^1}{\partial x_1}\right|_{\lambda_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = -\frac{2}{3}, \quad \left.\frac{\partial x_2^1}{\partial x_2}\right|_{\lambda_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = -2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}.$$

Значить матрицы якоби оператора (2) имеет вид: $J\left(\lambda_1^*\right)=\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

Теперь найдем собственные значения матрицы $J\left(\lambda_1^*\right)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\mu & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\mu \end{vmatrix}=0, \quad \left(\frac{4}{3}-\mu\right)\left(\frac{2}{3}-\mu\right)+\frac{4}{9}=0.$$

$$\frac{8}{9}-\frac{4}{3}\mu-\frac{2}{3}\mu+\mu^2=0, \qquad 9\mu^2-(12+6)\mu+8=0, \qquad 9\mu^2-18\mu+8=0,$$

$D=18^2-4\cdot 9\cdot 8=324-288=36$, $\mu_{1,2}^{(1)}=\frac{18\pm 6}{18}=\frac{9\pm 3}{9}=1\pm\frac{1}{3}$.

Это показывает, что точка $\lambda_1^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ негиперболическая и седловая, так как $\mu_1^{(1)}=1-\frac{1}{3}<1$ и $\mu_2^{(1)}=1+\frac{1}{3}>1$.

Проверим точка $M(1,0,0)$. Составим матрицы якоби оператора (2) в точке $\lambda_2^*=(1,0,0)$.

$$\frac{\partial x_1^1}{\partial x_1}\Big|_{\lambda^*=(1,0,0)}=2, \quad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2}=2, \quad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2}=-2+2=0.$$

Матрица якоби оператора (2) в этом случая имеет вид: $J\left(\lambda_2^*\right)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Собственные значения матрицы $J\left(\lambda_2^*\right)$:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & 2 \\ 0 & -\mu \end{vmatrix}=0, \quad (2-\mu)\mu=0, \quad \mu_1^{(2)}=0, \quad \mu_2^{(2)}=2.$$

Точка $\lambda_2^*=(1,0,0)$ негиперболическая и седловая, так как $\left|\mu_1^{(2)}\right|=0<1$, $\left|\mu_2^{(2)}\right|=2>1$.

Составим матрицы якоби оператора (2) в точке $\lambda_3^*=(0,1,0)$.

$$\frac{\partial x_1^1}{\partial x_1}\Big|_{\lambda_3^*=(0,1,0)}=2, \qquad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2}\Big|_{\lambda_3^*=(0,1,0)}=0, \qquad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1}\Big|_{\lambda_3^*=(0,1,0)}=-2, \qquad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2}\Big|_{\lambda_3^*=(0,1,0)}=0,$$

$$J\left(\lambda_3^*\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрица $J\left(\lambda_3^*\right)$:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & -\mu \\ -2-\mu & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad (2-\mu)\cdot 0-\mu(\mu+1)=0, \quad -\mu(\mu+1)=0, \qquad \mu_1^{(3)}=0,$$

$\mu_2^{(3)}=-1$.

Собственно точка $\lambda_3^* = (0,1,0)$ негиперболическая и седловая, так как $\mu_1^{(3)} = 0 < 1$, $\left|\mu_2^{(3)}\right| = |-1| = 1$. Для точки $\lambda_4^* = (0,0,1)$ составим матрицы якоби.

$$\frac{\partial x_1^1}{\partial x_1}\bigg|_{\lambda_4^*=(0,0,1)} = 0, \quad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2}\bigg|_{\lambda_4^*=(0,0,1)} = 0, \quad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1}\bigg|_{\lambda_4^*=(0,0,1)} = 0, \quad \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2}\bigg|_{\lambda_4^*=(0,0,1)} = 2,$$

$$J(\lambda_4^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $J(\lambda_4^*)$:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 2-\mu \end{vmatrix} = 0, \ -\mu(2-\mu) = 0, \ \mu_1^{(4)} = 0, \ \mu_2^{(4)} = 2.$$

Точка $\lambda_4^* = (0,0,1)$ негиперболическая и седловая.

Утверждения. Все четыре неподвижные точки $M_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $M_2 = (1,0,0)$, $M_3 = (0,1,0)$ и $M_4 = (0,0,1)$ оператора (1) седловая.

Список литературы / References

1. *Ганиходжаев Р.Н.* Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Матем.сб., **183**:8 (1992), 119-140.
2. *Любич Ю.И.* Математические структуры в популяционной генетике, Наукова думка, Киев, 1983.
3. *Розиков У.А., Жамилов У.У.* F - квадратичные стохастические операторы // Матем. заметки, 83:4 (2008), 606-612.
4. *Розиков У.А., Жамилов У.У.* О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Матем. сб., **200**:9 (2009), 81-94.
5. *Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.* О роли елементов истории математики в преподавании математики // Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, 2020. С. 701-702.
6. *Мамуров Б.Ж.* Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин // Молодой учёный. **197**:11 (2018). С. 3-5.
7. *Мамуров Б.Ж., Бобокулова С.Б.* Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин // Academy. **55**:4 (2020). С. 13-16.
8. *Мамуров Б.Ж.* О кубических стохастических процессов // Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С. 72.
9. *Mamurov B.J., Rozikov U.A.* On cubic stochastic operators and processes // Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017.
10. *Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S.* Quadratic stochastic processes of type ($\sigma|\mu$) // arXiv: 2004.01702 [math.D.S]. С. 1-14.
11. *Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.* О первом уроке по теории вероятностей // Вестник науки и образования. 96:18 (2020). Часть 2. С 5-7.
12. *Mamurov B.J.* A central limit theorem for quadratic chains with finite genotypes // Scientific reports of Bukhara State University. 1:5, 2018. С. 18-21.

13. *Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S.* Quadratic Stochastic Processes of Type ($\sigma|\mu$) // Markov Processes Relat. Fields 26, 915-933 (2020).
14. *Расулов Х.Р. и др.* О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа. Ученый XXI века. № 6-1 (53). Июнь 2019 г. С. 16-18.
15. *Rasulov Kh.R.* On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal. 2018. № 4. С. 126-131.
16. *Расулов Х.Р.* Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа. XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, 2019. С. 197-199.
17. *Rasulov Kh.R.* KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives, 6:10, 2019.
18. *Расулов Х.Р. и др.* О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 2020. № 19 (97). Часть 1. Стр. 6-9.
19. *Мамуров Б.Ж.* Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов // Bulletin of Institute of Mathematics 2019. № 6. С. 35-39.