

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО  
ПАРАБОЛО–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА  
ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ

Ш. Б. Меражова

**Аннотация.** Предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Предполагается, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений. Предложено три алгоритма численного решения. Проведен ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009

**Ключевые слова:** уравнение смешанного парабола-гиперболического типа, нелокальное условие, обратная задача, уравнение Фредгольма 1-го рода, функционал невязки, регуляризация.

Введение

В работе предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Алгоритмы реализованы на компьютере и апробированы на симулированных данных.

Прямая и обратная задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нелокальным условием в рассматриваемой постановке изучалась в работе [1]. Был установлен критерий единственности и существования решения обратной задачи по определению неизвестной правой части. В дальнейших работах [2–5] были рассмотрены более сложные постановки прямых и обратных задач для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. В нашей работе предложены и апробированы численные алгоритмы решения обратной задачи для простой постановки работы [1], чтобы не заслонять суть сложными математическими выражениями. Предлагаемые в этой работе алгоритмы решения обратной задачи могут быть легко адаптированы к более сложным постановкам из работ [2–5].

Вообще говоря, прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо известны, как аналогичные задачи для классических уравнений.

Тем не менее, данные задачи также имеют отношение к практике. Например, рассматриваемая в данной работе задача имеет отношение к моделированию процесса движения газа в закрытом канале с пористыми стенками, причем движение газа в канале описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии [6, 7]. Неклассические задачи, задачи смешанного типа рассматривались в работах [6–33].

Предложенные в этой работе численные алгоритмы решения обратной задачи требуют привлечения теории обратных и некорректных задач, которая разрабатывалась в работах [34–36] и др.

### 1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\theta(t)u_t(x, t) + \theta(-t)u_{tt}(x, t) = \lambda u_{xx}(x, t) + g(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (-\alpha, \beta), \quad (1)$$

здесь  $\theta(t)$  —  $\theta$ -функция Хевисайда. Краевые условия:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [-\alpha, \beta], \quad (2)$$

Условия склейки при  $t = 0$ :

$$[u]_0 = 0, \quad [u_t]_0 = 0, \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

и имеет место нелокальное условие

$$u(x, \beta) - u(x, -\alpha) = \phi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (4)$$

Будем считать, что функция  $g(x)$  непрерывна и  $g(0) = g(l) = 0$ .

Соотношения (1)–(4) являются прямой задачей, т. е. если известны функции  $\phi(x)$ ,  $g(x)$  и постоянная  $\lambda$ , то решение  $u(x, t)$  может быть найдено из соотношений (1)–(4).

**Обратная задача.** Необходимо определить функцию  $g(x)$ , если о решении прямой задачи (1)–(4) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x, \beta) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5)$$

Согласно [1] решение прямой задачи (1)–(4) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(\omega_k x), \quad \omega_k = \frac{\pi}{l} k,$$

в котором коэффициенты  $u_k(t)$  имеют следующий вид:

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 t} + \frac{g_k}{\lambda \omega_k^2}, & t > 0, \\ a_k \phi_k (\cos(\sqrt{\lambda} \omega_k t) - \sqrt{\lambda} \omega_k \sin(\sqrt{\lambda} \omega_k t)) + \frac{g_k}{\lambda \omega_k^2}, & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

здесь  $\phi_k$  и  $g_k$  — коэффициенты разложения функций  $\phi(x)$  и  $g(x)$  в соответствующие ряды и

$$a_k = \frac{1}{e^{-\lambda \omega_k^2 \beta} - (\cos(\sqrt{\lambda} \omega_k \alpha) + \sqrt{\lambda} \omega_k \sin(\sqrt{\lambda} \omega_k \alpha))}.$$

В [1] показано, что решение обратной задачи (1)–(5) существует и единственно тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не обращается в нуль. Найдены условия на  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k \in \mathbb{N}$ , когда этого не происходит. Везде ниже будем предполагать, что эти условия выполнены.

Результаты работы [1] (теоремы существования и единственности, представление для решения обратной задачи) следуют из соотношения

$$\psi_k = a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 \beta} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{g_k}{\omega_k^2}, \quad (7)$$

которое получено в этой работе и является следствием соотношений (5) и (6), где  $\psi_k$  — коэффициенты разложения функции  $\psi(x)$  в соответствующий ряд.

## 2. Возможные алгоритмы решения обратной задачи

Как отмечалось во введении, анализ ключевых выражений, полученных для решения обратной задачи — функции  $g(x)$ , показывает, что обратная задача (1)–(5) некорректна и требует привлечения теории решения обратных и некорректных задач. Ниже приведем три возможных алгоритма численного решения.

**2.1. Алгоритм 1.** Данный алгоритм численного решения следует из соотношений, полученных в работе [1]. Из (7) получим, что

$$g(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 (\psi_k - a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 \beta}) \sin(\omega_k x). \quad (8)$$

Трудность суммирования данного ряда состоит в том, что коэффициенты ряда имеют растущий множитель  $\omega_k^2$ . Если функции  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$  определяются из эксперимента, то данные функции измеряются с некоторой ошибкой, т. е. известны  $\psi_\delta(x)$ ,  $\phi_\delta(x)$  и

$$\|\psi_\delta - \psi\| \leq \delta, \quad \|\phi_\delta - \phi\| \leq \delta.$$

Поскольку  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$  известны с ошибкой, суммирование ряда (8) может привести к весьма значительным ошибкам.

**ПРИМЕР.** Пусть  $a(x) = x^4(l-x)^4 e^{-5x}$  (рис. 1(a)). Считаем, что функция  $a(x)$  известна на промежутке  $[0, 1]$  в точках  $x_i = hi$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $N = 300$ . Вычислим коэффициенты ряда Фурье  $a_k$  и вычислим сумму ряда

$$b(x_i) = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k^2 a_k \sin(\omega_k x_i) \quad (i = \overline{1, N-1}),$$

результат показан на рис. 1(b). Пусть  $a_\delta(x_i) = a(x_i)(1 + 0.01\xi_i)$  (см. рис. 1(a), вынесенное окно), где  $\xi_i$  — случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[-1, 1]$ , т. е. функция  $a(x)$  получила однопроцентную ошибку. Вычислим коэффициенты ряда Фурье  $a_{\delta,k}$  и посчитаем сумму ряда

$$b_\delta(x_i) = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k^2 a_{\delta,k} \sin(\omega_k x_i) \quad (i = \overline{1, N-1}),$$

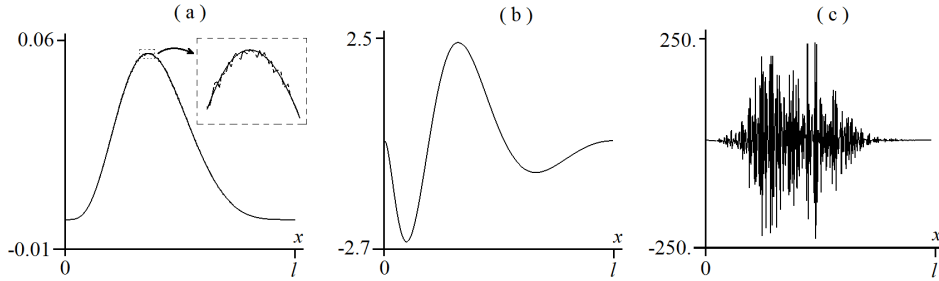


Рис. 1. (a) — функции  $a(x)$  (непрерывная линия) и  $a_\delta(x)$  (пунктирная линия), (b) — функция  $b(x)$ , (c) — функция  $b_\delta(x)$

результат приведен на рис. 1(с).

Результаты суммирования на рис. 1(b),(c) различаются значительно, поскольку во втором случае ошибки при вычислении величин  $a_{\delta,k}$  увеличиваются, так как умножаются на растущую с ростом  $k$  величину  $\omega_k^2$ : чем выше частота, тем больше ошибка.

Чтобы избежать такого эффекта, как показано в примере выше, воспользуемся результатами работ [34, 37]. Разложим функции  $\psi_\delta(x)$  и  $\phi_\delta(x)$  в ряды Фурье и выберем минимальное  $N_\delta$ , для которого

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_\delta} \psi_{\delta,k} \sin(\omega_k x) - \psi_\delta(x) \right\| \leq \delta, \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_\delta} \phi_{\delta,k} \sin(\omega_k x) - \phi_\delta(x) \right\| \leq \delta.$$

Примем за решение обратной задачи результат суммирования:

$$g(x) = \lambda \sum_{k=1}^{N_\delta} \omega_k^2 (\psi_k - a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 \beta}) \sin(\omega_k x). \quad (9)$$

Результаты численной реализации приведем ниже.

**2.2. Алгоритм 2.** Прежде чем представим второй алгоритм решения обратной задачи, проведем некоторые вычисления. Найдем, какая функция разлагается в ряд Фурье  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k} \sin(\omega_k x)$ , если известно, что  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin(\omega_k x)$ .

Проинтегрируем разложение Фурье для функции  $g(x)$  два раза:

$$\int_0^x g(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_0^x \sin(\omega_k s) ds = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k} \cos(\omega_k s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k};$$

$$\int_0^x \int_0^y g(s) ds dy = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k^2} \sin(\omega_k s) + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin(\omega_k x) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_k x)}{\omega_k} dx = \frac{1}{l} \int_0^l g(x)(l-x) dx. \end{aligned}$$

Данные представления имеют место в предположении, что ряд Фурье для функции  $g(x)$  сходится равномерно. В последнем равенстве воспользовались суммой известного ряда [38]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_k x)}{\omega_k} = \frac{l-x}{2}, \quad 0 < x < 2l.$$

Из вышеприведенных равенств следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k^2} \sin(\omega_k x) = \int_0^l K(x, s) g(s) ds, \quad \text{где } K(x, s) = \begin{cases} s(1-x/l), & s \leq x, \\ x(1-s/l), & s > x. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначим

$$\phi_{\beta}(x) = \lambda \psi(x) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 \beta} \sin(\omega_k x) \quad (11)$$

(см. (7)). Отметим, что в [1] показано, что знаменатель величин  $a_k$  не обращается в нуль, и видно, что величина  $a_k$  с ростом  $k$  или ограничена, или стремится к нулю как  $1/k$ . Величина  $e^{-\lambda \omega_k^2 \beta}$  с ростом  $k$  убывает как  $e^{-ck^2}$ . Таким образом, вычисление ряда в (11) не представляет труда — с ростом частоты ошибка только уменьшается.

Из приведенных выше вычислений нетрудно видеть, что решение обратной задачи (1)–(5) эквивалентно решению уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^l K(x, s) g(s) ds = \phi_{\beta}(x). \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что ядро  $K(x, s)$  является симметричной и непрерывной функцией, производная  $K'_x(x, s)$  имеет разрыв первого рода при  $x = s$ . Правая часть интегрального уравнения  $\phi_{\beta}(x)$  определяется из экспериментальных данных, будем считать, что ошибка, с которой известна функции  $\phi_{\beta}(x)$ , также не превосходит  $\delta$ .

Для решения уравнения Фредгольма 1-го рода существует много методов (см., например, [39, 40]). Для решения интегрального уравнения (12) воспользуемся классическим методом — минимизацией функционала с регуляризацией Тихонова [41, 42]:

$$J[g] = \int_0^l \left[ \int_0^l K(x, s) g(s) ds - \phi_{\beta}(x) \right]^2 dx + \epsilon \left( \int_0^l [g^2(x) + p(g'(x))^2] dx \right), \quad (12)$$

здесь постоянные  $\epsilon$  и  $p$  — параметры регуляризации.

Результаты численной реализации приведем ниже.

**2.3. Алгоритм 3.** Обозначим

$$\phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \sin(\omega_k x).$$

Из (6), (10) следует, что

$$u(x, 0) = \phi_0(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^l K(x, s) g(s) ds.$$

Как отмечалось выше, величина  $a_k$  с ростом  $k$  ограничена или стремится к нулю как  $1/k$ , поэтому суммирование данного ряда не приведет к накоплению ошибки при вычислении функции  $\phi_0(x)$ .

Из постановки обратной задачи (1)–(5) следует

**Обратная задача.** Найти функцию  $g(x)$ , если о решении прямой задачи

$$u_t(x, t) = \lambda u_{xx}(x, t) + g(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \beta), \quad (14)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \beta], \quad (15)$$

$$u(x, 0) = \phi_0(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^l K(x, s) g(s) ds, \quad x \in [0, l], \quad (16)$$

известна следующая дополнительная информация:

$$u(x, \beta) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (17)$$

Обратная задача (14)–(17) может быть решена при помощи минимизации функционала невязки:

$$J[g] = \int_0^l [u(x, \beta) - \psi(x)]^2 dx. \quad (18)$$

Заметим, что возможные ошибки при определении функции  $\phi_0(x)$  будут мало сказываться при минимизации функционала невязки (18), поскольку решение прямой задачи (14)–(16) обладает сглаживающим эффектом, следовательно, основные трудности будет представлять ошибка, с которой определена функция  $\psi(x)$ .

Результаты численной реализации в следующем разделе.

### 3. Численная реализация предложенных алгоритмов

Прежде всего заметим, что на практике измеряемые функции (в нашем случае функции  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$ ) известны только в некоторых точках интервала  $[0, l]$ . Будем считать, что это точки  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_N = l$ ,  $h = l/N$ . В этом случае бесконечные ряды Фурье превращаются в конечные суммы, имеющие  $N$  слагаемых. Во всех численных примерах ниже  $N = 300$ .

Предлагаемые алгоритмы численного решения обратной задачи по определению функции  $g(x)$  будут тестироваться на симулированных данных, т. е. будет выбрана некоторая функция  $g(x)$ , для которой будет вычислены или правая часть интегрального уравнения или данные обратной задачи  $\psi(x)$ , в эти функции будет внесена случайная ошибка:

$$\psi_\delta(x_j) = \psi(x_j) \left( 1 + \xi_j \frac{P}{100} \right), \quad j = \overline{0, N},$$

(здесь  $\xi_j$  — случайная величина, равномерно распределенная на  $[-1, 1]$ ,  $P$  — процент ошибки, ниже в численных экспериментах  $P = 5\%$ ), и далее для зашумленных данных будут реализовываться численные алгоритмы, предложенные выше.

Будем считать, что прямая и обратная задачи численно решаются в безразмерном виде, поэтому будем считать, что  $l = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . При переходе к безразмерным величинам особенность поведения решения задачи будет зависеть от величины коэффициента  $\lambda$ . В расчетах ниже  $\lambda = 1$ .

Отдельно нужно оговорить вычисление величин  $a_k$ . Хотя в [1] доказано, что знаменатель дроби в нуль не обращается, но он может быть близок к нулю, а следовательно,  $a_k$  для некоторых значений  $k$  могут быть весьма большими. Чтобы избежать такой ситуации, необходимо предварительно вычислить  $a_k$ , поскольку величина  $\lambda$  известна, а величины  $\alpha$  и  $\beta$  выбираются при планировании физического эксперимента. Вычислить  $a_k$  несложно, поскольку их конечное число, а именно не более  $N$ . Если среди  $a_k$  присутствуют слишком большие величины, можно изменить значения  $\alpha$  и/или  $\beta$  и снова вычислить  $a_k$ . Например, нетрудно видеть, что при тех значениях  $\lambda$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых проводится восстановление функции  $g(x)$ , с большой точностью  $a_k \approx (-1)^{k+1}$ .

Поскольку  $g(0) = 0$  и  $g(l) = 0$ , функция  $g(x)$  будет численно определяться в точках  $x_i$  ( $i = \overline{1, N-1}$ ). Будем обозначать  $g_i = g(x_i)$ ,  $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ .

В качестве тестовой функции для восстановления была выбрана

$$g(x) = 10e^{-50(x-l/2+0.05)^2} - 8e^{-100(x-l/2-0.05)^2} - (ax + b),$$

где постоянные  $a$  и  $b$  выбраны так, что  $g(0) = 0$  и  $g(l) = 0$ . Данная функция имеет пологие участки и участки, где она изменяется в достаточно больших пределах.

**3.1. Численная реализация алгоритма 1.** В качестве решения обратной задачи (1)–(5) принимаем результат суммирования:

$$g(x_j) = \lambda \sum_{k=1}^{N_\delta} \omega_k^2 (\psi_k - a_k \phi_k e^{-\lambda \omega_k^2 \beta}) \sin(\omega_k x_j), \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (19)$$

Из предположения, что функции  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$  известны с ошибкой, находим минимальное  $N_\delta$  из условий

$$h \sum_{j=1}^{N-1} \left[ \sum_{k=1}^{N_\delta} \psi_{\delta,k} \sin(\omega_k x_j) - \psi_\delta(x_j) \right]^2 \leq \left[ \frac{P}{100} \right]^2,$$

$$h \sum_{j=1}^{N-1} \left[ \sum_{k=1}^{N_\delta} \phi_{\delta,k} \sin(\omega_k x_j) - \phi_\delta(x_j) \right]^2 \leq \left[ \frac{P}{100} \right]^2,$$

здесь  $\psi_{\delta,k}$  и  $\phi_{\delta,k}$  — коэффициенты разложения в ряды Фурье функций  $\psi_\delta(x)$  и  $\phi_\delta(x)$ .

После определения  $N_\delta$  из (19) находим  $g(x_j)$  ( $j = \overline{1, N-1}$ ). Результат вычислений приведен на рис. 2(а). В данном численном примере получили, что  $N_\delta = 7$ .

**3.2. Численная реализация алгоритма 2.** Численно решаем задачу

$$h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j = \phi_\beta(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (20)$$

при помощи минимизации функционала невязки

$$J[g] = h \sum_{i=1}^{N-1} \left[ h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j - \phi_\beta(x_i) \right]^2 + \epsilon h \sum_{j=1}^{N-1} g_j^2 + \epsilon p h \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2h} \right)^2. \quad (21)$$

Один из самых простых критериев выбора параметров регуляризации  $\epsilon$  и  $p$  требует знания оценки норм функции  $g(x)$  и ее производной:  $\|g\|^2 \leq C_0$  и  $\|g'\|^2 \leq C_1$ , поскольку эти параметры определяются из равенства  $\epsilon(C_0 + pC_1) = [P/100]^2$ . Существенная неточность задания постоянных  $C_0$  и  $C_1$  приводит к неудовлетворительному результату: завышение постоянных влечет появление сильных осцилляций в решении, занижение — к сильному сглаживанию решения. Существуют другие критерии выбора параметров регуляризации, но они требуют больше информации о поведении функции  $g(x)$  (см., например, [39]). В численном примере ниже положили  $C_0 = 1$ ,  $C_1 = 10$ ,  $p = 0.1$ . Результат вычислений приведен на рис. 2(б).

Для минимизации использовался метод сопряженных градиентов (см., например, [43]). Задается начальное приближение  $q_j^{[0]}$  ( $j = \overline{1, N-1}$ ) (взято  $q_j^{[0]} = 0$ ), следующая итерация минимизационной последовательности строится по следующей схеме:

$$g_j^{[k+1]} = g_j^{[k]} - \gamma^{[k]} q_j^{[k]}, \quad j = \overline{1, N-1},$$



$$q_j^{[k]} = J'_j[q^{[k]}] + \rho^{[k]} q_j^{[k-1]}, \quad q_j^{[0]} = J'_j[q^{[0]}], \quad \rho^{[k]} = \|J'[q^{[k]}]\|^2 / \|J'[q^{[k-1]}]\|^2, \\ \gamma^{[k]} = \arg \min_{\gamma > 0} J[g^{[k]} - \gamma q^{[k]}],$$

здесь верхний индекс в квадратных скобках означает номер итерации.

Выражения для вычисления градиента  $J'[g]$  функционала  $J[g]$  [21] и для шага метода сопряженных градиентов  $\gamma$  приведены в приложении.

Существует несколько критериев остановки минимизационного процесса (см., например, [43]). Функционал невязки (21) имеет очень пологий вид, точка глобального минимума находится в весьма обширной области, где  $J[g] \leq \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  очень мало. Исходя из этого, критерием остановки минимизационного процесса выбрано условие выполнения следующего неравенства:

$$\frac{J[g^{[k-n]}] - J[g^{[k]}]}{J[g^{[k]}]} \leq \varepsilon. \quad (22)$$

В расчетах  $n = 10$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Такой выбор означает, что за десять шагов минимизационного процесса значение функционала невязки изменилось лишь в 5–6 знаке после запятой.

**3.3. Численная реализация алгоритма 3.** Обратная задача (14)–(17) для сеточных функций была сформулирована следующим образом:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} = \lambda \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} + g_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (23)$$

$$u_{0,k} = 0, \quad u_{N,k} = 0, \quad k = \overline{0, K}, \quad (24)$$

$$u_{i,0} = \phi_0(x_i) + \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (25)$$

$$u_{i,K} = \psi(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (26)$$

которая может быть решена при помощи минимизации функционала невязки

$$J[g] = h \sum_{i=1}^{N-1} [u_{i,K} - \psi(x_i)]^2. \quad (27)$$

Для минимизации функционала невязки (27) может быть привлечен метод сопряженных градиентов, описание которого приведено в предыдущем разделе.

Построение градиента функционала невязки (27) будет опираться на метод, который представлен и хорошо апробирован в [44–51] для различных постановок обратных задач. Суть метода заключается в том, что для постановки прямой задачи получают постановку сопряженной задачи и с помощью решений прямой и сопряженных задач получают выражение для градиента функционала невязки. Необходимо отметить, что постановка сопряженной задачи и выражение для градиента функционала невязки должны быть получены не для постановки (14)–(16) и функционала невязки (18), которые потом аппроксимируются для численного решения на компьютере, а для постановки (23)–(25) и функционала невязки (27), т. е. для тех задачи и функционала, которые используются

при численном решении задачи на компьютере. Ошибочность первого подхода по сравнению со вторым показана в [52]. Необходимые построения и вывод основных выражений даны в приложении.

Порядок действий при минимизации функционала невязки (27):

- задаем начальное приближение  $g_i^{[0]}$ ;
- следующая итерация минимизационного процесса строится по методу сопряженных градиентов, с этой целью
  - решаем прямую задачу (23)–(25);
  - решаем сопряженную задачу (см. приложение);
  - с помощью решений прямой и сопряженных задач вычисляем градиент функционала невязки (см. приложение);
  - строим следующее приближение по методу сопряженных градиентов;
- вышеприведенные действия производятся до тех пор, пока не выполнится критерий остановки процесса минимизации.

В качестве критерия остановки минимизационного процесса был выбран критерий (22), описанный в предыдущем разделе. Результат численного решения задачи показан на рис. 2(с).

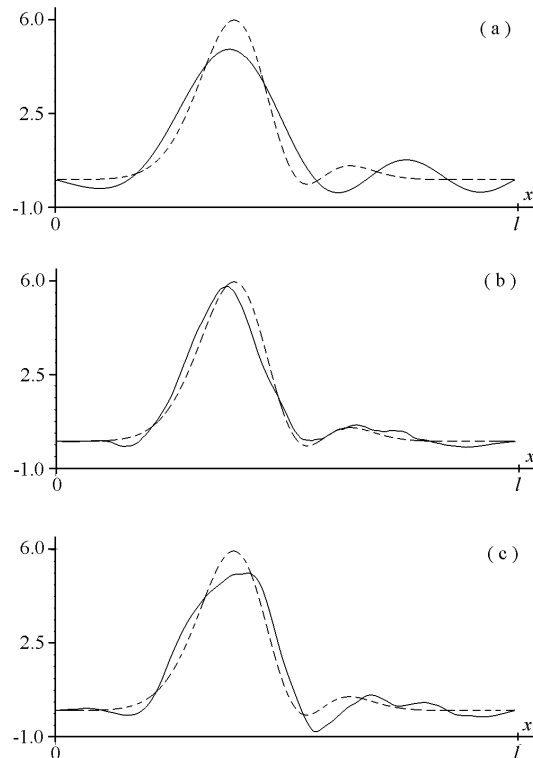


Рис. 2. Результаты восстановления функции  $g(x)$ , точное значение функции дано пунктирной линией, восстановленное — непрерывной. (а) — результат восстановления по алгоритму 1, (б) — результат восстановления по алгоритму 2, (с) — результат восстановления по алгоритму 3.

#### 4. Заключение

В работе предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части. Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений. Предложено три алгоритма численного решения обратной задачи:

- Алгоритм 1 основан на регуляризации суммирования ряда Фурье, коэффициенты которого содержат возрастающий множитель  $\omega_k^2$ ;
- алгоритм 2 основан на решении уравнения Фредгольма 1-го рода оптимизационным методом с регуляризацией по Тихонову;
- алгоритм 3 основан на решении специальной обратной задачи для параболического уравнения.

Проведен ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов. На наш взгляд алгоритм 2 дал наилучшее по точности восстановленное решение. Результат восстановления по алгоритму 3 может быть улучшен, если в функционале невязки использовать регуляризатор Тихонова. Алгоритм 3 требует достаточно много времени для вычислений по сравнению с алгоритмами 1 и 2, поскольку при его реализации многократно решается уравнение теплопроводности. Алгоритм 1 дал результат наименее удовлетворительный по сравнению с другими, поскольку восстановленная функция имеет слишком сглаженный вид.

#### 5. Приложение

**5.1. Выражение для градиента функционала (21).** Рассмотрим приращение  $\delta J = J[g + \delta g] - J[g]$ . Нетрудно видеть, что с точностью до малых второго порядка имеет место равенство

$$\begin{aligned} \delta J = 2h \sum_{i=1}^{N-1} \left[ h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j - \phi_{\beta}(x_i) \right] h \sum_{s=1}^{N-1} K_{is} \delta g_s \\ + 2\epsilon h \sum_{i=1}^{N-1} g_i \delta g_i + 2\epsilon p h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h} \frac{\delta g_{i+1} - \delta g_{i-1}}{2h}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\delta g_0 = 0$  и  $\delta g_N = 0$ , нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \delta J = 2h \sum_{s=1}^{N-1} \left( h \sum_{i=1}^{N-1} \left[ h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j - \phi_{\beta}(x_i) \right] K_{is} \right) \delta g_s \\ + 2\epsilon h \sum_{i=1}^{N-1} g_i \delta g_i + 2\epsilon p h \sum_{i=1}^{N-1} G_i \delta g_i, \end{aligned}$$

где

$$G_i = \begin{cases} (g_1 - g_3)/4h^2, & i = 1, \\ -(g_{i-2} - 2g_i + g_{i+2})/4h^2, & i = \overline{2, N-2}, \\ (g_{N-1} - g_{N-3})/4h^2, & i = N-1, \end{cases}$$

откуда следует выражение для градиента функционала невязки (21):

$$J'_s[g] = 2h \sum_{i=1}^{N-1} \left[ h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j - \phi_\beta(x_i) \right] K_{is} + 2\epsilon g_s + 2\epsilon p G_s, \quad s = \overline{1, N-1}.$$

### 5.2. Выражение для шага $\gamma$ численной реализации алгоритма 2.

Нетрудно видеть, что

$$J[g^{[k]} - \gamma q^{[k]}] = J[g^{[k]}] - 2\gamma h \sum_{i=1}^{N-1} A_i B_i + \gamma^2 h \sum_{i=1}^{N-1} B_i^2,$$

где

$$A_i = h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j^{[k]} - \phi_\beta(x_i), \quad B_i = h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} q_j^{[k]}.$$

Минимум для  $J[g^{[k]} - \gamma q^{[k]}]$  достигается, когда

$$\gamma = \gamma^{[k]} = h \sum_{i=1}^{N-1} A_i B_i / h \sum_{i=1}^{N-1} B_i^2.$$

**5.3. Выражение для градиента функционала невязки (27) и постановка сопряженной задачи.** Следуем методу, изложенному в [44–51], для получения выражения для градиента функционала невязки (27).

Рассмотрим функционал Лагранжа

$$L[g] = J[g] + \tau h \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left( -\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\tau} + \lambda \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{h^2} + g_i \right) v_{i,n+1},$$

здесь сеточная функция  $v_{i,n+1}$  является множителем Лагранжа.

Пусть сеточная функция  $g_i$  получит приращение  $\delta g_i$ , тогда сеточная функция  $u_{i,n}$  получит приращение  $\delta u_{i,n}$ , которое удовлетворяет задаче

$$\frac{\delta u_{i,k+1} - \delta u_{i,k}}{\tau} = \lambda \frac{\delta u_{i+1,k} - 2\delta u_{i,k} + \delta u_{i-1,k}}{h^2} + \delta g_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\delta u_{0,k} = 0, \quad \delta u_{N,k} = 0, \quad k = \overline{0, K},$$

$$\delta u_{i,0} = \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} \delta g_j, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Рассмотрим вариацию функционала Лагранжа

$$\delta L[g] = \delta J[g] + \tau h \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left( -\frac{\delta u_{i,n+1} - \delta u_{i,n}}{\tau} + \lambda \frac{\delta u_{i+1,n} - 2\delta u_{i,n} + \delta u_{i-1,n}}{h^2} + \delta g_i \right) v_{i,n+1}.$$

«Перекинем» разностные производные с функции  $\delta u_{i,n}$  на  $v_{i,n+1}$ . Как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (\delta u_{i+1,n} - 2\delta u_{i,n} + \delta u_{i-1,n}) v_{i,n+1} &= -\delta u_{1,n} v_{0,n+1} - \delta u_{1,N-1} v_{N,n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \delta u_{i,n} (v_{i+1,n+1} - 2v_{i,n+1} + v_{i-1,n+1}), \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{K-1} (\delta u_{i,n+1} - \delta u_{i,n}) v_{i,n+1} = -\delta u_{i,K} v_{i,K} + \delta u_{i,1} v_{i,1} + \sum_{n=1}^{K-1} \delta u_{i,n} (v_{i,n+1} - v_{i,n}).$$

Исходя из этих равенств, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \delta L[g] &= 2h \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i,K} - \psi(x_i)) \delta u_{i,K} + \tau h \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{i=1}^{N-1} v_{i,n+1} \delta g_i \\ &+ \tau h \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left( -\frac{v_{i,n+1} - v_{i,n}}{\tau} + \lambda \frac{v_{i+1,n+1} - 2v_{i,n+1} + v_{i-1,n+1}}{h^2} \right) \delta u_{i,n} \\ &+ h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta u_{i,1} v_{i,1} - \delta u_{i,K} v_{i,K}) - \frac{\tau}{h} \sum_{n=1}^{K-1} (\delta u_{1,n} v_{0,n+1} + \delta u_{1,N-1} v_{N,n+1}). \end{aligned}$$

В стационарной точке должно выполняться равенство  $\delta L = 0$ , следовательно, можно сказать, что множители, стоящие при одинаковых вариациях, равны нулю, т. е. можем записать постановку сопряженной задачи:

$$\frac{v_{i,k} - v_{i,k+1}}{\tau} = \lambda \frac{v_{i+1,k+1} - 2v_{i,k+1} + v_{i-1,k+1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{K-1, 1}, \quad (28)$$

$$v_{0,k} = 0, \quad v_{N,k} = 0, \quad k = \overline{K, 1}, \quad (29)$$

$$v_{i,K} = 2(u_{i,K} - \psi(x_i)), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (30)$$

Преобразуем выражение для приращения функционала (27):

$$\begin{aligned} \delta J[g] &= 2h \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i,K} - \psi(x_i)) \delta u_{i,K} = h \sum_{i=1}^{N-1} v_{i,K} \delta u_{i,K} \\ &= -h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{K-1} (v_{i,n} \delta u_{i,n} - v_{i,n+1} \delta u_{i,n+1}) + h \sum_{i=1}^{N-1} v_{i,1} \delta u_{i,1} \\ &= -\tau h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{K-1} \left( \frac{v_{i,n} - v_{i,n+1}}{\tau} \delta u_{i,n} - v_{i,n+1} \frac{\delta u_{i,n+1} - \delta u_{i,n}}{\tau} \right) + h \sum_{i=1}^{N-1} v_{i,1} \delta u_{i,1}. \end{aligned}$$

Разностные производные по времени заменим их выражениями из соотношений (23) и (28), тогда

$$\begin{aligned} \delta J[g] = \tau h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{K-1} & \left( v_{i,n+1} \lambda \frac{\delta u_{i+1,n} - 2\delta u_{i,n} + \delta u_{i-1,n}}{h^2} \right. \\ & \left. - \lambda \frac{v_{i+1,n+1} - 2v_{i,n+1} + v_{i-1,n+1}}{h^2} \delta u_{i,n} \right) \\ & + \tau h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{K-1} v_{i,n+1} \delta g_i + h \sum_{i=1}^{N-1} v_{i,1} \delta u_{i,1}. \end{aligned}$$

Если в первой двойной сумме в первом слагаемом «перекинуть» разностную производную на  $v_{i,n+1}$ , учитывая краевые условия (24) и (29), нетрудно показать, что первая двойная сумма равна нулю. Найдем выражение для  $\delta u_{i,1}$  через  $\delta g_i$ . Из постановки задачи для  $\delta u_{i,n}$  имеем

$$\delta u_{i,1} = \delta u_{i,0} + \frac{\lambda \tau}{h^2} (\delta u_{i+1,0} - 2\delta u_{i,0} + \delta u_{i-1,0}) + \tau \delta g_i.$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\delta u_{i+1,0} - 2\delta u_{i,0} + \delta u_{i-1,0} = \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{N-1} (K_{i+1,j} - 2K_{i,j} + K_{i-1,j}) \delta g_j.$$

В силу определения функции  $K_{ij}$  (см. (10)) имеем

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{i-1} (K_{i+1,j} - 2K_{i,j} + K_{i-1,j}) \delta g_j &= 0, \\ \frac{h}{\lambda} (K_{i+1,i} - 2K_{i,i} + K_{i-1,i}) \delta g_i &= -\frac{h^2}{\lambda} \delta g_i, \\ \frac{h}{\lambda} \sum_{j=i+1}^{N-1} (K_{i+1,j} - 2K_{i,j} + K_{i-1,j}) \delta g_j &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\delta u_{i,1} = \delta u_{i,0} = \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{N-1} K_{i,j} \delta g_j.$$

Это позволяет написать

$$\delta J[g] = \tau h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{K-1} v_{i,n+1} \delta g_i + h^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} v_{i,1} K_{ij} \delta g_j,$$

откуда следует выражение для функционала невязки (27):

$$J'_i[q] = \tau \sum_{n=1}^{K-1} v_{i,n+1} + h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ji} v_{j,1}.$$

#### 5.4. Выражение для шага $\gamma$ численной реализации алгоритма 3.

Пусть в постановке прямой задачи (23)–(25) сеточная функция  $g_i = g_i^{[k]} - \gamma q_i^{[k]}$ . Нетрудно видеть, что решение этой задачи  $u_{i,K}$  представляется в виде  $u_{i,K} = \hat{u}_{i,K} - \gamma \check{u}_{i,K}$ , где  $\hat{u}_{i,K}$  — решение прямой задачи (23)–(25) с  $g_i = g_i^{[k]}$  и  $\check{u}_{i,K}$  — решение прямой задачи (23)–(25) с  $g_i = q_i^{[k]}$  и  $\phi_0(x_i) = 0$ . Нетрудно получить, что

$$J[g^{[k]} - \gamma q^{[k]}] = J[g^{[k]}] - 2\gamma h \sum_{i=1}^{N-1} [\hat{u}_{i,K} - \psi(x_i)] \check{u}_{i,K} + \gamma^2 h \sum_{i=1}^{N-1} \check{u}_{i,K}^2.$$

Минимум для  $J[g^{[k]} - \gamma q^{[k]}$  достигается, когда

$$\gamma = \gamma^{[k]} = h \sum_{i=1}^{N-1} [\hat{u}_{i,K} - \psi(x_i)] \check{u}_{i,K} / h \sum_{i=1}^{N-1} \check{u}_{i,K}^2.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55–62.
2. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918.
3. Сабитов К. Б. Нелокальная задача для неоднородного уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 43. С. 596–602.
4. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.
5. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 3. С. 415–435.
6. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 3. С. 3–19.
7. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
8. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
9. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
10. Фикера Г. К единой теории краевых задач эллипτικο-параболических уравнений второго порядка // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
11. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
12. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 261–264.
13. Нахушев А. М. К теории краевых задач для уравнения смешанного гипербола-параболического типа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 273–276.
14. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: ФАН, 1986.
15. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 72–78.
16. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.
17. Рахманова Л. Х. Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 36–40.

18. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
19. Кожанов А. И., Зикиров О. С. Краевые задачи для дважды вырождающегося дифференциального уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 34–44.
20. Кожанов А. И., Мацеевская Е. Е. Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 718–731.
21. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
22. Зикиров О. С., Холиков Д. К. Разрешимость некоторых нелокальных задач для нагруженного уравнения третьего порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 77–88.
23. Зикиров О. С. Об одной задаче типа Дирихле для уравнения составного типа // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8, № 2. С. 19–26.
24. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 29–46.
25. Исломов Б. Аналоги задачи Трикоми для уравнения смешанного параболого-гиперболического типа с двумя линиями и различным порядком вырождения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1007–1014.
26. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболого-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. I // Узб. мат. журн. 2015. № 4. С. 47–56.
27. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболого-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. II // Узб. мат. журн. 2016. № 1. С. 49–56.
28. Салахитдинов М. С., Исломов Б. Задача Трикоми для общего линейного уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 3. С. 549–553.
29. Салахитдинов М. С., Уринов А. Н. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997.
30. Джамалов С. З., Ашуров Р. Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка // Изв. вузов. Математика. 2019. № 6. С. 11–22.
31. Егоров И. Е., Захарова Т. И. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 20–26.
32. Егоров И. Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 11–17.
33. Егоров И. Е. О смешанной задаче для одного гиперболого-параболического уравнения // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 3. С. 389–400.
34. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
35. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шихатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
36. Иванов В. К., Васин В. В., Таланов В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
37. Тихонов А. Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 2. С. 268–271.
38. Градштейн И. С. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Наука, 1963.
39. Верлянь А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986.
40. EqWorld, <http://eqworld.ipmnet.ru>
41. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
42. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
43. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.



44. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
45. Карчевский А. Л. Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 2. С. 235–238.
46. Kurpinar E., Karchevsky A. L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Probl. 2004. V. 20, N 3. P. 953–976.
47. Karchevsky A. L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5. P. 519–634.
48. Karchevsky A. L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 17, N 4. P. 385–402.
49. Дучков А. А., Карчевский А. Л. Определение глубинного теплового потока по данным мониторинга температуры донных осадков // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 61–85.
50. Назарова Л. А., Назаров Л. А., Карчевский А. Л., Вандамм М. Оценка диффузионно-емкостных параметров угольного пласта по данным измерения давления газа в скважине на основе решения обратной задачи // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 78–85.
51. Карчевский А. Л. Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 35–43.
52. Карчевский А. Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–149.

*Поступила в редакцию 23 мая 2022 г.*

*После доработки 17 августа 2022 г.*

*Принята к публикации 31 августа 2022 г.*

Меражова Шахло Бердиевна  
Бухарский государственный университет,  
ул. Мухамад Икбол, 11, Бухара 200117, Узбекистан  
shsharipova@mail.ru, s.b.merajova@buxdu.uz

UDC 519.633.6+519.642.3

ON NUMERICAL SOLVING AN INVERSE PROBLEM  
FOR A MIXED PARABOLIC–HYPERBOLIC TYPE  
EQUATION OF FINDING THE RIGHT–HAND SIDE

Sh. B. Merajova

**Abstract:** The paper proposes algorithms for numerical solving an inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic type equation with a nonlocal condition for finding the right-hand side of the equation. It was assumed that the function included in the nonlocal condition and the function that is additional information for solving the inverse problem may be known with some error, since they are the result of practical measurements. Three algorithms for the numerical solution are proposed. The numerical experiments of testing the proposed algorithms are presented.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009

**Keywords:** mixed parabolic-hyperbolic type equation, nonlocal condition, inverse problem, Fredholm equation of the 1st kind, residual functional, regularization.

REFERENCES

1. *Sabitov K. B. and Safin E. M.*, “The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain,” *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, **54**, No. 4, 48–54 (2010).
2. *Sabitov K. B. and Safin E. M.*, “The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type,” *Math. Notes*, **87**, No. 6, 880–889 (2010).
3. *Sabitov K. B.*, “Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain,” *Math. Notes*, **89**, No. 4, 562–567 (2011).
4. *Sabitov K. B. and Sidorov S. N.*, “Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition,” *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, **59**, No. 1, 39–50 (2015).
5. *Sabitov K. B.*, “Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation,” *Math. Notes*, **102**, No. 3, 378–395 (2017).
6. *Gelfand I. M.*, “Some questions of analysis and differential equations [in Russian],” *Uspekhi Mat. Nauk*, **14**, No. 3, 3–19 (1959).
7. *Frankl F. I.*, *Selected Works on Gas Dynamics*, Nauka, Moscow (1973).
8. *Tricomi F.*, *On Linear Equations of Mixed Type* [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1947).
9. *Tricomi F.*, *Lectures on Partial Differential Equations* [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
10. *Fichera G.*, “On a unified theory of boundary value problems for elliptic parabolic equations of second order,” in: *Boundary Problems in Differential Equations*, Proc. Sympos. (Madison, April 20–22, 1959), pp. 97–120, Univ. Wisconsin, Madison, WI (1960).
11. *Vragov V. N.*, *Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics* [in Russian], Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
12. *Bzhikhatlov Kh. G. and Nakhushhev A. M.*, “A boundary value problem for a mixed equation of parabolic-hyperbolic type,” *Sov. Math., Dokl.*, **9**, 1349–1352 (1968).
13. *Nakhushhev A. M.*, “On the theory of boundary value problems for an equation of mixed hyperbolic-parabolic type,” *Sov. Math., Dokl.*, **18**, 930–934 (1977).

14. *Dzhuraev T. D., Sopuev A., and Mamazhanov A.*, Boundary Value Problems for Equations of Parabolic-Hyperbolic Type [in Russian], FAN, Tashkent (1986).
15. *Kapustin N. Yu.*, "The Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate hyperbolic part," *Differ. Equ.*, **23**, No. 1, 72–78 (1987).
16. *Sabitov K. B.*, "On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter," *Differ. Equ.*, **25**, No. 1, 93–100 (1989).
17. *Rakhmanova L. Kh.*, "Solution of a nonlocal problem by the spectral method for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular region [in Russian]," *Izv. Vuzov, Mat.*, **11**, 36–40 (2007).
18. *Kozhanov A. I.*, "A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem," *Math. Notes*, **76**, No. 6, 784–795 (2004).
19. *Kozhanov A. I. and Zikirov O. S.*, "Boundary value problems for a doubly degenerate differential equation with multiple characteristics [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **25**, No. 4, 34–44 (2018).
20. *Kozhanov A. I. and Matsievskaya E. E.*, "Degenerate parabolic equations with a variable direction of evolution [in Russian]," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **16**, 718–731 (2019).
21. *Kozhanov A. I.*, "Nonlinear loaded equations and inverse problems," *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**, No. 4, 657–675 (2004).
22. *Zikirov O. S. and Kholikov D. K.*, "Solvability of a mixed problem with an integral condition for a third-order hyperbolic equation," *J. Math. Sci.*, **245**, No. 3, 323–331 (2020).
23. *Zikirov O. S.*, "On a problem of Dirichlet type for a compound type equation [in Russian]," *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Fiz.*, **8**, No. 2, 19–26 (2016).
24. *Islomov B. I. and Ubaydullayev U. Sh.*, "The inverse problem for a mixed type equation with a fractional order operator in a rectangular domain," *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, **65**, No. 3, 25–42 (2021).
25. *Islomov B.*, "Analogues of the Tricomi problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with two lines and different order of degeneracy," *Differ. Equ.*, **27**, No. 6, 713–719 (1991).
26. *Islomov B. and Kholbekov Zh. A.*, "An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of type change, I [in Russian]," *Uzbek. Mat. Zhurn.*, No. 4, 47–56 (2015).
27. *Islomov B. and Kholbekov Zh. A.*, "An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of change of type, II [in Russian]," *Uzbek. Mat. Zhurn.*, No. 1, 49–56 (2016).
28. *Salakhitdinov M. S. and Islomov B.*, "The Tricomi problem for a general linear equation of mixed type with a no smooth line of degeneracy [in Russian]," *Dokl. AN SSSR*, **289**, No. 3, 549–553 (1986).
29. *Salakhitdinov M. S. and Urinov A. N.*, Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter, FAN, Tashkent (1997).
30. *Djamalov S. Z. and Ashurov R. R.*, "On one linear inverse problem for multidimensional equation of the mixed type of the first kind and of the second order," *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, **63**, No. 6, 8–18 (2019).
31. *Egorov I. E. and Zakharova T. I.*, "On the Fredholm property of a boundary value problem for an equation of mixed type [in Russian]," *Mat. Zamet. YaGU*, **20**, No. 1, 20–26 (2013).
32. *Egorov I. E.*, "On a boundary value problem for an equation of mixed type with a spectral parameter [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 1, 11–17 (2014).
33. *Egorov I. E.*, "On a mixed problem for a hyperbolic-parabolic equation," *Math. Notes*, **23**, No. 3, 389–400 (1978).
34. *Tikhonov A. N. and Arsenin V. Ya.*, Methods for Solving Ill-Posed Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1979).
35. *Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., and Shishatsky S. P.*, Non-Correct Problems of Mathematical Physics and Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
36. *Ivanov V. K., Vasin V. V., and Tanana V. P.*, Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
37. *Tikhonov A. N.*, "Stable methods of the summation of Fourier series," *Sov. Math., Dokl.*, **5**, 641–644 (1964).

38. *Gradshtein I. S. and Ryzhik I. M.*, Tables of Integrals, Sums, Series, and Products (4th ed.) [in Russian], Nauka, Moscow (1963).
39. *Verlan A. F. and Sizikov V. S.*, Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs [in Russian], Nauk. Dumka, Kiev (1986).
40. EqWorld (<http://eqworld.ipmnet.ru>).
41. *Tikhonov A. N.*, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method," *Sov. Math., Dokl.*, **5**, 1035–1038 (1963).
42. *Tikhonov A. N.*, "Regularization of incorrectly posed problems," *Sov. Math., Dokl.*, **4**, 1624–1627 (1963).
43. *Vasiliev F. P.*, Numerical Methods for Solving Extreme Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
44. *Vasiliev F. P.*, Methods for Solving Extreme Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
45. *Karchevsky A. L.*, "Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elasticity system," *Dokl. Earth Sci.*, **375**, No. 8, 1325–1328 (2000).
46. *Kurpinar E. and Karchevsky A. L.*, "Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media," *Inverse Probl.*, **20**, No. 3, 953–976 (2004).
47. *Karchevsky A. L.*, "Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **12**, No. 5, 519–634 (2004).
48. *Karchevsky A. L.*, "Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **17**, No. 4, 385–402 (2009).
49. *Duchkov A. A. and Karchevsky A. L.*, "Determination of terrestrial heat flow from temperature measurements in bottom sediments," *J. Appl. Ind. Math.*, **7**, No. 4, 480–502 (2013).
50. *Nazarova L. A., Nazarov L. A., Karchevsky A. L., and Vandamme M.*, "Estimating diffusion-capacity parameters of a coal bed using the gas pressure measured in a hole and the solution of an inverse problem," *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 2, 267–273 (2014).
51. *Karchevsky A. L.*, "Determination of the possibility of rock burst in a coal seam," *J. Appl. Ind. Math.*, **11**, No. 4, 527–534 (2017).
52. *Karchevsky A. L.*, "A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method," *Numer. Anal. Appl.*, **1**, No. 2, 114–122 (2008)

*Submitted May 23, 2022*

*Revised August 17, 2022*

*Accepted August 31, 2022*

Shakhlo B. Merajova  
Bukhara State University,  
11 Muhammad Iqbol Street, Bukhara, 200117 Uzbekistan  
[shsharipova@mail.ru](mailto:shsharipova@mail.ru)