Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
202_, №_, с. 1–9 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Ш. Б. МЕРАЖОВА

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В настоящей работы рассматривается краевая задача для смешанного интегро-дифференциального уравнения. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Для доказательство использован спектральный метод.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегро-дифференциальное уравнения, краевая задача, смешанное интегро-дифференциальное уравнение, прямая задача, спектральный метод, собственное значение, собственная функция.

УДК: 517.984

DOI: https://orcid.org/0000-0002-2241-6686

Введение

Различные вопросы физики и техники приводят к исследованию интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных и к постановке для них определенных задач. Точное решение которых либо невозможно выразить в замкнутом виде современными методами, либо эти решения выражаются в громоздком виде. В связи с этим теория таких уравнений давно привлекает внимание как физиков-теоретиков, так и математиков [1], [2].

Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа изучались в работах [3]-[6], [8]-[10]. Установлен критерий единственности и существования решения обратной задачи определения неизвестной правой части. Также в [11] рассматривались другие постановки обратной задачи. Вообще говоря, прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо известны, как аналогичные задачи для классических уравнений. Тем не менее, данные задачи так же имеют отношение к практике.

Численные алгоритмы решения обратной задачи требуют привлечения теории обратных и некорректных задач, которая разрабатывалась в работах [16]- [17].

В работах [5],[6] была рассмотрена прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа для одномерного и двумерного случаях, а в работе [7] предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений.

Поступила в редакцию _._.202_, после доработки _._.202_. Принята к публикации _._.202_.

Предложено три алгоритма численного решения. Проведён ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

В работах [12]-[15], [18]-[20] рассмотрены прямые и обратные задачи поставленные интегро-дифференциальным уравнениям и уравнениям смешанного типа.

В данной статье рассматривается задача для интегро-дифференциального уравнения смешанного типа и доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $G = \{(x,t): \ 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, интегро-дифференциальное уравнение смешанного типа

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \int_0^t K(\tau)u(x,t-\tau)d\tau + f(x), \quad t > 0, \\ \qquad\qquad u_{tt} - u_{xx} = f(x), \ t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

где α, β - заданные положительные числа.

Поставим следующую задачу: найти в области G функцию $u(x,t)$ удовлетворяющая уравнению (1) и следующим условиям:

краевые условия:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \ -\alpha \le t \le \beta, \tag{2}$$

начальное условие:

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \ x \in [0,l], \tag{3}$$

условия склейки при $t = 0$:

$$\lim_{t\to -0} u(x,t) = \lim_{t\to +0} u(x,t), \lim_{t\to -0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to +0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \ x \in [0,l], \tag{4}$$

здесь $\varphi(\cdot)$ - заданная достаточно гладкая функция.

Обозначим $G_+ = G \cap \{t > 0\}, \ G_- = G \cap \{t < 0\}$.

Уравнение (1) при $t > 0$ является интегро-дифференциальным уравнением с интегральным членом типа свёртки. Прямые начально-граничные задачи и обратные задачи определения свёрточного ядра $K(t)$ для таких уравнений исследованы в работах [21]-[32]. Получены теоремы существование, единственности, а также оценки устойчивости решения.

Определение. Решением задачи (1)-(4) назовем функцию $u(x, \ t)$ из класса $C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap \ C^{2,1}_{x,t}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ удовлетворяющую соотношениям (1)-(4).

2. Исследование начально-краевой задачи и формулировка результатов

В этой работе мы решаем задачу (1)-(4) и доказываем однозначную разрешимость этой задачи.

Разлагаем неизвестную функцию и начально заданные функции в ряды Фурье по системе $\{sin(\lambda_n x)\}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{5}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x), \tag{6}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}. \tag{7}$$

Подставлаем ряды для функций $u(x,t)$ и $f(x)$ в (1) получаем:

$$\begin{cases} u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n + \int_0^t K(\tau) u_n(t-\tau) d\tau, \quad t > 0, \\ u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n,\ t < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Введём следующее обозначение:

$$F_n(t; u_n) = \int_0^t K(\tau) u_n(t-\tau) d\tau. \tag{9}$$

Подставим (9) в (8) получим :

$$\begin{cases} u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n + F_n(t; u_n), \qquad t > 0, \\ u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n,\ t < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Решаем неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения в (10) методом вариации постоянных и получим общее решения в виде:

$$\begin{cases} u_n(t) = Ce^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u_n) \cdot e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} d\tau, \quad t > 0, \\ u_n(t) = C_1 \cos(\lambda_n t) + C_2 \sin(\lambda_n t) + \frac{f_n}{\lambda_n^2},\ t < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Используя условия склейки (4) и начальное условия (3) для неизвестных коэффициентов C, C_1, C_2 получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C + \frac{f_n}{\lambda_n^2} = C_1 + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, \\ -\lambda_n^2 C = \lambda_n C_2, \\ C_1 \cos(\lambda_n \alpha) - C_2 \sin(\lambda_n \alpha) + \frac{f_n}{\lambda_n^2} = \varphi_n. \end{cases}$$

Отсюда находим коэффициенты:

$$\begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = -\lambda_n C, \\ C\left(\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)\right) + \frac{f_n}{\lambda_n^2} = \varphi_n, \end{cases}$$

получим:

$$C = \frac{\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2}}{\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)}.$$

Введём обозначение:

$$\gamma_n = \cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha). \tag{12}$$

Используя обозначения (9) и (12), найденные коэффициенты подставляем в (11) и получим интегральное уравнение отностиельно $u_n(t)$ в $t > 0$ и явное решение $u_n(t)$ в $t < 0$, т.е.:

$$\begin{cases} u_n(t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2}\right] e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u_n) \cdot e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} d\tau,\ t > 0, \\ u_n(t) = \frac{\cos(\lambda_n t) - \lambda_n \sin(\lambda_n t)}{\gamma_n}\left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2}\right] + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, \qquad t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

3. Существование и единственность решения задачи (1)-(4)

Если в (13) свободный член и ядро непрерывные функции, тогда методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость уравнений (13) в случае $t>0$.

Подставляя (13) в (5) получим формальное решение поставленной задачи в виде рядов

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\gamma_n}\left[\varphi_n-\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right]e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{f_n}{\lambda_n^2}+\int_0^t F_n(\tau;u)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin(\lambda_n x), t>0, \quad (14)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(\lambda_n t)-\lambda_n\sin(\lambda_n t)}{\gamma_n}\left[\varphi_n-\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right]+\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right]\sin(\lambda_n x), t<0 \quad (15)$$

В работе [4] было доказано, что

$$|\gamma_n|=|\cos(\lambda_n\alpha)+\lambda_n\sin(\lambda_n\alpha)|\geq\alpha_0>0, \quad (16)$$

где α_0 - положительная постоянная, для случая $l=1$.

Для нашего случая верна следующая

Лемма 1. Если $\alpha=lp, p\in N$ или $\alpha=l\frac{m}{n}, m,n\in N$, $(m,n)=1$, тогда верно неравенство (16).

Сначала докажем существование решения.

Для доказательство существование решения нам нужно показать, что ряды (14) и (15) и ряды полученные дифференцированием из (14) один раз по t и два раза по x, а из (15) два раза по t и два раза по x сходятся равномерно.

Сначала оценим $u_n(t)$ для случая $t>0$:

$$|u_n(t)|=\left|\frac{1}{\gamma_n}\left[\varphi_n-\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right]e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{f_n}{\lambda_n^2}+\int_0^t F_n(\tau;u)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\alpha_0}\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}+\frac{1}{\lambda_n^2}\|K\|_0\int_0^t|u_n(\tau)|\,d\tau\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{\alpha_0}\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right)e^{-\frac{1}{\lambda_n^2}\|K\|_0 t}\leq$$

$$\leq max\left\{\frac{1}{\alpha_0},\frac{1}{\lambda_1^2}\right\}\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]e^{-\frac{1}{\lambda_n^2}\|K\|_0 t};$$

Используя полученную оценку, оценим ряд (14):

$$|u(x,t)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\lambda_n x\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)|\,|\sin\lambda_n x|\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)|\leq\overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n}\lambda_n|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n^2}+(\lambda_n|\varphi_n|)^2\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n^2}+\frac{|f_n|^2}{\lambda_n^2}\right]\leq$$

$$\leq\overline{C}_1+\left\|\varphi'\right\|_{L^2(0,l)}+\|f\|_{L^2(0,l)}.$$

Теперь оценим ряды полученные дифференцированеим два раза по x и один раз по t из ряда (14), для этого вычислим $u_{xx},\ u_t$ из (14) и получим оценки для полученных рядов:

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_n(t)\sin\lambda_n x.$$

$$|u_{xx}(x,t)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_n(t)\sin\lambda_n x\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left|u_n(t)\right|\le$$

$$\le\overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]=\overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|+|f_n|\right]=$$

$$=\overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n}\left|\lambda_n^3\varphi_n\right|+\frac{1}{\lambda_n}\left|\lambda_n f_n\right|\right]\le$$

$$\le\overline{C}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n^3\varphi_n\right|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n f_n\right|^2\right)^{1/2}\right)\le$$

$$\le\widetilde{C}_1\left(\left\|\varphi^{'''}\right\|_{L^2(0,l)}+\left\|f^{'}\right\|_{L^2(0,l)}\right).$$

Из (10) находим: $u^{'}{}_n(t)=F_n(t;u)-\lambda_n^2u_n(t)$. Оценим это равенство:

$$\left|u^{'}{}_n(t)\right|\le\lambda_n^2\left|u_n(t)\right|+\left|F_n(t;u)\right|+|f_n|\le\overline{C}\lambda_n^2\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]+$$

$$+|f_n|+\left|\int_0^t K(\tau)u_n(t-\tau)d\tau\right|\le\overline{C}\lambda_n^2\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]+$$

$$+|f_n|+\|h\|_0\,\overline{C}\left[|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\right]e^{\frac{1}{\lambda_n^2}\|h\|_0T}T\le$$

$$\le\overline{C}\left[\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|+\lambda_n\left|f_n\right|\right],$$

$$\overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|+|f_n|\right]<\infty.$$

Теперь получим оценку для случая $t<0$.

Сначала оценим $u_n(t)$:

$$|u_n(t)|=\left|\frac{\cos\left(\lambda_n t\right)-\lambda_n\sin\left(\lambda_n t\right)}{\gamma_n}\left[\varphi_n-\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right]+\frac{f_n}{\lambda_n^2}\right|.\quad\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha_0}\left[\lambda_n\left|\varphi_n\right|+\frac{|f_n|}{\lambda_n}\right]+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha_0}\left[\lambda_n\left|\varphi_n\right|+\frac{|f_n|}{\lambda_n}\right]+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\le$$

$$\le max\left\{\frac{1}{\alpha_0},\frac{1}{\lambda_n}\right\}\left[\lambda_n\left|\varphi_n\right|+\frac{|f_n|}{\lambda_n}\right];$$

Используя полученную оценку, оценим ряд (15) :

$$|u(x,t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\lambda_n x\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)|\,|\sin\lambda_n x| \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \le \overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n}\right] \le$$
$$\le \left\|\varphi''\right\|_{L^2(0,l)} + \|f\|_{L^2(0,l)}\,.$$

Покажем два раза по x и по t дифференцируемость (15). Для этого вычислим $u_{xx},\ u_{tt}$ и получим оценки для полученных рядов.

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_n(t)\sin\lambda_n x.$$

$$|u_{xx}(x,t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_n(t)\sin\lambda_n x\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|u_n(t)| \le$$
$$\le \overline{C_1}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left[\lambda_n|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n}\right] = \overline{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^3|\varphi_n| + \lambda_n|f_n|\right] =$$
$$= \overline{C_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n}\left|\lambda_n^4\varphi_n\right| + \frac{1}{\lambda_n}\left|\lambda_n^2 f_n\right|\right] \le$$
$$\le \overline{C_1}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n^4\varphi_n\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n^2 f_n\right|^2\right)^{1/2}\right) \le$$
$$\le \widetilde{C}_1\left(\left\|\varphi^{(4)}\right\|_{L^2(0,l)} + \left\|f''\right\|_{L^2(0,l)}\right).$$

Из (10) для $t<0$ находим: $u''{}_n(t) = F_n(t;u) - \lambda_n^2 u_n(t)$. Оценим это равенство:

$$\left|u''{}_n(t)\right| \le \lambda_n^2|u_n(t)| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \le \overline{C_2}\lambda_n^2\left[\lambda_n|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n}\right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2}$$
$$\le \overline{C_2}\lambda_n^2\left[\lambda_n|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n}\right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \le$$
$$\le \overline{C_2}\left[\lambda_n^3|\varphi_n| + \lambda_n|f_n|\right],$$

получим

$$\overline{C_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^2|\varphi_n| + \lambda_n|f_n|\right] < \infty.$$

Теперь докажем единственность решения.

Решаем задачу (1)-(4) для случая $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$, тогда решения получим в следующим виде:

$$u(x,t) = \begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t F_n(\tau;u)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\sin\left(\lambda_n x\right), t>0\\ 0,\quad t<0.\end{cases}$$

Для доказательство единственности используем неравенство Гронуолла-Беллмана, т.е. следующую лемму:

Лемма2. [33] Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0+h]$ и удовлетворяет в этом промежутке неравенству

$$0 \le u(x) \le A + B\int_{x_0}^{x} u(t)dt + \varepsilon(x-x_0), \quad A \ge 0, \quad B \ge 0, \quad \varepsilon \ge 0,$$

тогда при $x \in [x_0, x_0+h]$ справедливо неравенство:

$$u(x) \le Ae^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B}\left(e^{B(x-x_0)} - 1\right)$$

В нашем случае:

$$u_n(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau K(s)u_(\tau - s)ds\right) e^{\lambda n^2(t-\tau)}d\tau,$$

где

$$A = 0, \quad B = T||K||, \quad \varepsilon = 0,$$

$$u_n = (u, X_n) = 0,$$

т.е. $(u, \sin(\lambda_n x)) = 0$ и выполняются следующие:

$$\begin{cases} u \in C(\overline{G}), \\ K \in C[0,\beta]. \end{cases}$$

Из неравенство Гронуолла-Беллмана получим

$$|u| \le 0,$$

отсюда $u(x,t) \equiv 0$. Таким образом доказали следующую теорему:

Теорема. Пусть выполнены условия Лемма 1 и

$A_1)$ $\varphi \in C^3[0,l]$, $\varphi^{(IV)} \in L^2(0,l)$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$,

$A_2)$ $f \in C^1[0,l]$, $f'' \in L^2(0,l)$ и $f(0) = f(l) = 0$,

$A_3)$ $K \in C[0,\beta]$.

Тогда прямая задача (1)-(4) имеет единственное решение, которое представляется в виде ряда (14) и (15).

Литература

[1] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики* (Изд-во Наука, М., 1984).

[2] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи.* (Сибирское научное изд-во, Новосибирск, 2009).

[3] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Математика **4**, 55–62 (2010).

[4] Сабитов К.Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического в прямоугольной области*, Мат. заметки **86** (2), 273–279 (2009).

[5] Merajova Sh.B. *Inverse source problem of determining the right side for equation of mixed parabolic-hyperbolic type: one-dimensional case.*, Uzbek Mathematical Journal **66(4)** (4), 93-104 (2022).

[6] Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором бесселя.*, Сибирский журнал индустриальной математики (Journal of Applied and Industrial Mathematics) **25** (3), 14–25. (2022).

[7] Меражова Ш.Б. *О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа по определению правой части уравнения.*, Математические заметки СВФУ (Mathematical notes of NEFU) **29** (3), 108–127. (2022).

[8] Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. *О решении обратных задач для уравнения смашенного параболо-гиперболического типа: одномерный случай.*, Научный вестник Бухарского государственного университета **1** (1), 2-6 (2015).

[9] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа* (ФАН, Ташкент, 1986).

[10] Капустин Н.Ю. *Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью*, Дифференц. уравнения **23** (1), 72–78 (1987).

[11] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром*, Дифференц. уравнения **25** (1), 117–126 (1989).

[12] Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. *Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды*, Сиб. журн. индустр. математики. **23** (2), 63-80 (2020).

[13] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. *Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка*, Изв. вузов. Математика **6**, 11–22 (2019).

[14] Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. *О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью*, Сиб. мат. журн. **62** (2), 269-285. (2021).

[15] Егоров И.Е. *О смешанной задаче для одного гиперболо-параболического уравнения*, Мат. заметки **23** (3), 389–400 (1978).

[16] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1979).

[17] Карчевский А.Л. *Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом*, Сибирский журнал вычислительной математики **11** (2), 139–149 (2008).

[18] Durdiev U.D. *A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation.*, Eurasian journal of mathematical and computer applications **7** (2), 14–19 (2019).

[19] Durdiev U.D. *An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equation in the Homogeneous Anisotropic Media.*, Journal of Applied and Industrial Mathematics - Springer **13** (4), 1–8 (2019).

[20] Акрамова Д.И. *Обратная коэффициентная задача для дробно-диффузионного уравнения с оператором Бесселя.*, Известия вузов. Математика (9), 45–57 (2023).

[21] Durdiev, D. K. and Zhumayev, Zh Zh *Problem of Determining the Thermal Memory of a Conducting Medium*, Differential Equations **56** (6), 796-807 (2020).

[22] Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D. *The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation*, Siberian Math. J. **58** (3), 427-444 (2017).

[23] Durdiev, Durdimurod Kalandarovich and Totieva, Zhanna Dmitrievna *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations*, Math Methods in Appl Sciences. **41** (17), 8019-8032 (2018).

[24] Durdiev, Durdimurod ; Shishkina, Elina ; Sitnik, Sergey *The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space*, Lobachevskii Journal of Mathematics **42** (6), 1264-1273 (2021).

[25] Rahmonov A.A, Durdiev D.K. *A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity*, Math Meth Appl Sci, 1-21 (Oct 2020).

[26] Durdiev, D. K. *On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], **19** (4), 658-666 (2015).

[27] Durdiev, D. K. and Safarov, J. Sh. *The local solvability of a problem of determining the spatial part of a multidimensional kernel in the integro-differential equation of hyperbolic type*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], **4** (29), 37-47 (2012).

[28] Totieva, Zh. D. and Durdiev, D. K. *The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation*, Math. Notes **103** (1), 129-146 (2018).

[29] Safarov, Zh. Sh. and Durdiev, D. K. *Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics*, Differential Equations **54** (1), 134-142 (2018).

[30] Durdiev, Durdimurod Kalandarovich and Totieva, Zhanna Dmitrievna *The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems **28** (1) (2019).

[31] Durdiev, Durdimurod K. ; Rahmonov, Askar A. ; Bozorov, Zavqiddin R. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math Methods in Appl Sciences. **44** (13), 10753-10761 (2021).

[32] Durdiev, D. K. *Inverse Coefficient Problem For The Time-Fractional Diffusion Equation,*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications **9** (1), 44-54 (2021).

[33] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений* (ИЛ, М., 1954).

Шахло Бердиевна Меражова

Бухарский государственный университет,
ул. Мухамад Икбол, д. 11, г. Бухара, 200117 Узбекистан,

e-mail: shsharipova@mail.ru, s.b.merajova@buxdu.uz

Sh.B. Merajova

Single-valued solvability of the direct problem for one mixed integro-differential equation

Abstract. In this paper, we consider a boundary value problem for a mixed integro-differential equation. The unique solvability of the problem posed is proved. The spectral method was used for proof.

Keywords: mixed type equation, integro-differential equation, boundary value problem, mixed integro-differential equation, direct problem, spectral method, eigenvalue, eigenfunction.

Shakhlo Berdievna Merajova

Bukhara State University,
11 Muhammad Iqbol str., Bukhara, 200117 Uzbekistan,

e-mail: shsharipova@mail.ru, s.b.merajova@buxdu.uz