Matematika Instituti Byulleteni

Bulletin of the Institute of Mathematics

Бюллетень Института Математики

2022

5(1)

ISSN 2181-9483

http://mib.mathinst.uz

Mundarija

Contents

Содержание

Matematika Instituti Byulleteni
2022, Vol. 5, №1, 37-43 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2022, Vol. 5, №1, pp.37-43

Бюллетень Института математики
2022, Vol. 5, №1, стр.37-43

Эквивариантные отображения гиперпространства

Д. И. Жумаев[1], **Д. Р. Бешимова**[2]

Giperfazoning eqvivariant akslantirishlari

Maqolada Tixonov (xususan, kompakt Xausdorf) fazosidagi har bir topologik almashtirishlar gruppasi giperfazoning topologik almashtirishlar gruppasini hosil qilishi ko‘rsatilgan. Keyinchalik, agar berilgan Tixonov fazolari orasidagi akslantirishi ekvivariant bo‘lsa, mos giperfazolar orasidagi dastlabki akslantirishdan indusirlangan akslantirish ham ekvivariant ekanligi isbotlangan. Bundan berilgan Tixonov fazolari orasidagi uzluksiz akslantirish ekvivalent ekanligidan mos giperfazolar orasidagi mos uzluksiz akslantirishi ham ekvivalentlik bo‘lishi kelib chiqishi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Topologik almashtirishlar gruppasi; giperfazo; ekvivariant akslantirish.

Equivariant maps of hyperspaces

In the paper it is shown that each topological transformation group on a Tychonoff (in particular, a compact Hausdorff) space generates a topological transformation group on the hyperspace. Further, it is proved that a continuous map between hyperspaces is equivariant if the map between the original Tikhonov spaces, which induces it, is equivariant. Hence it follows that a continuous map between hyperspaces is an equivalence if the map between given Tychonoff spaces, which induces it, is an equivalence.

Keywords: A group of topological transformations; hyperspace; equivariant map.

MSC 2010: 22C05, 28C10

Ключевые слова: группа топологических преобразований; гиперпространство; эквивариантное преобразование.

Введение

Исследование воздействий функторов на топологическую группу преобразований началось в работе [4]. Авторы отмеченной работы установили результаты в этом направлении, касающиеся воздействию функтора вероятностных мер на топологическую группу преобразований. В данной работе мы установим некоторые результаты, относящиеся воздействию функтора гиперпространства на топологическую группу преобразований.

[1]Ташкентский архитектурно строительный институт. E-mail: d-a-v-ron@mail.ru

[2]Бухарский государственный университет. E-mail: Drbeshimova@gmail.com

Теория топологических групп преобразований является неотъемлемой частью алгебры и общей топологии. Одним из основным топологическим аппаратом когомологических методов теории компактных групп преобразований является эквивариантная теория когомологий [7].

Группа топологических преобразований есть тройка (G, X, α), где G – топологическая группа, X – хаусдорфово топологическое пространство, $\alpha\colon\ G\times X\to X$ – такое непрерывное отображение, что

1) $\alpha(g_1,\, \alpha(g_2,\, x)) = \alpha(g_1g_2,\, x)$ для всех $g_1,\, g_2\in G$ и $x\in X$;

2) $\alpha(e,\, x) = x$ для всех $x\in X$, где e – единица группы G (см., например, [3], [6]).

Отображение $\alpha\colon\ G\times X\ \to\ X$ называется действием группы G на пространстве X. Пространство X фиксированным действием α группы G считается G-пространством (или, более точно, левым G-пространством). Напомним, что правым G-пространством будет пространство X, рассматриваемое вместе с непрерывным отображением $\alpha_r\colon\ X\times G\to X$, для которого $\alpha_r(x,\, g_1g_2) = \alpha_r((xg_1),\, g_2)$ и $\alpha_r(x,\, e) = x$, для всех $g_1,\, g_2\in G$ и $x\in X$. Легко видеть, что любое правое G-пространство X можно превратить в левое G-пространство, положив $\alpha_l(g,\, x) = \alpha_r(x,\, g^{-1})$. Поэтому достаточно рассматривать лишь левые G-пространства.

Обычно для G-пространства используются те же термины и обозначения, что и для основного пространства, считая отображение α само собой разумеющимся.

Например, вместо $\alpha(g,\, x)$ пишется просто $g(x)$ или gx, так что равенства 1) и 2) перепишутся соответственно как

$$1')\ g_1(g_2(x)) = (g_1g_2)(x) \qquad \text{и} \qquad 2')\ e(x) = x.$$

Если $H\subset G$ и $A\subset X$, то $H(A) := \{g(x)\,:\, g\in H,\, x\in A\}$. Множество A называется инвариантным относительно действия группы G (или G-инвариантным), если $G(A) = A$.

Пусть (G, X, α) – группа топологических преобразований. Для каждого $g\in G$ формула $\alpha_g(x) = g(x)$ определяет отображение $\alpha_g\colon\ X\to X$. В силу $1')$ выполняется равенство $\alpha_{g_1}\alpha_{g_2} = \alpha_{g_1g_2}$, а из $2')$ вытекает, что α_e – тождественное отображение пространства X на себя.

Множество $\ker\alpha = \{g\in G\,:\, g(x) = x$ для всех $x\in X\}$ называется ядром действия α. Для каждого действия α его ядро $\ker\alpha$ есть нормальный делитель группы G (т. е. $gag^{-1}\in\ker\alpha$ для всяких $g\in G$ и $a\in\ker\alpha$) и замкнут в G [1].

Поскольку $\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = \alpha_e = \alpha_{g^{-1}}\alpha_g$, то для любого $g\in G$ отображение α_g есть гомеоморфизм пространства X на себя. Соответствие $g\to\alpha_g$ определяет гомеоморфизм $\alpha\colon\ G\to \mathrm{Homeo}\,(X)$, ядро которого называется ядром действия α, где $\mathrm{Homeo}\,(X)$ – группа всех гомеоморфизмов пространства X на себя.

Действие α называется эффективным, если $\ker\alpha = \{e\}$, т. е. для каждого $g\in G$ существует хотя бы одна точка $x\in X$, что $g(x)\neq x$.

Действие группы G на пространстве X считается свободным, если каждый нетривиальный элемент группы G перемещает каждую точку пространства X. Оно полусвободно, если каждая точка пространства X либо остается неподвижной при действии всех элементов группы G, либо перемещается при действии всех (нетривиальных) элементов из G.

Действие $\alpha\colon\ G\times X\to X$ компактной группы G на пространстве X есть замкнутое отображение [1]. Из этого следует, что, если G – компактная группа и X – некоторое G-пространство, то для любого замкнутого $A\subset X$ множество $G(A)$ замкнуто в X и для компактного A множество $G(A)$ компактно.

Пространство $\mathbb{R}^n$ естественным образом является [10], [11] примером G-пространства, здесь $G = GL(n,\,\mathbb{R})$ – полная линейная группа невырожденных матриц.

Топологическая группа G есть непрерывная группа преобразований пространства X. Если G – группа всех изометрических преобразований пространства X, то пространство G компактно и введенная в G топология (с помощью метрики) есть единственная компактная топология, превращающая группу G в непрерывную группу преобразований пространства X [5], [9].

Эквивариантное отображение (или G-отображение) – это отображение $f\colon\ X\ \to\ Y$ одного G-пространства в другое, которое коммутирует с действиями группы, т. е. $f(g(x)) = g(f(x))$ для всех $g\in G$ и $x\in X$. Более точное равенство выглядит так $f(\alpha_X(g,\, x)) = \alpha_Y(g,\, f(x))$, $g\in G$, $x\in X$, здесь $\alpha_X\colon\ G\times X\to X$ и $\alpha_Y\colon\ G\times Y\to Y$ – действия одной и той же группы G соответственно на пространства X и Y.

Эквивариантное отображение $f\colon X\ \to\ Y$, являющееся также гомеоморфизмом, называется эквивалентностью G-пространств X и Y. В этом случае обратное к f отображение f^{-1} также эквивариантно.

В данной работе показано, что каждая группа топологических преобразований на тихоновском (в частности компактном хаусдорфовом) пространстве порождает группу топологических преобразований на гиперпространстве. Далее доказано, что непрерывное отображение между гиперпространствами эквивариантно, если индуцирующее его отображение между исходных тихоновских пространств эквивариантно. Отсюда следует, что непрерывное отображение между гиперпространствами является эквивалентностью, если индуцирующее его отображение между заданными тихоновскими пространствами – эквивалентность.

Гиперпространство топологических пространств

Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$ [2]. Для подмножеств $U_1, ..., U_n \subset X$ положим

$$O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n, F \cap U_1 \neq \varnothing, ..., F \cap U_n \neq \varnothing\} =$$

$$= \{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n\} \cap (\overset{n}{\cap} F : F \in \exp_{i=1} X, F \cap U_i \neq \varnothing)$$

Если множества $U_1, ..., U_n$ открыты, то множества

$$\{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n\} = \exp(\bigcup_{i=1}^{n} U_i, X)$$

$$\{F : F \in \exp X, F \cap U_i \neq \varnothing\} = \exp X \setminus \exp(X \setminus U_i, X)$$

открыты в пространстве замкнутых подмножеств по определению топологии Вьеториса. Поэтому открытым является множество $O\langle U_1, ..., U_n\rangle$. С другой стороны, такой вид имеют и элементы предбазы топологии Вьеториса: $\exp(U, X) = O\langle U\rangle$, $\exp X \setminus \exp(X \setminus U, X) = O\langle U, X\rangle$. Таким образом, семейство всех множеств вида $O\langle U_1, ..., U_n\rangle$, где множества $U_1, ..., U_n$ открыты в пространстве X, является базой топологии Вьеториса. Полученное топологическое пространство $\exp X$ называется гиперпространством пространства X. Для компакта X гиперпространство $\exp X$ является компактом.

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение компактов, $F \in \exp X$. Положим

$$(\exp f)(F) = f(F).$$

Этим равенством определено отображение $\exp f : \exp X \to \exp Y$. Это отображение непрерывно. В самом деле, это вытекает из непосредственно проверяемой формулы

$$(\exp f)^{-1} O\langle U_1, ..., U_m\rangle = O\langle f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_m)\rangle.$$

Отметим, что если $f : X \to Y$ – эпиморфизм, то $\exp f$ также является эпиморфизмом.

Эквивалентность гиперпространств

Для тихоновского пространства X положим

$$\exp(\mathrm{Homeo}\,(X)) = \{\exp(g) :\ g \in \mathrm{Homeo}\,(X)\}.$$

Предложение 1. *Для произвольного тихоновского пространства X имеем*

$$\exp(\mathrm{Homeo}\,(X)) \subset \mathrm{Homeo}\,(\exp(X)).$$

Доказательство вытекает из нормальности функтора $\exp X$. □

Отметим, что включение обратить нельзя.

Пример 1. Пусть $X = \{a, b\}$ – двухточечное дискретное пространство. Тогда $\exp X$ гомеоморфно пространству $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ с дискретной топологией. Рассмотрим гомеоморфизм $h\colon X \to X$, определенный по правилу $h(a) = a$, $h(b) = b$. Ему соответствует гомеоморфизм $\exp(h) \in \mathrm{Homeo}\,(\exp\ X)$, который по правилу, определяется равенствами

$$\exp(h)(\{a\}) = h(\{a\}) = \{h(a)\} = \{a\},$$
$$\exp(h)(\{b\}) = h(\{b\}) = \{h(b)\} = \{b\},$$
$$\exp(h)(\{a, b\}) = h(\{a, b\}) = \{h(a), h(b)\} = \{a, b\}.$$

Гомеоморфизму $g\colon X \to X$, определенный по правилу $g(a) = b$, $g(b) = a$ соответствует гомеоморфизм $\exp(g) \in \mathrm{Homeo}\,(\exp\ X)$:

$$\begin{gathered}\exp(g)(\{a\}) = g(\{a\}) = \{g(a)\} = \{b\},\\ \exp(g)(\{b\}) = g(\{b\}) = \{g(b)\} = \{a\},\\ \exp(g)(\{a,\, b\}) = g(\{a,\, b\}) = \{h(a),\, h(b)\} = \{a,\, b\}.\end{gathered}$$

Определим гомеоморфизм $H\colon\ \exp\ X \to \exp X$ равенствами

$$\begin{gathered}H(\{a\}) = \{b\},\\ H(\{b\}) = \{a,\, b\},\\ H(\{a,\, b\}) = \{a\}.\end{gathered}$$

Очевидно, что не существует ни одного гомеоморфизма $f \in \mathrm{Homeo}\,(X)$, такого, что $\exp(f) = H$. Следовательно, $H \notin \exp(\mathrm{Homeo}\,(X))$, хотя $H \in \mathrm{Homeo}\,(\exp\ X)$.

Для топологической группы G топологического преобразования (G, X, α) положим

$$\exp(G) = \{\exp(\alpha_g) :\ g \in G\}.$$

Теорема 1. *Множество* $\exp(G)$ *является группой относительно операции* $\exp(\alpha_{g_1})\exp(\alpha_{g_2}) = \exp(\alpha_{g_1 g_2})$. *При этом* $\exp(\alpha_e)$ *– единица группы* $\exp(G)$.

Доказательство. Из ковариантности функтора exp следует, что для каждого $F \in \exp\ X$ справедливо

$$\begin{aligned}\exp(\alpha_{g_1})\exp(\alpha_{g_2})(F) = \exp(\alpha_{g_1})(\exp(\alpha_{g_2})(F)) = \exp(\alpha_{g_1})(\alpha_{g_2}(F)) = \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(F)) =&\\ = (\alpha_{g_1}\alpha_{g_2})(F) = \alpha_{g_1 g_2}(F) = \exp(\alpha_{g_1 g_2})(F),&\end{aligned}$$

т. е. $\exp(\alpha_{g_1})\exp(\alpha_{g_2}) = \exp(\alpha_{g_1 g_2})$.

Далее, для g, $g^{-1} \in G$ имеем

$$\begin{aligned}\exp(\alpha_g)\exp(\alpha_{g^{-1}})(F) = \exp(\alpha_g)(\exp(\alpha_{g^{-1}})(F)) = \exp(\alpha_g)(\alpha_{g^{-1}}(F)) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(F)) =&\\ = (\alpha_g\alpha_{g^{-1}})(F) = \alpha_{gg^{-1}}(F) = \alpha_e(F) = \exp(\alpha_e)(F),&\end{aligned}$$

т. е. $\exp(\alpha_g)\exp(\alpha_{g^{-1}}) = \exp(\alpha_e)$. С другой стороны,

$$\exp(\alpha_e)(F) = \alpha_e(F) = \{\alpha_e(x) :\ x \in F\} = \{e(x) :\ x \in F\} = \{x :\ x \in F\} = F, \qquad F \in \exp\ X. \tag{1}$$

Теорема 1 доказана. □

Теперь для α можно определить действие $\alpha^{\exp}\colon\ \exp\ G \times \exp\ X \to \exp\ X$ по правилу

$$\alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g),\, F) = \exp(\alpha_g)(F).$$

Предложение 2. *Для топологической группы* $(G,\, X,\, \alpha)$ *преобразований тройка* $(\exp\ G,\, \exp\ X,\, \alpha^{\exp})$ *является топологической группой преобразований.*

Доказательство состоит из проверки равенства 1) и 2). Проведем эту проверку:

$$\begin{aligned}1)\ \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_{g_1}),\, \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_{g_2}),\, F)) &= \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_{g_1}),\, \exp(\alpha_{g_2})(F)) = \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_{g_1}),\, \alpha_{g_2}(F)) =\\ &= \exp(\alpha_{g_1})(\alpha_{g_2}(F)) = \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(F)) = \alpha_{g_1 g_2}(F) =\\ &= \exp(\alpha_{g_1 g_2})(F) = \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_{g_1 g_2}),\, F);\\ 2)\ \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_e),\, F) &= \exp(\alpha_e)(F) = (\text{в силу } (1)) = F, \qquad F \in \exp\ X.\end{aligned}$$

Предложение 2 доказано. □

Предложение 3. *Если множество* $A \subset X$ *является* G*-инвариантным, то множество* $\exp\ A$ *является* $\exp\ G$*-инвариантным.*

Доказательство. Пусть $G(A) = A$. Тогда для каждого $g \in G$ сужение $\alpha_g\big|_A$ является гомеоморфизмом подпространства $A \subset X$ на себя. Поэтому $\exp\ G(\exp\ A) = \{\exp(\alpha_g)(F) :\ g \in G,\, F \in \exp\ A\} \subset \exp\ A$.

Обратное включение вытекает из того, что $\alpha_e \in \exp G$. Предложение 3 доказано. □

Предложение 4. *Для топологической группы* (G, X, α) *преобразований имеем*

$$\ker \alpha^{\exp} = \exp(\ker \alpha).$$

Здесь

$$\ker \alpha^{\exp} = \{\exp(\alpha_g) \in \exp G : \exp(\alpha_g)(F) = F, \forall F \in \exp X\}$$

и

$$\exp(\ker \alpha) = \{\exp(\alpha_g) \in \exp G : g \in \ker \alpha\}.$$

Доказательство. Пусть $\exp(\alpha_g) \in \ker \alpha^{\exp}$ и $x \in X$. Тогда

$$\exp(\alpha_g)(\{x\}) = \{x\}.$$

С другой стороны, по определению

$$\exp(\alpha_g)(\{x\}) = \alpha_g\{x\} = \{\alpha_g(x)\} = \{g(x)\}.$$

Следовательно, $\{g(x)\} = \{x\}$, или $g(x) = x$, т. е. $g \in \ker \alpha$. Значит, $\exp(\alpha_g) \in \exp(\ker \alpha)$.

Обратно, пусть $\exp(\alpha_g) \in \exp(\ker \alpha)$. Тогда $g \in \ker \alpha$, т. е. $g(x) = x$ для всех $x \in X$. Следовательно, α_g – тождественный гомеоморфизм пространства X на себя. Поэтому $\exp(\alpha_g)$ также – тождественный гомеоморфизм пространства $\exp X$ на себя. Откуда $\exp(\alpha_g) \in \ker \alpha^{\exp}$. Предложение 4 доказано. □

Предложение 4 сразу влечет

Следствие 2. *Действие* $\alpha^{\exp}$ *эффективно тогда и только тогда, когда действие* α *эффективно.*

Известно [1], что любое действие α группы G на пространстве X с ядром $\ker \alpha = N$ каноническим образом индуцирует эффективное действие $\alpha/\ker \alpha$ группы G/N на X. При этом действие $\alpha/\ker \alpha\colon\ G/N \times X \to X$ определяется формулой $(\alpha/\ker \alpha)(gN, x) = \alpha(g, x)$, т. е. $gN(x) = g(x)$, $x \in X$. Здесь $gN = \{gh : h \in N\}$ – левый смежный класс группы G по N. Следовательно, действие $\alpha^{\exp}$ группы $\exp G$ на пространстве $\exp X$ с ядром $\ker \alpha^{\exp} = \exp N$ каноническим образом индуцирует эффективное действие $\alpha^{\exp}/\ker \alpha^{\exp}$ группы $\exp G/\exp N$ на $\exp X$. При этом $\alpha^{\exp}/\ker \alpha^{\exp}\colon\ \exp G/\exp N \times \exp X \to \exp X$ действует по правилу $\alpha^{\exp}/\ker \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g)\exp N, F) = \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g), F) = \exp(\alpha_g)(F) = \alpha_g(F)$.

Действие α называется транзитивным, если для каждых двух элементов x_1 и x_2 пространства X найдется такой элемент $g \in G$, что $g(x_1) = x_2$.

Отметим, что для транзитивного действия α группы G на пространстве X, действие α^P, индуцированное из α, может оказаться не транзитивным.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ (все эти три точки – различные). Пусть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

– группа перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. Действие $\alpha\colon G \times X \to X$ группы G на пространстве X определим по правилу $\alpha(g, x_i) = x_{g(i)}$. Тогда α – транзитивное действие. При этом $\alpha_g(x_i) = x_{g(i)}$. Ясно, что $\exp(\alpha_g)(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$ для каждого $g \in G$. Таким образом, ни для одного множества F, $F \neq X$ не существует элемент $\exp(\alpha_g)$ группы $\exp G$, для которого было бы $\exp(\alpha_g)(X) = F$. Следовательно, действие $\alpha^{\exp}$ не является транзитивным.

Пример 2 показывает, что действие группы $\exp G$ на пространстве $\exp X$ может оказаться не свободным, хотя действие группы G на пространстве X является свободным. Но, тем не менее справедливо следующее

Предложение 5. *Пусть* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *– конечное дискретное пространство,* G *– произвольная группа перестановок множества* X*. Тогда для каждого свободного действия* α *группы* G *на пространстве* X *соответствующее ему действие* $\alpha^{\exp}$ *группы* $\exp G$ *на пространстве* $\exp X$ *является* *полусвободной. При этом единственной точкой пространства* $\exp X$*, остающаяся не подвижной при действии всех элементов из* $\exp G$*, является множество* $X \in \exp X$*.*

Доказательство состоит из непосредственной проверки. □

Ясно, что если G – компактная группа, то $\exp G$ также – компактная группа.

Теорема 2. *Действие* $\alpha^{\exp}\colon \exp G \times \exp X \to \exp X$ *компактной группы* $\exp G$ *на пространстве* $\exp X$ *есть замкнутое отображение.*

Доказательство. Пусть $A \subset \exp G \times \exp X$ – замкнутое подмножество, $F \in \exp X$ – точка замыкания множества $\alpha^{\exp}(A)$. Тогда в A существует такая сеть $(\exp(\alpha_g)_t, F_t)$, что $\alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g)_t, F_t) = \exp(\alpha_g)_t(F_t)$ сходится к F. Так как $\exp G$ компактна, то сеть $\exp(\alpha_g)_t$ содержит сходящую подсеть. Пусть $\exp(\alpha_g)$ – предел этой подсети. Следовательно, $F_t = \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g)_t^{-1}, \exp(\alpha_g)_t(F_t))$ сходится к $\alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g)^{-1}, F) = \exp(\alpha_g)^{-1}(F)$. Поэтому сеть $(\exp(\alpha_g)_t, F_t)$ сходится к $(\exp(\alpha_g), \exp(\alpha_g)^{-1}(F)) \in A$ в силу замкнутости A. Таким образом, $F = \alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g), \exp(\alpha_g)^{-1}(F)) \in \alpha^{\exp}(A)$. Теорема 2 доказана. □

Следующее утверждение вытекает из теоремы 2.

Следствие 3. *Если* G *– компактная группа и* X *– некоторое* G*-пространство, то для любого замкнутого множества* $A \subset \exp X$ *множество* $(\exp G)(A)$ *замкнуто в* $\exp X$ *и для компактного* A *множество* $(\exp G)(A)$ *компактно.*

Теорема 3. *Если* $f\colon X \to Y$ *– эквивариантное отображение одного* G*-пространства в другое, то* $\exp(f)\colon \exp X \to \exp Y$ *также – эквивариантное отображение* $\exp G$*-пространств.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\exp(f)(\exp(\alpha_g)(F)) =& \exp(f)(\alpha_g(F)) = (f\circ\alpha_g)(F) =\\ =&\{(f\circ\alpha_g)(x) : x\in F\} = \{f(\alpha_g(x)) : x \in F\} = \{f(g(x)) : x\in F\} =\\ =&(\text{в силу эквивариантности отображения } f) =\\ =&\{g(f(x)) : x\in F\} = \{\alpha_g(f(x)) : x\in F\} = \alpha_g(\{(f(x)) : x\in F\}) =\\ =&\exp(\alpha_g)(\{(f(x)) : x\in F\}) = \exp(\alpha_g)(f(F)) = \exp(\alpha_g)(\exp(f)(F)), \qquad F\in\exp Y,\end{aligned}$$

т. е. $\exp(f)\exp(\alpha_g) = \exp(\alpha_g)\exp(f)$. Теорема 3 доказана. □

Из нормальности функтора exp и теоремы 3 вытекает

Следствие 4. *Если* $f\colon X \to Y$ *– эквивалентность* G*-пространств* X *и* Y*, то* $\exp(f)\colon \exp X \to \exp Y$ *– эквивалентность* $\exp G$*-пространств* $\exp X$ *и* $\exp Y$*.*

Литература

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. Москва, Наука, 1980.
2. Zaitov A. A., Jumaev D. I., Hyperspace of the Π-complete spaces and maps. *Eurasian Math. J.*, 12(2), 2021, pp. 104-110.
3. Мадиримов М. Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований. Ташкент, Фан, 1987.
4. Madirimov M., Zaitov A. A. Equivariant maps of probability measures space. *Bull. Inst. Math.*, 2021, 4(3), pp. 66-74. [In Russian]
5. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Москва, Наука, 1973.
6. Смирнов Ю. М. Об эквивариантных вложениях G-пространств. *Успехи математических наук*, 31(5), 191, 1976, стр. 137-147.
7. Сян У. И. Когомологическая теория топологических групп преобразований. Москва, Мир, 1979.
8. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. Москва, Физматлит, 2006.
9. Филиппов В. В. О размерности пространств с действием бикомпактной группы. *Математические заметки*, 25(3), 1979, с. 329-334.

10. Jaworowski, Jan W. Equivariant extensions of maps. *Pacific Journal of Mathematics*, 45(1), 1973, pp. 229-244.

11. Jaworowski, Jan W. An equivariant extension theorem and G-retracts with a finite structure. *Manuscripta Mathematica*, 35(3), 1981, pp. 323-329.

Получено: 20/12/2021

Принято: 11/03/2022

Cite this article

Jumaev D. I., Beshimova D. R. Equivariant maps of hyperspaces. *Bull. Inst. Math.*, 2022, Vol.5, №1, pp. 37-43. [In Russian]