БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КАФЕДРАСИ

# МАТЕМАТИКА ВА УНИ ЎҚИТИШНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

(мақолалар тўплами)

# II

БУХОРО–2021

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КАФЕДРАСИ

# МАТЕМАТИКА ВА УНИ ЎҚИТИШНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

**(мақолалар тўплами)**

# II

БУХОРО–2021

**МУАЛЛИФЛАР ЖАМОАСИ.** Математика ва уни ўқитишнинг замонавий усуллари (мақолалар тўплами). II-қисм. – Бухоро, 100 б.

Ушбу тўпламда математика фанини ўқитишда янги педагогик технологиялар ва интерфаол усуллар, шарқ алломаларининг математикага доир ишларидан таълим жараёнида жараёнида фойдаланиш, олий таълим ва касб-ҳунар таълими орасидаги узвийлик каби масалалар бўйича долзарб муаммолар, уларни ҳал этиш бўйича таклиф ва тавсияларга асосланган мақолалар жамланган.

Мақолалар тўплами Олий ва ўрта махсус таълими ҳамда умумтаълим мактаблари педагог ходимлари, таянч докторантлар, мустақил тадқиқотчилар, магистрантлар, бакалавр таълим йўналиши талабалари ҳамда ушбу соҳага қизиқувчилар фойдаланишлари мумкин.

Тўпламга киритилган мақолалар мазмуни ва далилларнинг ҳаққонийлиги учун муаллифлар масъулдирлар.

Мақолалар тўплами Бухоро давлат университети Математик анализ кафедрасининг 2021 йил 10 февралдаги йиғилиш қарори ва Физика-математика факультети Илмий кенгашининг 2021 йил 11 февралдаги навбатдан ташқари йиғилиши қарори билан нашрга тавсия этилган.

**МАСЪУЛ МУҲАРРИРЛАР:**

**Т.Ҳ.Расулов** – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.
**Б.Ж.Мамуров** – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.
**Ҳ.Р.Расулов** – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

**ТЕХНИК МУҲАРРИРЛАР:**

**Д.Э.Дилмуродов** – БухДУ Математик анализ кафедраси таянч докторанти
**Ғ.Ғ.Қурбонов** – БухДУ Математик анализ кафедраси таянч докторанти
**Н.А.Тошева** – БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси
**Б.И.Бахронов** – БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

чиқади. Теорема исботланди.

**Фойдаланилган адабиётлар**

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия Т. 2008 й.

2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Аналитик геометриядан масалалар тўплами. Т., Университет, 586 б., 2006 й.

3. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М., Наука, 1990.

4. Погорелов А.В. Аналитик геометрия. Т., Ўқитувчи, 1983.

5. М.А.Мирзаахмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.Қ.Аманов, Б.Қ.Ҳайдаров "Математика 10" Тошкент, 2017.

## МУСБАТ СОНЛАР УЧУН ЎРТА ҚИЙМАТЛАР ВА УЛАР ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

**Муяссар БОБОЕВА**

*БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси*

**Тўлқин РАСУЛОВ**

*БухДУ Математик анализ кафедраси доценти*

Мазкур ишда иккита мусбат сон учун ўрта қийматнинг умумий таърифи ва уларнинг кўплаб турлари таҳлил қилинган. Иккита соннинг ўрта логарифмик қийматига алоҳида тўхталиб ўтилган. Ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта логарифмик қийматлар орасидаги боғланишлар баён қилинган. Маълумки, ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта вазни қийматлар билан боғлиқ масалалар мактаб дарсликларида ва олий ўқув юртларига кириш тест имтихонларда кўп учраб туради. Ўрта қийматлар, математик анализда, геометрияда, эҳтимоллар назарияси ва статистикада кўплаб тадбиқларга эга. Ишда келтирилган маълумотлардан умумтаълим мактабларида, академик лицей ва касб ҳунар коллежлари ҳамда олий таълим муассасалари талабаларига тўгараклар ва синфдан ташқари машғулотларни ташкил қилишда фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари, мусбат сонлар учун ўрта қийматлар орасидаги боғланишлар ёрдамида кўплаб олимпиада масалаларини ечиш мумкинлигини алоҳида таъкидлаб ўтиш жоиз.

Ишда келтирилган маълумотларни шакллантиришда асосан инглиз тилида ёзилган [1-3] адабиётлардан фойдаланилди.

Математика фанида ишлатилишидан боғлиқ равишда мусбат сонлар учун ўрта қийматнинг турли хилдаги таърифлари мавжуд. Қуйида биз тшундай таърифлардан бирини келтирамиз.

$R_+$ орқали номанфий ҳақиқий сонлар тўпламини белгилаймиз.

Агар $m: R_+ \times R_+ \to R_+$ функция ушбу

1) $m(a,b) = m(b,a)$;

2) $\min(a,b) \le m(a,b) \le \max(a,b)$;

3) барча $\alpha > 0$ лар учун $m(\alpha a, \alpha b) = \alpha m(a,b)$;

4) $a \le c \Rightarrow m(a,b) \le m(c,b)$;

5) $m$-узлуксиз;

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $m$ функцияга ўрта қиймат дейилади.

$a$ ва $b$ мусбат сонлар учун ўрта қиймат турларига тўхталамиз.

Бизга $f: R_+ \to R_+$ тескариланувчан функция берилган бўлсин. Ушбу

$$m_f(a,b) = f^{-1}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

миқдорга $a$ ва $b$ мусбат сонларнинг $f$ – ўрта қиймати дейилади.

Масалан, агар $f(x) = 2x+1$ бўлса, у ҳолда $m_f(2,8) = 5$ бўлади.

Баъзи хусусий ҳолларни қараймиз. Фараз қилайлик, $f(x) = x$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(x) = x$. Шу сабабли

$$m_x(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

тенглик ўринлидир. Ҳосил бўлган миқдорга $a$ va $b$ сонларнинг ўрта арифметик қиймати дейилади ва $A(a,b)$ каби белгиланади.

Иккинчи хусусий ҳол сифатида $f(x) = \ln x$ функцияни қараймиз.

Маълумки, $f^{-1}(x)=e^x$ тенглик ўринли бўлади. Содда ҳисоблашга кўра

$$m_{\ln x}(a,b)=\exp\left(\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)=\sqrt{\exp(\ln(ab))}=\sqrt{ab}$$

муносабатлар ўринлидир. Бундай усулда ҳосил қилинган миқдорга $a$ va $b$ сонларнинг ўрта геометик қиймати дейилади ва $G(a,b)$ каби белгиланади.

Энди $f(x)=1/x$ функцияни қараймиз. Бу ҳолда $f^{-1}(x)=1/x$ тенглик ўринли бўлиб, ҳосил бўлган

$$m_{1/x}(a,b)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

миқдорга $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта гармоник қиймати дейилади ва $H(a,b)$ каби белгиланади.

Агар $f(x)=x^2$ бўлса, у ҳолда $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ бўлади. Мазкур ҳолда

$$m_{x^2}(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

миқдорга $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта квадратик илдиз қиймати дейилади ва $B_2(a,b)$ каби белгиланади.

Фараз қилайлик, $f(x)=x^m$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(x)=\sqrt[m]{x}$ бўлиб, ушбу

$$m_{x^m}(a,b)=\left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{1/m},\ -\infty<m<\infty$$

миқдорга $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта биномиал, ўрта даражали ёки ўрта Гёльдер қиймати дейилади ва $B_m(a,b)$ каби белгиланади.

Бизга яхши маълумки, юқорида келтирилган ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлар математикада кўп учраб туради ва улар орасида

$$H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)$$

каби муносабатлар ўринлидир.

Аниқланишига кўра, агар $m$ сони -1, 1 ва 2 га тенг бўлса, у ҳолда $B_m(a,b)$

сони мос равишда ўрта гармоник, ўрта арифметик ва ўрта квадрати илдиз қийматига тенг бўлади, яъни

$$B_{-1}(a,b)=H(a,b),\ B_1(a,b)=A(a,b),\ B_2(a,b)=B_2(a,b).$$

Бундан ташқари, агар $m\le n$ бўлса, у ҳолда $B_m(a,b)\le B_n(a,b)$ тенгсизлик ўринли бўлиб,

$$\min(a,b)=\lim_{m\to\infty}B_m(a,b),\ \max(a,b)=\lim_{m\to-\infty}B_m(a,b)$$

тенгликлар ўринли бўлишини осон текшириб кўриш мумкин.

Баҳоси $a$ сўмлик $m$ кг ва $b$ сўмлик $n$ кг маҳсулот берилган бўлса, бу маҳсулотлар аралашмасининг бир кг

$$\frac{a\cdot m+b\cdot n}{m+n}$$

сўм туради. Ҳосил бўлган миқдорга $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта вазнли қиймати дейилади.

Математикада ўрта арифметик, ўрта геометрик, ўрта гармоник ва ўрта вазнли қийматлар кўп ишлатилади. Бироқ ўрта қийматнинг бундан бошқа яна кўплаб турлари мавжуддир. Мақоланинг қолган қисмида уларнинг ўзбек тилидаги адабиётларда кам учрайдиган турларига тўхталамиз. Ушбу

$$L(a,b)=\frac{a-b}{\ln a-\ln b},\ a\ne b,\ \big(L(a,a)=a\big)$$

сонга $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта логарифмик қиймати дейилади [1,2]. Амалиётда қўллаш учун қулай бўлган $L(a,b)$ бошқа эквивалент формулалари ҳам мавжуддир. Улар

$$L(a,b)=\int_0^1 a^t b^{1-t}dt;\ \frac{1}{L(a,b)}=\int_0^1\frac{dt}{at+b(1-t)};\ \frac{1}{L(a,b)}=\int_0^\infty\frac{dt}{(t+a)(t+b)}.$$

Кўриниб турибдики, агар $a\ne b$ бўлса, у ҳолда

$$G(a,b)<L(a,b)<A(a,b)$$

қатъий тенгсизлик ўринлидир.

Қуйидаги

$$H_\nu(a,b)=\frac{a^\nu b^{1-\nu}+a^{1-\nu}b^\nu}{2},\ 0\le\nu\le1$$

тенглик ёрдамида аниқланган сонга $a$ ва $b$ сонларнинг Heinz ўрта қиймати дейилади. Таърифдан кўриниб турибдики,

$$H_0(a,b)=H_1(a,b)=A(a,b),\ H_{1/2}(a,b)=G(a,b),\ H_{1-\nu}(a,b)=H_\nu(a,b).$$

Барча $0\le\nu\le1$ ларда

$$H_{1/2}(a,b)\le H_\nu(a,b)\le H_0(a,b)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини осон текшириш мумкин.

Бизга иккита $x$ ва $y$ ўзгарувчили $f$ функция берилган бўлсин. Агар ҳар бир $(x,y)$ вектор учун шундай $M$ сони топилиб, $f(M,M)=f(x,y)$ шарт бажарилса, $M$ сонига $x$ ва $y$ сонларнинг ўрта Chisini қиймати дейилади. Бу ўрта қиймат Oskar Chisini томонидан 1929 –йилда киритилган. Ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта квадратик илдиз қийматлар Chisini ўрта қийматларидир.

$a$ ва $b$ мусбат сонлари учун киритилган ушбу

$$C(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

миқдорга бу сонларнинг контра гармоник ўрта қиймати дейилади.

Киритилган ўрта қийматни характерловчи баъзи хоссаларни келтирамиз:

**1-хосса.** $C(a,b)\in[\min\{a,b\},\ \max\{a,b\}]$.

**2-хосса.** Барча $t>0$ лар учун $C(ta,ta)=tC(a,b)$ тенглик ўринлидир.

Таърифдан ва 2-хоссадан барча $k>0$ лар учун $C(k,k)=k$ тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади. Одатда бундай хоссага қўзғалмас нуқта хоссаси дейилади.

**3-хосса.** Ихтиёрий $a$ ва $b$ мусбат сонлари учун

$$\min\{a,b\}\le H(a,b)\le G(a,b)\le L(a,b)\le A(a,b)\le B_2(a,b)\le C(a,b)\le\max\{a,b\}$$

тенгсизликлар ўринлидир. Агар $a=b$ бўлса, охирги муносабатларда $\le$ белги $=$ белгисига алмашади.

Ўрта арифметик, ўрта гармоник ва контра гармоник ўрта қийматлар учун формулалар ёрдамида

$$2A(a,b)-H(a,b)=a+b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a+b}=C(a,b)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Бундан ташқари қуйидаги қўшимча хоссалар ҳам ўринлидир:

$A(H(a,b),C(a,b))=A(a,b)$;

$G(A(a,b),\ H(a,b))=G(a,b)$;

$G(A(a,b),\ C(a,b))=B_2(a,b)$.

Навбатдаги ўрта қиймат тури бу геометрик-гармоник ўрта қийматдир. Иккита $a$ ва $b$ мусбат сонлар учун геометрик-гармоник ўрта қиймат қуйидаги қоида орқали аниқланади. $g_0=a$ ва $h_0=b$ ларнинг ўрта геометрик қийматини $g_1$ орқали белгилаймиз, яъни $g_1=\sqrt{ab}$; бундан ташқари, $a$ ва $b$ мусбат сонларнинг ўрта гармоник қийматини $h_1$ орқали белгилаймиз, яъни

$$h_1=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

тенглик ўринлидир. Энди юқоридаги амалларни $a$ нинг ўрнига $g_1$ ва $b$ нинг ўрнига $h_1$ олиб итерация қиламиз, натижада бу усул ёрдамида иккита $\{g_n\}$ ва $\{h_n\}$ кетма-кетликлар қуйидаги муносабатлар орқали аниқланади:

$$g_{n+1}=\sqrt{g_n h_n},\quad h_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{g_n}+\frac{1}{h_n}}.$$

Ҳосил бўлган кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, бир хил лимитга эга бўлади, бу лимитга $a$ ва $b$ сонларнинг геометрик-гармоник ўрта қиймати дейилади ва $GH(a,b)$ каби белгиланади.

Баъзи адабиётларда геометрик-гармоник ўрта қийматлар гармоник-геометрик ўрта қийматлар деб ҳам юритилади.

$\{g_n\}$ ва $\{h_n\}$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эканлигини Больцано-

Вейерштрасс теоремасидан фойдаланиб кўрсатиш мумкин.

Геометрик-гармоник ўрта қиймат қуйидаги хоссаларга эга.

**4-хосса.** $GH(a,b)$ сони $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлари орасида ётади, яъни

$$G(x,y) \le GH(x,y) \le H(x,y).$$

**5-хосса.** Хусусий ҳолда $GH(a,b)$ сони $a$ ва $b$ сонларнинг орасида ётади. Масалан $x \le y$ бўлса, у ҳолда

$$x \le GH(x,y) \le y$$

бўлади.

**6-хосса.** Агар $r > 0$ бирор сон бўлса, у ҳолда

$$GH(ra,rb) = rGH(a,b)$$

тенглик ўринлидир.

**7-хосса.** Агар $AG(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг арифметик-геометрик қиймати бўлса, у ҳолда

$$GH(a,b) = \frac{1}{AG\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)}$$

тенглик ўринлидир.

**8-хосса.** Қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$\min\{a,b\} \le H(a,b) \le GH(a,b) \le G(a,b) \le AG(a,b) \le A(a,b) \le \max\{a,b\}.$$

$a$ ва $b$ мусбат сонлари учун қуйидаги

$$HA(a,b) = \frac{1}{3}\left(a + \sqrt{ab} + b\right)$$

тенглик ёрдамида аниқланган миқдорга, бу сонларнинг Heronian ўрта қиймати дейилади. Бу тушунча Hero Alexandria шарафига қўйилган бўлиб, пирамида ёки конуснинг ҳажмини топишда фойдаланилади. $a$ ва $b$ сонларининг Heronian ўрта қиймати бу сонларнинг ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$HA(a,b)=\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{ab}=\frac{2}{3}A(a,b)+\frac{1}{3}G(a,b).$$

$a$ ва $b$ мусбат сонлари учун

$$L_p(a,b)=\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}}$$

каби аниқланган миқдорга бу сонларнинг Lehmer ўрта қиймати дейилади. Бу тушунча Denrik Henry Lehmer шарафига қўйилгандир. Таъкидлаш жоизки, $L_p(a,b)$ функциянинг $p$ ўзгарувчи бўйича ҳосиласи номанфийдир ва шу сабабли, айнан шу ўзгарувчиси бўйича монотон ўсувчи функция бўлади ҳамда $p\le q$ бўлганда $L_p(a,b)\le L_q(a,b)$ тенгсизлик бажарилади.

Қуйидаги хоссалар ўринлидир:

**9-хосса.** $\lim\limits_{p\to-\infty}L_p(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг кичигига тенг.

**10-хосса.** $L_0(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта гармоник қийматига тенг.

**11-хосса.** $L_{1/2}(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта геометрик қийматига тенг.

**12-хосса.** $L_1(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта арифметик қийматига тенг.

**13-хосса.** $L_2(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта контра гармоник қийматига тенг.

$a$ ва $b$ сонлари учун

$$S_p(a,b)=\begin{cases} a & \text{агар } a=b \\ \left(\dfrac{a^p-b^p}{p^{(a-b)}}\right)^{1/p} & \text{акс холда} \end{cases}$$

миқдорга бу сонларнинг Stolarskiy ўрта қиймати дейилади.

**14-хосса.** $\lim\limits_{p\to-\infty}S_p(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг кичигига тенг.

**15-хосса.** $S_{-1}(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта геометрик қийматига тенг.

**16-хосса.** $S_2(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг ўрта арифметик қийматига тенг.

**17-хосса.** $\lim_{p\to+\infty} S_p(a,b)$ миқдор $a$ ва $b$ сонларнинг каттасига тенг.

Хулоса қилиб айтганда, мусбат сонлар учун ўрта қийматнинг яна кўплаб киритиш мумкин бўлиб, улар орасидаги муносабатлар олимпиада тенгсизликларини исботлашда, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини тенгсизликлар ёрдамида ҳисоблашда муҳим ўрин эгаллайди.

### Фойдаланилган адабиётлар

1. R.Bhatia. The logarithmic mean. American Mathematical Monthly. Resonance. Pp. 583-594.

2. B.C.Carlson. The logaritmic mean. American Mathematical Monthly. Vol. 79, pp. 615-618.

3. G.Hardy, J.E.Littlewood, G.Poelya. Inequalities. Cambridge University Press. Second edition, 1952.

## МАТЕМАТИК ТУШУНЧАЛАРНИ КИРИТИШНИНГ АБСТРАКТ-ДЕДУКТИВ МЕТОДИ

**Муяссар БОБОЕВА**

*БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси*

Замонавий таълимни ташкил этишга қўйиладиган муҳим талаблардан бири ортиқча руҳий ва жисмоний куч сарф этмай, қисқа вақт ичида юксак натижаларга эришишдир. Қисқа вақт орасида муайян назарий билимларни ўқувчиларга етказиб бериш, уларда маълум фаолият юзасидан кўникма ва малакаларни ҳосил қилиш, шунингдек, ўқувчилар фаолиятини назорат қилиш, улар томонидан эгалланган билим, кўникма ҳамда малакалар даражасини баҳолаш ўқитувчидан юксак педагогик маҳорат ҳамда таълим жараёнига нисбатан янгича ёндашувни талаб этади.

## МУНДАРИЖА