# ARKFUNKSIYALAR QATNASHGAN TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR HAMDA ULARNI YECHISH USULLARI

**Muyassar Norboyevna Boboyeva**
Buxoro davlat universiteti Matematik analiz kafedrasi

**Hamid Faxriddin o‘g‘li Parmonov**
Buxoro davlat universiteti Differensial tenglamalar kafedrasi

## ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada arkfunksiyalar haqida ma’lumotlar, arkfunksiyalar qatnashgan sodda tenglamalar va tengsizliklarning yechimlari jadvali hamda ularni yechish usullari bayon qilingan. Keltirilgan usullar yordamida yechilgan tenglama va tensizliklardan namunaviy misollar yechimi bilan berilgan.

**Kalit so‘zlar:** arkfunksiya, trigonometriya, tenglama, tengsizlik.

# EQUATIONS AND INEQUALITIES INCLUDING ARKFUNCTIONS AND METHODS FOR SOLVING THEM

**Muyassar Norboevna Boboeva**
Bukhara State University
Department of Mathematical Analysis

**Hamid Fakhriddin ugli Parmonov**
Bukhara State University
Department of Differential Equations

## ABSTRACT

In this paper we provide an information about arcfunctions, a table of solutions of simple equations and inequalities involving arcfunctions and ways to solve them. Sample examples of equations and inequalities solved using the given methods are presented with the solution.

**Keywords:** arcfunction, trigonometry, equation, inequality.

## KIRISH

“Trigonometriya” atamasi grekcha “trigono” - uchburchak va “metrio” – o‘lchayman so‘zlaridan olingan bo‘lib, birgalikda “uchburchakni o‘lchash” ma’nosini anglatadi. Arkfunksiyalar – bu trigonometrik funksiyalarga teskari matematik funksiyalar bo‘lib, ba’zida doiraviy funksiyalar yoki teskari trigonometrik funksiyalar deb ham ataladi. Trigonometrik funksiyalar o‘zaro bir qiymatli bo‘lmaganligi uchun ularning teskarisini faqatgina qisqartirilgan sohada aniqlash mumkin. Masalan, sinus funksiyasi $[-\pi/2;\pi/2]$ oraliqda o‘zaro bir qiymatlidir.

Arkfunksiyalarga odatda oltita funksiya kiradi:

**arksinus** (belgilanishi: *arcsin*);

**arkkosinus** (belgilanishi: *arccos*);

**arktangens** (belgilanishi: *arctg*; xorij adabiyotlarida *arctan* kabi belgilanadi);

**arkkotangens** (belgilanishi: *arcctg*; xorij adabiyotlarida *arccot* yoki *arccotan* kabi belgilanadi);

**arksekans** (belgilanishi: *arcsec*);

**arkkosekans** (belgilanishi: *arccosec*; xorij adabiyotlarida *arccsc*).

Arkfunksiya nomi mos trigonometrik funksiyaga “ark” qo‘shimchasini qo‘shish bilan hosil bo‘ladi, bunda “arc” atamasi grekcha yoy ma’nosini bildiradi. Arkfunksiyaning geometrik qiymatini kesmaga mos keluvchi birlik doira yoyi uzunligi (yoki bu yoyga mos keluvchi burchak) bilan bog‘lash mumkin. Ba’zida xorij adabiyotlarida arksinus uchun $\sin^{-1}$, arkkosinus uchun $\cos^{-1}$ va hakazo belgilashlar ishlatiladi. Bu biroz noqulay belgilashdir, chunki buni funksiyani -1 darajaga ko’tarish deb ham tushinish mumkin.

Ma’lumki, arkfunksiyalar mavzusi akademik litsey va kasb hunar kollejlarining ikkinchi bosqichidan boshlab o‘qitiladi. Biz ushbu maqolada arkfunksiyalar qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechishning qulay usullariga to‘xtalib o‘tamiz. Bunday tenglama va tengsizliklarni yechish murakkabroq bo‘lib, ko‘p hollarda ular noan’anaviy usullar, matematika bo‘yicha qo‘shimcha bilimlar yordamida yechiladi. Bunday tenglama va tengsizliklarning yechimini topish ko‘pchilik o‘quvchilarda qiyinchilik tug‘diradi va ularga tegishli uslubiy yordam kerak bo‘ladi.

Ushbu maqolada arkfunksiyalar uchun sodda tenglama va tengsizliklarlarning yechimlari jadvali, turli usullar bilan yechiladigan tenglama va tengsizliklardan namunalar keltirilgan.

## ARKFUNKSIYALAR QATNASHGAN TENGLAMALAR

O‘quvchi arkfunksiyalar qatnashgan tenglamalarni yechish uchun quyidagi ma’lumotlarga ega bo‘lishi zarur:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}; \quad 0 \le \arccos x \le \pi; \quad -\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < arcctgx < \pi.$$

Agar $|x| \le 1$ bo‘lsa, u holda $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$ tengliklar, agar $x \in R$ bo‘lsa, u holda $tg(arctgx) = x$, $ctg(arcctgx) = x$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Quyidagi jadvalda teskari trigonometrik funksiyalar uchun sodda tenglamalarning yechimlari to‘plami keltirilgan (bunda $a \in R$):

| Tenglama turi | Tenglama yechimlari |
|---|---|
| $\arcsin x = a \qquad (\lvert a \rvert \le \pi/2)$ | $x = \sin a$ |
| $\arcsin x = a \qquad (\lvert a \rvert > \pi/2)$ | $\varnothing$ |
| $\arccos x = a \qquad (0 \le a \le \pi)$ | $x = \cos a$ |

ISSN: 2181-1601

| | |
|---|---|
| $\arccos x = a \qquad (a \notin [0,\pi])$ | $\varnothing$ |
| $arctg x = a \qquad (\lvert a\rvert < \pi/2)$ | $x = tg\, a$ |
| $arctg x = a \qquad (\lvert a\rvert \geq \pi/2)$ | $\varnothing$ |
| $arcctg\ x = a \qquad (0 < a < \pi)$ | $x = ctg\ a$ |
| $arcctg\ x = a \qquad (a \notin (0,\pi))$ | $\varnothing$ |

Faraz qilaylik, $P(\cdot)-$biror ratsional funksiya, $y(\cdot)-$esa biror teskari trigonometrik funksiya bo‘lsin. Ushbu $P(y(x))=0$ ko’rinishdagi tenglama quyidagi

$$y(x)=y_i$$

sodda tenglamaga keltiriladi. Bu yerda $y_i -$soni $P(t)=0$ tenglamaning yechimlari.

**1-misol:** Ushbu tenglamani yeching:

$$2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0 \cdot$$

**Yechish:** Bu tenglamani yechishdan oldin $P(t)=2t^2-t-6,\ y(x)=\arcsin x$ ekanligini e’tirof etamiz. Hosil bo‘lgan kvadrat uchhad $y_1=2,\quad y_2=-1{,}5$ nollarga egadir. Shu sababli berilgan tenglama quyidagi ikkita sodda tenglamalarga ajraladi:

$$\arcsin x = 2, \qquad \arcsin x = -1{,}5 \cdot$$

Bunda $2>\frac{\pi}{2},\ \ \lvert -1{,}5\rvert < \frac{\pi}{2}$ bo‘lganligi uchun berilgan tenglama yagona $x=-\sin 1{,}5$ yechimga egadir.

Endi teskari trigonometrik funksiyalarni o‘z ichiga olgan murakkabroq tenglamani yechishga doir misol qaraymiz.

**2-misol**: Ushbu tenglamani yeching:

$$\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3} \cdot \qquad (1)$$

**Yechish:** $x$ noma’lumning qabul qiladigan qiymatlar to‘plami $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ oraliqdir. $\arcsin 2x=\alpha,\ \arcsin x=\beta$ belgilashlarni kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &\sin\alpha = 2x,\ \alpha\in[-\pi/2;\pi/2];\\ &\sin\beta = x,\ \ \beta\in[-\pi/6;\pi/6]. \end{aligned} \qquad (2)$$

Yangicha belgilashlarda (1) tenglama ushbu ko’rinishda yoziladi:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{3}-\beta. \qquad (3)$$

(2) shartlardan $\alpha$ va $\frac{\pi}{3}-\beta$ burchaklar $[-\pi/2;\pi/2]$ oraliqqa tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak (3) tenglama ushbu tenglamaga ekvivalent:

$$\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{3}-\beta)\ \Leftrightarrow\ 2x=\sin\frac{\pi}{3}\cos\beta-\sin\beta\cos\frac{\pi}{3}. \qquad (4)$$

Ushbu

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

tenglikda (2) shartlar hisobga olinsa,

$$\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$$

kelib chiqadi. Demak, (4) tenglamani ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}.$$

So‘nggi tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko‘tarib, bu irratsional tenglamaning yagona

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

yechimini topamiz. $x$ ning topilgan bu qiymati berilgan (1) tenglamaning yechimidir.

Agar tenglamada turli arkfunksiyalar yoki bitta arkfunksiya turli argumentlar bilan qatnashsa, u holda tabiiyki tenglamaning har ikkala tomonini biror trigonometrik funksiyaga ta’sir ettirib berilgan tenglamani unga ekvivalent bo‘lgan tenglamaga keltirish mumkin. Agar trigonometrik funksiya sifatida tangens yoki kotangens tanlansa, u holda bu funksiyalarning aniqlanish sohasiga kirmaydigan yechimlar qolib ketishi mumkin. Shu sababli tenglamaning har ikkala qismining tangensini yoki kotangensini hisoblashdan oldin dastlabki tenglamaning bu funksiyalarning aniqlanish sohasiga kirmaydigan yechimlari yo‘q ekanligiga ishonch hosil qilish kerak. Bunday usul bilan yechiladigan tenglamaga misol keltiramiz.

**3-misol:** Ushbu tenglamani yeching:

$$\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$

**Yechish:** (5)-tenglamada $\arcsin 6\sqrt{3}x$ ni tenglamaning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz va hosil bo‘lgan tenglamaning har ikkala tomonini sinusini hisoblaymiz:

$$\sin(\arcsin 6x) = \sin(-\frac{\pi}{2} - \arcsin 6\sqrt{3}x)$$

yoki

$$6x = -\cos(\arcsin\sqrt{108}x)$$

yoki

$$6x = -\sqrt{1-108x^2}.$$

Ko‘rinib turubdiki, bu tenglik $x<0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishi mumkin. Har ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib $144x^2 = 1$ tenglamani hosil qilamiz. Ko‘rinib turibdiki $x = \pm\frac{1}{12}$ sonlari bu tenglamaning yechimlari bo‘la oladi. $x<0$ shartga asosan $x = -\frac{1}{12}$ ildiz (5) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Arkfunksiyalar argumentida o‘zgaruvchini saqlovchi ba’zi tenglamalar berilgan tenglamaning o‘ng va chap tomonlarining umumiy aniqlanish sohasida ayniyatni hosil qiladi. Bunday tenglamalarni yechish jarayoni bu funksiyalarning aniqlanish sohasini topish bilan tugatiladi.

Quyidagi tenglamani yuqorida bayon qilingan usuldan foydalanib yechamiz.

**4-misol:** Ushbu tenglamani yeching:

$$2\arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \;. \tag{6}$$

**Yechish:** $y = \arccos x$ funksiya ta’rifiga ko‘ra

$$x = \cos y, \qquad 0 \le y \le \pi, \qquad |x| \le 1$$

ni hosil qilamiz. $x$ uchun topilgan bu ifodani (6) ning o‘ng tomoniga qo‘yib

$$\arcsin(2\cos y \sin y) = \arcsin(\sin 2y)$$

ni hosil qilamiz. $y = \arcsin x$ funksiyaning ta’rifiga ko‘ra

$$\arcsin(\sin 2y) = 2y, \ (-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4})$$

tenglik o‘rinlidir. Shunday qilib, (6) tenglamaning chap tomoni barcha $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ lar uchun uning o‘ng tomoniga tengdir. Dastlabki o‘zgaruvchilarga qaytib $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2};1]$ ni hosil qilamiz.

## ARKFUNKSIYALAR QATNASHGAN TENGSIZLIKLAR

Arkfunksiyalar qatnashgan tengsizliklar ayniy (shartsiz) yoki shartli bo‘lishi mumkin. Ayniy tengsizliklar isbotlanadi, shartli tengsizliklar esa yechiladi. Agar tengsizlikda qatnashgan noma’lumlarning mumkin bo‘lgan qiymatlarida berilgan tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unga ayniy tengsizlik deyiladi. Arkfunksiyalar qatnashgan tengsizliklarni yechish deganda noma’lumning bu tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan barcha qiymatlar to‘plamini topish tushiniladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki o‘quvchi arkfunksiyalar qatnashgan tengsizliklarni yechish uchun quyidagi ma’lumotlarni bilishi zarur:

1. $y = \arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1;1]$, qiymatlar sohasi esa $[-\pi/2; \pi/2]$. Bundan tashqari, $y = \arcsin x$ funksiya $[-1;1]$ da o‘suvchidir.
2. $y = \arccos x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1;1]$, qiymatlar sohasi esa $[0;\pi]$. Bundan tashqari, $y = \arccos x$ funksiya $[-1;1]$ da kamayuvchidir.
3. $y = \mathrm{arctg} x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $R$, qiymatlar sohasi esa $(-\pi/2; \pi/2)$. Bundan tashqari, $y = \mathrm{arctg} x$ funksiya $R$ da o‘suvchidir.
4. $y = \mathrm{arcctg} x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $R$, qiymatlar sohasi esa $(0;\pi)$ Bundan tashqari, $y = \mathrm{arcctg} x$ funksiya $R$ da kamayuvchidir.

5. $\arccos\varphi > \arccos\psi \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi < \psi \\ \psi \le 1 \\ \varphi \ge -1 \end{cases}.$

6. $\arcsin\varphi > \arcsin\psi \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi > \psi \\ \psi \ge -1 \\ \varphi \le 1 \end{cases}.$

7. $arctg\,\varphi > arctg\,\psi \Leftrightarrow \varphi > \psi$.

8. $arcctg\,\varphi > arcctg\,\psi \Leftrightarrow \varphi < \psi$.

**Arkfunksiyalar uchun eng sodda tengsizliklarning yechimlari quyidagi jadvalda keltirilgan.**

| Tengsizlik turi | Yechimlar to'plami |
|---|---|
| $\arcsin x > a \left(\lvert a\rvert < \frac{\pi}{2}\right)$ | $x \in (\sin a; 1]$ |
| $\arcsin x < a \left(\lvert a\rvert \le \frac{\pi}{2}\right)$ | $x \in [-1; \sin a)$ |
| $\arccos x > a \ (0 < a < \pi)$ | $x \in [-1; \cos a)$ |
| $\arccos x < a \ (0 < a \le \pi)$ | $x \in (\cos a; 1]$ |
| $arctgx > a \left(\lvert a\rvert < \frac{\pi}{2}\right)$ | $x \in (tga; +\infty)$ |
| $arctgx < a \left(\lvert a\rvert < \frac{\pi}{2}\right)$ | $x \in (-\infty; tga)$ |
| $arcctgx > a \ (0 < a < \pi)$ | $x \in (-\infty; ctga)$ |
| $arcctgx < a \ (0 < a < \pi)$ | $x \in (ctga; +\infty)$ |

Arkfunksiyalar qatnashgan tengsizliklarning umumiy ko'rinishi $R(y) < 0$, $R(y) > 0$ kabi bo'ladi, bu yerda $R(\cdot)$-biror ratsional funksiya, $y$ esa biror arkfunksiya (bu yerda $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$) nazarda tutilmoqda.

Yuqorida keltirilgan jadvaldan foydalanib quyidagi arkfunksiyalar qatnashgan tengsizlkilarni yechamiz.

**5-Misol:** Ushbu tengsizlikni yeching.

$$\arccos x > \frac{\pi}{6}.$$

**Yechish:** Berilgan tengsizlikni yechish uchun yuqorida keltirilgan jadvaldan foydalanamiz: $\arccos x > \frac{\pi}{6}$ tengsizlikdan $0 \le \frac{\pi}{6} < \pi$ ekanligini hosil qilamiz. Shuning uchun yechim $\left[-1;\cos\frac{\pi}{6}\right)$ oraliqqa tegishli bo'ladi. Bundan esa $\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ yechimga ega bo'lamiz. Demak, berilgan dastlabki tengsizlikni yechimi $x\in\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dan iborat ekan.

Faraz qilaylik, $P(\cdot)-$biror ratsional funksiya, $y(\cdot)-$esa biror arkfunksiya bo'lsin. Ushbu $P(y(x))>0$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagi $y(x)=t$ belgilash yordamida ushbu $P(t)>0$ sodda tenglamaga keltiriladi. So'ngra topilgan yechimda belgilash inobatga olinib dastlabki tengsizlikning yechimi topiladi.

**6-misol.** Ushbu tengsizlikni yeching?

$$arcctg^2 x-5arcctgx+6>0 \quad (7)$$

**Yechish:** Quyidagicha belgilashni kiritamiz: $arcctgx=y$ hamda (7) tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz: $y^2-5y+6>0$. Yuqoridagi tengsizlikni $(y-3)(y-2)>0$ ko'rinishda yozib olamiz, bundan esa

$$\begin{cases} y>3 \\ y<2 \end{cases}$$

hosil bo'ladi. Topilgan bu ifodalarni (7) tengsizlikka qo'yamiz:

$$\begin{cases} arcctgx>3 \\ arcctgx<2 \end{cases}$$

tengsizliklarga mos yechim $(ctg2;+\infty)$ va $(-\infty;ctg3)$. Bu yechimlarni birlashtirib (7) masalaning yechimini topamiz: $(-\infty;ctg3)\cup(ctg2;+\infty)$.

Agar tengsizlikda turli arkfunksiyalar yoki bitta arkfunksiya turli argumentlar bilan qatnashsa, u holda tabiiyki tengsizlikning har ikkala tomonini biror trigonometrik funksiyaga ta'sir ettirib berilgan tengsizlikni unga ekvivalent bo'lgan tengsizlikga keltirish mumkin. Agar trigonometrik funksiya sifatida tangens yoki kotangens tanlansa, u holda bu funksiyalarning aniqlanish sohasiga kirmaydigan yechimlar qolib ketishi mumkin. Shu sababli tenglamaning har ikkala qismining tangensini yoki kotangensini hisoblashdan oldin dastlabki tengsizlikning bu funksiyalarning aniqlanish sohasiga kirmaydigan yechimlari yo'q ekanligiga ishonch hosil qilish kerak. Bunday usul bilan yechiladigan tengsizlikga misol keltiramiz.

**7-misol.** Ushbu tengsizlikni yeching?

$$\arcsin x>\arccos x \quad (8)$$

**Yechish:** Berilgan tengsizlikda $x$ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari $x\in[-1;1]$ bo'ladi. Endi (8) tengsizlikka teng kuchli bo'lgan quyidagi tengsizliklarni qaraymiz:

$$\sin(\arcsin x)>\sin(\arccos x)\Leftrightarrow x>\sqrt{1-x^2}. \quad (9)$$

(9) tengsizlikka teng kuchli bo‘lgan quyidagi tengsizlikni qaraymiz:

$$\begin{cases} 2x^2 > 1 \\ x > 0 \end{cases}. \quad (10)$$

(10) va $x$ ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar bilan birgalikda (8) tengsizlikning yechimlar to‘plami $x \in \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$ bo‘lishini hosil qilamiz.

**XULOSA**

O‘quvchilar maqolada keltirilgan arkfunksiyalar haqidagi fikr-mulohazalar, yechimlar jadvali hamda tenglama va tengsizliklarni yechish usullardan foydalanib shu mavzuga oid masalalarni yechish bilim va ko‘nikmaga ega bo‘ladilar. O‘quv mashg‘uloti davomida o‘quvchilarning qiziqishlarini orttirish maqsadida turli zamonaviy pedagogik texnologiyalardan foydalanish tavsiya etiladi [1-24]. Bundan tashqari maqolada keltirilgan usullardan foydalanib zamonaviy matematikaning bir qator masalalarini tadqiq qilish mumkin [25-30].

**REFERENCES**

1. Шарипова И.Ф., Марданова Ф.Я. (2020). Преимущества работы в малых группах при изучении темы первообразной функции. *Проблемы педагогики,* 5(50), 29-32.

2. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. *Academy*, 4(55), 68-71.

3. Бобоева М.Н. (2020). Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными. *Наука, техника и образование*, 9(73), 48-51.

4. Бобокулова С.Б., Бобоева М.Н. (2020). Использование игровых элементов при введении первичных понятий математики. *ВНО*, 21(99), часть 2, 85-88.

5. Бобоева М.Н., Шукурова М.Ф. (2020). Обучение теме «множества неотрицательных целых чисел» с технологией «Бумеранг». *Проблемы педагогики*, 6(51), 81-83.

6. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. (2020). Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. *Academy*, 4(55), 65-68.

7. Марданова Ф.Я. (2020). Рекомендации по организации самостоятельной работы в высших учебных заведениях. *ВНО*, 17(95), Часть 2, С. 83-86.

8. Марданова Ф.Я. (2020). Использование научного наследия великих предков на уроках математики. *Проблемы педагогики*, 6(51), 40-43.

9. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2019). Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 6(10), 43-45.

10. Марданова Ф.Я. (2021). Нестандартные методы обучения высшей математике. *Проблемы педагогики*, 2(53), 19-22.
11. Бобоева М.Н. (2021). Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел». *Проблемы педагогики*, 2(53), 23-26.
12. Boboyeva M., Qutliyeva Z. (2019). Formation of elementary mathematical concepts in preschool children. *J. Global Research Math. Archives*, 6(11), 10-12.
13. Курбонов Г.Г. (2021). Информационные технологии в преподавании аналитической геометрии. *Проблемы педагогики*, 2(53), 11-14.
14. Бобоева М.Н. (2021). Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел» кластерным методом. *Проблемы педагогики*, 2(53), 23-26.
15. Сайлиева Г.Р. (2021). Использование метода «Математический рынок» в организации практических занятий по «Дискретной математике». *Проблемы педагогики*, 2(53), 27-30.
16. Курбонов Г.Г. (2021). Интерактивные методы обучения аналитеской геометрии: метод Case study. Наука, техника и образование, 8(72), 44-48.
17. Курбонов Г.Г. (2021). Информационные технологии в преподавании аналитической геометрии. Проблемы педагогики, 2(53), 11-14.
18. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. (2020). Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики. *Наука, техника и образование*, 8(72), 29-32.
19. Ахмедов О.С. (2020). Метод «диаграммы венна» на уроках математики. *Наука, техника и образование*, 8(72), 40-43.
20. Ахмедов О.С. (2021). Основные требования к языку учителя математики. *Наука, техника и образование*, 2-2(77), 74-76.
21. Умарова У.У. (2020). Применение триз технологии к теме «Нормальные формы для формул алгебры высказываний». *НТО*, 9(73), 32-35.
22. Умарова У.У. (2020). Роль современных интерактивных методов в изучении темы «Множества и операции над ними». *Вестник науки и образования*, 16(94), часть 2, 21-24.
23. Умарова У.У. (2020). Использование педагогических технологий в дистанционном обучении moodle, *Проблемы педагогики*, 6(51), 31-34
24. Бобоева М.Н. (2021). Метод графического органайзера при изучении темы «Множество неотрицательных целых чисел». *Проблемы науки,* 4(63), 72-75.
25. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), 368-390.
26. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, 42-46.

27. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 105-106.
28. Дилмуродов Э.Б. (2016). Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, 7-9.
29. Дилмуродов Э.Б. (2018). Спектр и квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11, 1-3.
30. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2014). Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. *Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 35 (2), 50–63.