SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842

VOLUME 2, ISSUE 4

APRIL 2021

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 2, ISSUE 4

APRIL 2021

www.openscience.uz

TABLE OF CONTENTS / МУНДАРИЖА

Блок сонли тасвир ва унинг асосий хоссалари

Тўлқин Ҳусенович Расулов
rth@mail.ru
Бухоро давлат университети

Аннотация: Ушбу мақолада n-тартибли операторли матрицалар учун блок сонли тасвир тушунчаси ўрганилган ва унинг асосий хоссалари келтирилган. Квадратик ва кубик сонли тасвирларни ҳисоблаш формулалари баён қилинган.

Калит сўзлар: операторли матрица, сонли тасвир, квадратик сонли тасвир, блок сонли тасвир, спектр, нуқтали спектр.

Block numerical range and its main properties

Tulkin Husenovich Rasulov
rth@mail.ru
Bukhara State University

Abstract: In this paper the notion block numerical range for the operator matrix of order n is studied and its main properties are given. Formulas for the quadratic and cubic numerical ranges are described.

Keywords: operator matrix, numerical range, quadratic numerical range, block numerical range, spectrum, point spectrum.

Гильберт фазосидаги чизиқли операторлар учун сонли тасвир тушунчаси операторлар спектрал назариясининг муҳим тушунчаларидан биридир. Бу назариядан бизга яхши маълумки, чизиқли операторнинг спектри комплекс сонлар тўпламининг қисм тўплами бўлади. Бундан ташқари, агар берилган A чизиқли оператор чегараланган бўлса, у ҳолда унинг спектри маркази ноль нуқтада ва радиуси $\|A\|$ га тенг ёпиқ доирада сақланади. Шу ўринда табиий савол пайдо бўлади: чизиқли операторнинг спектрини ўзида сақловчи ҳамда маркази ноль нуқтада ва радиуси $\|A\|$ га тенг ёпиқ доирадан кичикроқ тўплам мавжудми? Чизиқли операторлар учун сонли тасвир тушунчаси бундай хоссага эга тўпламлардан бири эканлигини унинг қуйида баён қилинган хоссалари орқали кўриш мумкин.

Фараз қилайлик, H - комплекс Гильберт фазоси ва $A: H \to H$ - чизиқли оператор бўлиб, $D(A) \subset H$ унинг аниқланиш соҳаси бўлсин. Ушбу

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \| x \| = 1\}$$

тўпламга A операторнинг сонли тасвири дейилади. Умумий ҳолда $W(A)$ тўплам очиқ тўплам ҳам ёпиқ тўплам ҳам бўлмайди. $W(A)$ очиқ тўплам бўладиган, ёпиқ тўплам бўладиган ҳамда очиқ ҳам ёпиқ ҳам бўлмайдиган чизиқли операторларга кўплаб мисоллар келтириш мумкин. Аниқланишига кўра $W(A)$ тўплам комплекс сонлар тўпламининг қисм тўплами бўлиб, $W(A)$ тўпламнинг геометрик хоссаларидан фойдаланиб A оператор ҳақида маълумот олиш мумкин.

Сонли тасвир тушунчаси биринчи маротаба [1] сонли матрицалар учун киритилган. Унда матрицанинг сонли тасвири унинг барча хос қийматларини сақлаши ва бундай тўпламнинг чегараси қаварик чизиқ бўлиши исботланган. [2] ишда эса $W(A)$ нинг қаварик тўплам эканлиги исботланган. Кейинчалик [3] ишда чизиқли чегараланган оператор ҳам бундай хоссага эга бўлиши ва унинг спектри сонли тасвир ёпиғи $\overline{W(A)}$ тўпламда ётиши кўрсатилган.

H Гильберт фазосида таъсир қилувчи чизиқли чегараланган A оператор сонли тасвирининг баъзи хоссаларини санаб ўтамиз.

1) $W(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \| A \|\}$;

2) $W(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in W(A)\}$;

3) $W(I) = \{1\}$, бу ерда I орқали H Гильберт фазосидаги бирлик оператор белгиланган. Умумий ҳолда, ихтиёрий α, β комплекс сонлари учун

$$W(\alpha A + \beta) = \alpha W(A) + \beta$$

тенглик ўринлидир. Бунда $\alpha \in C$ комплекс сони ва $\Omega \subset C$ тўплам учун

$$\alpha + \Omega := \{\alpha + w : w \in \Omega\}, \ \alpha\Omega := \{\alpha w : w \in \Omega\}$$

муносабатлар ўринли.

4) Агар $A = A^*$ бўлса, у ҳолда $W(A) \subset R$ бўлади.

5) Агар $\dim H < \infty$ бўлса, у ҳолда $W(A)$ компакт тўплам, яъни чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлади.

6) Агар $S, T : H \to H$ унитар эквивалент операторлар бўлса, у ҳолда $W(S) = W(T)$ тенглик ўринли бўлади.

7) A операторнинг $W(A)$ сонли тасвири учун спектрал муносабатлар деб аталувчи хоссани қаноатлантиради:

$$\sigma_p(A) \subset W(A), \ \sigma(A) \subset \overline{W(A)}.$$

Шуни алоҳида таъкидлаб ўтиш жоизки, агар чизиқли операторнинг спектри иккита кесишмайдиган тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлса, у ҳолда сонли тасвир спектрнинг жойлашув ўрнини етарлича тавсифлай олмайди. Юқоридаги каби ҳолатларда спектрнинг жойлашув ўрнини янада аниқроқ аниқлаш мақсадида [4] мақолада квадратик сонли тасвир тушунчаси киритилган. Ўқувчига қулайлик учун бу тушунчанинг таърифини келтирамиз ва баъзи хоссаларини санаб ўтамиз.

Фараз қилайлик $H = H_1 \oplus H_2$ ва $A \in L(H)$ бўлсин, бу ерда H_1 ва H_2 лар Гильберт фазолари. У ҳолда A операторни ҳамиша

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

2-тартибли операторли матрица кўринишида тасвирлаш мумкин [5], бу ерда $A_{ij} : H_j \to H_i, \quad i, j = 1,2$ матрицавий элементлар чизиқли чегараланган операторлар.

A блок операторли матрица учун квадратик сонли тасвир тушунчасига таъриф берамиз. $(\cdot,\cdot)_i$ ва $\|\cdot\|_i$ лар орқали мос равишда H_i, $i = 1,2$ Гильберт фазолардаги скаляр кўпайтма ва нормаларни белгилаймиз.

Таъриф. *Қуйидаги*

$$A_f := \begin{pmatrix} (A_{11} f_1, f_1)_1 & (A_{12} f_2, f_1)_1 \\ (A_{21} f_1, f_2)_2 & (A_{22} f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in H$$

матрицанинг барча хос қийматлари тўпламига $A \in L(H)$ *блок операторли матрицанинг* (1) *кўринишига мос квадратик сонли тасвир дейилади, бунда* $\| f_i \|_i = 1$, $i = 1,2$ *ва* $W^2(A)$ *каби тасвирланади, яъни*

$$W^2(A) := \bigcup_{\|f_i\|_i = 1,\ i = 1,2} \sigma_p(A_f), \ f = (f_1, f_2) \in H.$$

Таъкидлаб ўтиш жоизки, H Гильберт фазосининг турли ёйилмаларига мос келувчи квадратик сонли тасвирлар турлича бўлиши мумкин. Квадратик сонли тасвирнинг айрим хоссаларини баён қиламиз.

1) $W^2(A) \subset W(A)$.

2) Агар A операторли матрица юқори учбурчак ёки қуйи учбурчак шаклга эга бўлса, яъни

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ ёки } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

бўлса, у ҳолда $W^2(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22})$ тенглик ўринли бўлади.

3. Агар $A \in L(H)$ бўлса, яъни A чизиқли чегараланган оператор бўлса, у ҳолда

$$W^2(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \| A \|\}.$$

Бундан ташқари, $\dim H < \infty$ бўлса, $W^2(A)$ ёпиқ тўплам бўлади.

4. Ихтиёрий $\alpha, \beta \in C$ комплекс сонлари учун

$$W^2(\alpha A+\beta)=\alpha W^2(A)+\beta$$

тенглик бажарилади.

5. Фараз қилайлик, $U_1 \in L(H_1)$, $U_2 \in L(H_2)$ унитар операторлар бўлиб, $U = diag(U_1, U_2)$ бўлсин. У ҳолда

$$W^2(U^{-1}AU)=W^2(A).$$

Сонли тасвирдан фарқли ўлароқ квадратик сонли тасвир кўпи билан иккита (боғланган) компоненталардан иборат бўлади. Бу тасдиқ A_f, $\| f_i \|_i = 1$, $i=1,2$ кўринишдаги матрицалар тўплами боғланган ва матрица хос қийматлари узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Умуман олганда $W^2(A)$ қаварик бўлмаган тўпламдаир. A_f матрица иккита турли хос қийматга эга эканлиги умуман олганда $W^2(A)$ тўплам иккита кесишмайдиган компоненталардан иборат эканлигини билдирмайди.

$f_i \in H_i$, $f_i \neq 0$, $i=1,2$ учун

$$\mathrm{dis}_{\mathrm{A}}(f) := \left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)}{\| f_1 \|^2} - \frac{(A_{22}f_2, f_2)}{\| f_2 \|^2} \right)^2 + 4\frac{(A_{12}f_2, f_1)(A_{21}f_1, f_2)}{\| f_1 \|^2 \| f_2 \|^2}$$

белгилаш оламиз. $\mathrm{dis}_{\mathrm{A}}(f) \geq 0$ бўлган ҳолда

$$\lambda_{\pm}(f) := \frac{1}{2}\left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)}{\| f_1 \|^2} + \frac{(A_{22}f_2, f_2)}{\| f_2 \|^2} \pm \sqrt{\mathrm{dis}_{\mathrm{A}}(f)} \right)$$

каби миқдорни аниқлаймиз. У ҳолда $W^2(A) \subset R$ бўлиши учун барча $f_i \in H_i$, $i=1,2$ ларда $\mathrm{dis}_{\mathrm{A}}(f) \geq 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бундан ташқари, квадратик сонли тасвир учун

$$W^2(A) = \Lambda_-(A) \cup \Lambda_+(A)$$

тенглик ўринлидир [5], бу ерда

$$\Lambda_{\pm}(A) := \{\lambda_{\pm}(f) : f = (f_1, f_2), f_i \in H_i, f_i \neq 0, i=1,2, \mathrm{dis}_A(f) \geq 0\}.$$

A чизиқли чегараланган операторнинг $W^2(A)$ квадратик сонли тасвири учун спектрал муносабатлар деб аталувчи хосса ўринлидир:

$$\sigma_p(A) \subset W^2(A), \sigma(A) \subset \overline{W^2(A)}.$$

Квадратик сонли тасвирнинг 1)-хоссасини ва спектрал муносабатларни инобатга олган ҳолда квадратик сонли тасвир спектрни ўзида сақловчи сонли тасвирдан кўра кичикроқ тўплам эканлигини айтиш мумкин.

2×2 блок операторли матрицалар учун киритилган квадратик сонли тасвир тушунчасини $n \times n$ блок операторли матрица ҳолига умумлаштириш масаласи чегараланган операторлар учун [5,6] мақолаларда, чегараланмаган операторлар учун [7] мақолада тадқиқ қилинган.

Фараз қилайлик $n \in N$, $n \geq 3$, H_i, $i = 1,...,n$ - Гильберт фазолари ва $H := H_1 \oplus ... \oplus H_n$. У ҳолда $A \in L(H)$ ҳамиша

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

кўринишдаги блок операторли матрица кўринишида тасвирланади, бу ерда $A_{ij} : H_j \to H_i$, $i, j = 1,...,n$ матрицавий элементлар чизиқли чегараланган операторлар.

Ушбу

$$S_{H_1 \oplus ... \oplus H_n} := S_{H_1} \times ... \times S_{H_n} = \{ f = (f_1,..., f_n) \in H, \| f_i \|_i = 1, i = 1,..., n \}$$

тўплам орқали H_i даги S_{H_i} бирлик сфералар кўпайтмасини белгилаймиз.

Агар $H_1 \oplus ... \oplus H_n$ ёйилма фиксирланган бўлса, у ҳолда $S_{H_1 \oplus ... \oplus H_n}$ белгилаш ўрнига S^n ёки S_H белгилашлардан фойдаланиш мумкин.

Ҳар бир $f = (f_1,..., f_n) \in S_{H_1 \oplus ... \oplus H_n}$ учун

$$A_f := \left((A_{ij} f_j, f_i)_i \right)_{i,j=1}^{n} \in M_n(C)$$

каби аниқланган $n \times n$ матрицани қараймиз.

Таъриф. Ушбу

$$W_{H_1 \oplus ... \oplus H_n}(A) := \bigcup_{f \in S^n} \sigma_p(A_f),$$

тўпламга A операторли матрицанинг (2) кўринишига мос блок сонли тасвири дейилади.

H Гильберт фазонинг фиксирланган ёйилмаси учун $W^n(A) = W_{H_1 \oplus ... \oplus H_n}(A)$ белгилаш ишлатилади.

Чизиқли алгебра ва функционал анализ курсидан маълумки, барча $f \in S^n$ лар учун

$$\sigma_p(A_f) = \{ \lambda \in C : \det(A_f - \lambda) = 0 \}$$

бўлганлиги боис қуйидаги

$$W^n(A) = \{ \lambda \in C : \exists f \in S^n, \det(A_f - \lambda) = 0 \}$$

эквивалент тасвир ўринлидир.

$W^n(A)$ блок сонли тасвир таърифида кўп ҳолларда $f \neq 0$ шарт ўрнига $f_i \neq 0$, $i = 1,2,...,n$ шартдан фойдаланиш зарурати пайдо бўлади. Бу ҳолда блок сонли тасвирнинг қуйидаги тавсифидан фойдаланиш муҳим саналади.

$f = (f_1,..., f_n) \in H$, $f_i \neq 0$, $i = 1,2,..., n$ вектор учун

$$\hat{A}_f := \left(\frac{(A_{ij} f_j, f_i)}{\| f_i \| \cdot \| f_j \|} \right)_{i,j=1}^{n} \in M_n(C)$$

матрицани ва

$$\Delta(f_1,..., f_n; \lambda) := \| f_1 \|^2 ... \| f_n \|^2 \det(\hat{A}_f - \lambda)$$

детерминантни аниқлаймиз. У ҳолда

$$W^n(A) = \{\sigma_p(\hat{A}_f) : f = (f_1,..., f_n) \in H, f_i \neq 0, i = 1,..., n\}$$

$$= \{\lambda \in C : \exists f = (f_1,..., f_n) \in H, f_i \neq 0, i = 1,..., n, \det(\hat{A}_f - \lambda) = 0\}$$

$$= \{\lambda \in C : \exists f = (f_1,..., f_n) \in H, f_i \neq 0, i = 1,..., n, \Delta(f_1,..., f_n; \lambda) = 0\}.$$

Энди блок сонли тасвирнинг асосий хоссаларини келтирамиз [5].

1) Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда блок сонли тасвир одатдаги сонли тасвир билан устма-уст тушади; $n = 2$ бўлганда, блок сонли тасвир квадратик сонли тасвир деб ҳам юритилади; $n = 3$ бўлса, у ҳолда блок сонли тасвир кубик сонли тасвир деб юритилади.

2) Агар $A \in M_n(C)$ - n-тартибли матрица бўлса, у ҳолда $W^n(A)$ тўплам A матрицанинг хос қийматлари тўплами билан устма-уст тушади.

3) Сонли тасвир ва блок сонли тасвир орасида $W^n(A) \subset W(A)$ каби боғланиш мавжуд.

4) Агар A операторли матрица юқори учбурчак ёки қуйи учбурчак шаклга эга бўлса, у ҳолда $W^n(A) = W(A_{11}) \cup ... \cup W(A_{nn})$ тенгли ўринли бўлади.

5) Агар $A \in L(H)$ бўлса, у ҳолда

$$W^n(A) \subset \{\lambda \in C : | \lambda | \leq \| A \|\}$$

муносабат ўринлидир.

6) Агар $\dim H < \infty$ бўлса, у ҳолда $W^n(A)$ ёпиқ тўпламдир.

7) A ўз-ўзига қўшма операторли матрица, яъни $A^* = A$ бўлса, у ҳолда $W^n(A) \subset R$ муносабат ўринлидир.

8) Агар $A \in L(H)$ бўлса, у ҳолда

$$\sigma_p(A) \subset W^n(A), \sigma(A) \subset \overline{W^n(A)}.$$

хосса ўринли бўлиб, у спектрал муносабатлар хоссаси деб юритилади.

Таъкидлаш лозимки, нуқтали спектр билан боғлиқ спектрал муносабат чегараланмаган n-тартибли операторли матрицалар учун ҳам ўринлидир. Бироқ оператор спектри билан боғлиқ спектрал муносабат қўшимча шартлар асосида бажарилади [7].

Қуйида уч диагоналли 3×3 блок операторли матрицалар учун кубик сонли тасвирни ҳисоблашда қулай бўлган алтернатив формулани келтирамиз.

$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ Гильберт фазосида

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

3×3 блок операторли матрицани қараймиз, бу ерда A_{ij} матрицавий элементлар H_j ни H_i га ўтказувчи чизиқли чегараланган операторлар, яъни $A_{ij} \in L(H_j, H_i)$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \le j$.

$f = (f_1, f_2, f_3) \in H$ элемент ёрдамида қуйидаги миқдорларни аниқлаймиз:

$$a_{ij}(f) := (A_{ij} f_j, f_i);$$

$$p(f) := -\frac{1}{6}((a_{11}(f) - a_{22}(f))^2 + (a_{11}(f) - a_{33}(f))^2 + (a_{22}(f) - a_{33}(f))^2)$$

$$-|a_{12}(f)|^2 - |a_{22}(f)|^2 \ (< 0);$$

$$q(f) := |a_{12}(f)|^2 a_{33}(f) + |a_{23}(f)|^2 a_{11}(f) - a_{11}(f) a_{22}(f) a_{33}(f)$$

$$-\frac{2}{27}(a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f))^3$$

$$+\frac{1}{3}(a_{11}(f)a_{22}(f) + a_{11}(f)a_{33}(f) + a_{22}(f)a_{33}(f) - |a_{12}(f)|^2 - |a_{23}(f)|^2)$$

$$\times (a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f));$$

$$\varphi(f) := \arccos\left(-\frac{3q(f)}{2p(f)}\sqrt{-\frac{3}{p(f)}}\right);$$

$$\Lambda_k(f) := \frac{1}{3}(a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f)) + 2\sqrt{-\frac{p(f)}{3}}\cos\frac{\varphi(f) + 2k\pi}{3};$$

$$k = 1,2,3.$$

Ишнинг асосий натижаларидан бирини баён қиламиз. Унда A блок операторли матрицанинг $W^3(A)$ кубик сонли тасвирини ҳисоблаш формуласи келтирилган.

1-теорема. *A операторнинг кубик сонли тасвири $W^3(A)$ учун*

$$W^3(A) = \bigcup_{k=1}^{3} \bigcup_{\|f_i\|=1, i=1,2,3} \Lambda_k(f), \quad f = (f_1, f_2, f_3) \in H$$

тенглик ўринли.

1-теорема A операторнинг чегараларини ўрганишда ва улар учун оптимал баҳолашлар олишда муҳим аҳамиятга эга [7]. 1-теоремани исботлашда кубик алгебраик тенгламалар ечимини топишнинг Кардано усулидан фойдаланилади.

[8-13] мақолаларда блок операторли матрицаларнинг муҳим синфларидан бири бўлган сони сақланмайдиган чекли сондаги заррачалар системасига мос

операторли матрицаларнинг спектрал хоссалари ўрганилган. Хусусан, муҳим спектр тавсифланган; муҳим спектрнинг икки заррачали ва уч заррачали тармоқлари топилиб, уларни ташкил қилувчи кесмалар сони аниқланган ҳамда бу кесмаларнинг жойлашув ўрни ўрганилган. Хос қийматлар сонининг чекли ёки чексиз бўлиш шартлари тадқиқ қилинган. Хос қийматлар сони чексиз бўлган ҳолдадискрет спектр учун асимптотик формула топилган. [14,15] мақолаларда эса кўпи билан иккита фотонли панжаравий спин-бозон моделининг муҳим ва дискрет спектрлари 3-тартибли операторли матрицаларнинг спектрал хоссалари ёрдамида тадқиқ қилинган. Юқорида қайд қилиб ўтилган операторли матрицаларнинг энг кичик ва энг катта хос қийматлари учун мос равишда қуйи ва юқори баҳолашларни олишда 1-теорема муҳим аҳамият касб этади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., 2:1-2 (1918), pp. 187-197.

2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., 3:1 (1919), pp. 314-316.

3. Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., 30:1 (1929), pp. 228-281.

4. Langer H., Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Oper. Theory, 39 (1998), pp. 339-359.

5. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008, P. 297.

6. Tretter C., Wagenhofer M. The block numerical range of an nxn block operator matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24:4 (2003), pp. 1003-1017.

7. Rasulov T.H., Tretter C. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Rocky Mountain J. Math., 2018, No. 1, pp. 279-324.

8. Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. Comm. in Math. Anal. **11**:1 (2020), pp. 17-37.

9. Rasulov T.H. On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix. Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1 (2016), pp. 48-61.

10. Muminov M.I., Rasulov T.H. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space. Comm. in Mathematical Analysis. 17:1 (2014), pp. 1-22.

11. Albeverio S., Lakaev S., Rasulov T. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys. **127**:2 (2007), pp. 191-220.

12. Лакаев С.Н., Расулов Т.Х. Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра. Функц. анал. и его прил., **37**:1 (2003), С. 81-84.

13. Лакаев С.Н., Расулов Т.Х. Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов. Матем. заметки, **73**:4 (2003), С. 556-564.

14. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.

15. Расулов Т.Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами. ТМФ, 186:2 (2016), С. 293-310.

References

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., 2:1-2 (1918), pp. 187-197.

2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., 3:1 (1919), pp. 314-316.

3. Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., 30:1 (1929), pp. 228-281.

4. Langer H., Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Oper. Theory, 39 (1998), pp. 339-359.

5. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008, P. 297.

6. Tretter C., Wagenhofer M. The block numerical range of an nxn block operator matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24:4 (2003), pp. 1003-1017.

7. Rasulov T.H., Tretter C. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Rocky Mountain J. Math., 2018, No. 1, pp. 279-324.

8. Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. Comm. in Math. Anal. **11**:1 (2020), pp. 17-37.

9. Rasulov T.H. On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix. Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1 (2016), pp. 48-61.

10. Muminov M.I., Rasulov T.H. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space. Comm. in Mathematical Analysis. 17:1 (2014), pp. 1-22.

11. Albeverio S., Lakaev S., Rasulov T. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys. **127**:2 (2007), pp. 191-220.

12. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. Efimov's Effect in a Model of Perturbation Theory of the Essential Spectrum. Funct. Anal. and its Appl. 37:1 (2003), pp. 69-71.

13. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. A Model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multiparticle Operators. Math. Notes. 73:4 (2003), pp. 521-528.

14. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.

15. T.Kh.Rasulov. Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons. Theor. Math. Phys., 186:2 (2016), pp. 251-267.