

## ЎЗГАРИШИ ЧЕГАРАЛАНГАН ФУНКЦИЯЛАР БЎЛИМИНИ ЎҚИТИШГА ДОИР МЕТОДИК ТАВСИЯЛАР

**Тўлқин Хусенович Расулов**

Бухоро давлат университети

[rth@mail.ru](mailto:rth@mail.ru)

**Хайдар Раупович Расулов**

Бухоро давлат университети

[xrasulov71@mail.ru](mailto:xrasulov71@mail.ru)

### АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада Математик анализ, Функционал анализ ва Математик анализнинг танланган боблари фанларининг муҳим бўлимларидан бири бўлган «Ўзгариши чегараланган функциялар» бўлимини ўқитишга оид тавсиялар келтирилган. Ўзгариши чегараланган функция ва тўла вариацияга оид маълумотларни келтирилган ҳамда тўла вариацияни ҳисоблашнинг асосий хоссалари баён қилинган. Талабаларнинг мавзунини ўзлаштирганлик даражасини аниқлаш имконини берувчи бир қатор интерфаол усуллар ва уларнинг қўлланилиши ҳақида фикр-мулоҳалар юритилган.

**Калит сўзлар:** ўзгариши чегараланган функция, тўла вариация, интерфаол усуллар, кичик гуруҳларда ишлаш, шеригини топ.

### METHODICAL RECOMMENDATIONS FOR TEACHING THE SECTION OF FUNCTIONS WITH BOUNDED VARIATION

**Tulkin Husenovich Rasulov**

Bukhara State University

[rth@mail.ru](mailto:rth@mail.ru)

**Khaydar Raupovich Rasulov**

Bukhara State University

[xrasulov71@mail.ru](mailto:xrasulov71@mail.ru)

### ABSTRACT

In this paper the recommendations for the teaching of the section «The functions with bounded variation», which is one of the important sections of the subjects of Mathematical Analysis, Functional Analysis and Selected sections of mathematical analysis are given. An information about the functions with bounded variation and total variation are given, and the basic properties of the calculation of total variation are described. A number of interactive methods are given that allow to determine the level of understandability of the topic.

**Keywords:** functions with bounded variation, total variation, interactive methods, work in small groups, find a pair.

## КИРИШ

Мазкур мақолада олий таълим муассасалари 5130100 - Математика таълим йўналишида ўқитиладиган «Математик анализ», «Функционал анализ» ва «Математик анализнинг танланган боблари» фанларининг муҳим бўлимларидан бири «Ўзгариши чегараланган функциялар» мавзусини ўқитишда фойдаланиладиган асосий қоидалар ҳамда бу бўлимни ўқитишда қўлланиладиган интерфаол усуллар муҳокама қилинади. Бизга яхши маълумки, таълимда замонавий педагогик технологияларнинг асосий мақсади ўқув жараёнида талабани дарс жараёнининг марказига олиб чиқиш, талабаларни материалларни шунчаки ёд олишларидан, автоматик тарзда такрорлашларидан узоқлаштириб, мустақил ва ижодий фаолиятини ривожлантириш, дарснинг фаол иштирокчисига айлантиришдир. Шундагина талабалар муҳим ҳаётий ютуқ ва муаммолар, ўтиладиган мавзуларнинг амалиётга тадбиғи бўйича ўз фикрига эга бўлади, ўз нуқтаи назарини асослаб бера олади.

## АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Таълимда ўқитувчи интерфаол методлардан мавзуга мувофиқини танлай билиши муҳим ҳисобланади. Ўқитувчи интерфаол методлардан аввало оддийдан мураккабга ўтиш назариясига амал қилган ҳолда фойдаланмоғи лозим. Ўз навбатида илғор педагогик технологиялар асосида ташкил этилган дарслар талабаларни билимларининг яхлит ўзлаштирилишига ёрдам беради. Талаба тафаккурини ўстиради, мустақил, ижодий фикрлашга ўргатади.

Талабаларда мавзу ва унинг амалий аҳамиятига доир тўлиқ тасаввур пайдо бўлиши ўзгариши чегараланган функцияларнинг тадбиғи ҳақида қисқача маълумот келтираммиз. Сўнгра ўзгариши чегараланган функция ва тўла вариацияга оид маълумотларни келтираммиз ҳамда тўла вариацияни ҳисоблашнинг асосий хоссаларини санаб ўтаммиз. Талабаларнинг мавзунини ўзлаштирганлик даражасини аниқлаш имконини берувчи бир қатор интерфаол усуллар ва уларнинг қўлланилиши ҳақида фикр-мулоҳалар юритаммиз.

Маълумки, Риман интегрални математик анализнинг асосий мавзуларидан биридир. Амалий тадбиғининг кенглиги билан фанда муҳим ўрин тутди. Ўз навбатида Риман интегралининг умумлашмаси бўлган Стилтес интегралини ўрганишда фанга биринчи бўлиб С.Жордан томонидан киритилган чекли вариацияли функциялар асосий вазифани бажаради.

Чекли вариацияли функциялар фақатгина Стилтес интегралини ўрганишда эмас, балки математик анализнинг бошқа кўплаб масалаларида муҳим аҳамиятга эга.

Масалан, массаси бирор  $[a, b]$  кесма тақсимланган моддий жисмнинг оғирлик марказини топиш масаласини кўриб чиқайлик. Ҳажмнинг  $dv$  элементида

$dm(x)$  масса мос келсин ва  $M$  қаралаётган  $[a, b]$  кесманинг умумий массаси бўлсин.

У ҳолда

$$M = \int_a^b dm(x)$$

бўлади ҳамда унинг оғирлик маркази

$$\frac{1}{M} \int_a^b x dm(x)$$

га тенг. Бу эса Стилтес интегралли бўлиб, уларни ўрганишда ўзгариши чегараланган функциялар муҳим аҳамият касб этади.

Режада белгиланганидек, ўзгариши чегараланган функцияларнинг тўла вариациясини ҳисоблашда талабаларга қулайлик туғдирувчи қуйидаги хоссаларни санаб ўтамиз:

1-қоида: агар  $f(x)$  функция  $[a, b]$  кесмада монотон бўлса, у ҳолда унинг ўзгариши чегараланган бўлиб, тўла ўзгариши

$$\bigvee_a^b [f] = |f(b) - f(a)|$$

га тенг бўлади;

2-қоида: Агар  $[a, b]$  кесмада аниқланган  $f(x)$  функция  $[a, b]$  ярим очик ораликда монотон бўлса, унинг ўзгариши чегараланган бўлиб,

$$\bigvee_a^b [f] = |f(b-0) - f(a)| + |f(b) - f(b-0)|$$

га тенг бўлади;

3-қоида: Агар  $[a, b]$  кесмада аниқланган  $f(x)$  функция  $(a, b]$  ярим очик ораликда монотон бўлса, унинг тўла ўзгариши чегараланган бўлиб,

$$\bigvee_a^b [f] = |f(a+0) - f(a)| + |f(b) - f(a+0)|$$

га тенг бўлади;

4-қоида: Агар  $[a, b]$  кесмада аниқланган  $f(x)$  функция  $(a, b)$  очик ораликда монотон бўлса, унинг тўла ўзгариши чегараланган бўлиб,

$$\begin{aligned} \bigvee_a^b [f] = & |f(a+0) - f(a)| + |f(b-0) - f(a+0)| \\ & + |f(b) - f(b-0)| \end{aligned}$$

га тенг бўлади.

Энди мавзуга мос интерфаол усулларни танлаш ва уларни қўллаш масаласини қараймиз. Дастлабки метод «Кичик гуруҳларда ишлаш» методи

бўлиб, у талабаларни биргаликда ишлашга ўрганиш нақадар муҳим эканлигини тушунишга ёрдам беради. Бу метод билан ўқув машғулотларини ташкил қилиш анъанавий ўқув машғулотлари ўтишга қараганда анча самарали эканлигини кузатиш мумкин.

Аслида талабаларни кичик гуруҳларга бўлиб, ўқитишнинг ўзи етарли эмас. Кутилган натижага эришиш учун яна икки компонент – гуруҳни рағбатлантириш ва шахсий масъулиятни ҳис қилиш механизми ҳамда уни рағбатлантириш тизимини ишлаб чиқиш зарур. Кичик гуруҳларга бўлиниб, ўқув машғулотларини ўтиш методининг бир қанча вариантлари ёки моделлари мавжуд. Улардан биринчиси гуруҳларнинг ўқув материални ўзлаштириш натижасини яхшилашга қаратилган. Бу методни «Ўзгариши чегараланган функциялар» бўлимини ўқитиш мисолида таҳлил қиламиз. Талабаларга юқоридаги маълумотлар тақдим қилинганда, талабалар кичик гуруҳларга ажратилади ва уларга топшириқлар берилади.

Масалан, 28 нафар талабадан ташкил топган гуруҳ тўрта кичик гуруҳларга бўлинади. Қуйидаги топшириқлар талабалар эътиборига ҳавола қилинади:

$f(x)$  функциянинг  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланган эканлигини кўрсатинг ва тўла ўзгаришини топинг.

1-топшириқ.  $x \in [0, \pi]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -5, & \text{агар } x = \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{агар } x \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2-топшириқ.  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{агар } x = 0, \\ \cos x, & \text{агар } x \neq 0. \end{cases}$$

3-топшириқ.  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0, \\ 5 + 6\cos \frac{x}{2}, & \text{агар } x \neq 0. \end{cases}$$

4-топшириқ.  $x \in [-1, 3]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{агар } x = 0, \\ x^2 - 1, & \text{агар } x \neq 0. \end{cases}$$

Аввалдан танлаб олинган топшириқларни бажариш учун талабалар аввало тўла вариацияни ҳисоблаш қоидалари орасидан топшириқга мосини танлай билиши ва уни тўғри тадбиқ қилиши талаб қилинади. Мазкур ҳолатда 1-топшириқ 2-қоида бўйича, 2-топшириқ 3-қоида бўйича, 3-топшириқ 1-қоида бўйича ва ниҳоят 4-топшириқ 3-қоида бўйича ечилади.

Гуруҳни кичик гуруҳларга бўлиб ишлаш орқали ўзаро ахборот алмашинуви мунтазам амалга оширилади, ғоя ва фикрларни йиғиш ҳамда ўртоқлашиш таъминланади. Тадқиқот натижалари гуруҳда ишлаш индивидуал ишлашга қараганда яхшироқ самара беришини кўрсатмоқда.

**МУҲОКАМА**

Қўллаш учун танлаб олинган навбатдаги метод бу – «Мосини топ» методидир. Ушбу методда жадвалнинг чап томонидаги тушунчага мос ўнг томонида фикр, формула, чизма, график ва ҳоказолар келтирилиши керак бўлади. Демак, чап томондаги тушунча ўрганилиб, ўнг томонда турган устундан мос тўғри жавоб топилади ва стрелка (чизик, белги) билан бирлаштирилади.

Қуйидаги жадвалда «Ўзгариши чегараланган функциялар» келтирилган бўлиб, шу тушунчаларга мос келган мисолларни (формулаларни) топиш талаб қилинади.

Топшириқлар		Қоидалар
$f(x) = \begin{cases} 8, \text{ агар } x = 1, \\ x^2 - 2x, \text{ агар } x \neq 1. \end{cases}$	$[0, 2]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(b-0) - f(a)  +  f(b) - f(b-0) $
$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ агар } x = 0, \\ \lg(1+x^2), \text{ агар } x \neq 0. \end{cases}$	$[3, 3]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(b-0) - f(a)  +  f(b) - f(b-0) $
$f(x) = \begin{cases} 6, \text{ агар } x = \frac{\pi}{2}, \\ 4\cos x 2x, \text{ агар } x \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(a+0) - f(a)  +  f(b) - f(a+0) $
$f(x) = (x-1)(x-2)$	$[2, 2]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(b) - f(a) $
$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[0, 2]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(a+0) - f(a)  +  f(b) - f(a+0) $
$f(x) = \begin{cases} 3, \text{ агар } x = 0, \\ e^{x^2-1}, \text{ агар } x \neq 0. \end{cases}$	$[-1, 1]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(b-0) - f(a)  +  f(b) - f(b-0) $
$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ агар } x = 1, \\ 2^{x^2-1}, \text{ агар } x \neq 1 \end{cases}$	$[-1, 2]$	$\bigvee_a^b [f] =  f(a+0) - f(a)  +  f(b) - f(a+0) $

**НАТИЖА**

Талабалар мисолларни муҳокама қилишади, исботлашади ва ўзаро мосликни топиб, жавобларини стрелка (чизик, белги ва шу кабилар) ёрдамида кўрсатишади.

«Мосини топ» методи ўйин методларидан бири бўлганлиги сабабли, барча талабаларни диққатини қаратишга ва фаол қатнашишга ундайдиган методдир.

Мустақил ўрганиб келишлари учун қуйидаги топшириқларни уйга вазифа сифатида бериш мақсадга мувофиқ ҳисобланади.

1-топшириқ.  $f(x)$  функциянинг  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланмаган эканлигини кўрсатинг.

№	$f(x)$	$[a, b]$
1	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0. \end{cases}$	$[0, 2]$
2	$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{агар } x = 0, \\ \frac{4}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0. \end{cases}$	$[0, 2]$
3	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0, \\ 5x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \in [0, \pi]. \end{cases}$	$[0, \pi]$
4	$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{агар } x = 0, \\ \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \in [0, \pi]. \end{cases}$	$[0, \pi]$
5	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{агар } x \in [0, \pi], \\ 2, & \text{агар } x = 2. \end{cases}$	$[0, 2]$

2-топшириқ.

1. Агар  $f(x)$  функция  $[a, b]$  кесмаларида ўзгаришлари чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\varphi(x) = \bigvee_a^x [f]$$

функциянинг монотон камаювчи эканлигини исботланг.

2. Агар  $f(x)$  функция  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланган бўлса, унинг чегараланган эканлигини исботланг.

3. Агар  $f(x)$  функция  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланган бўлса, у ҳолда

$$h(x) = \bigvee_a^x [f] - f(x)$$

функциянинг монотон камаювчи эканлигини исботланг.

4. Агар  $f(x)$  функция  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланган бўлса, у ҳолда  $f(x)$  функциянинг ҳам  $[a, b]$  кесмада ўзгариши чегараланган эканлиги ва

$$\bigvee_a^b [f] \leq \bigvee_a^b [f]$$

бўлишини исботланг.

5.  $[a, b]$  кесмада узлуксиз чекли хосилага эга бўлган функциянинг ўзгариши чегараланган эканлигини исботланг.

6. Агар  $f(x)$  функциянинг  $[a, b]$  кесмада тўла ўзгариши  $A$  бўлса, у холда  $kf(x) + c$  функциянинг  $[a, b]$  кесмада тўла ўзгаришини топинг.

7.  $f(x) - [a, b]$ , ( $a < b$ ) кесмада аниқланган функция бўлсин.

$$\int_a^b [f] = 0$$

бўлиши учун  $f(x) = \text{const}$  бўлиши зарур ва этарли эканлигини исботланг.

8.  $f(x)$  функциянинг  $[a, b]$  кесмадаги ўзгариши чегараланган бўлсин.  $f(x)$  функциянинг  $[a, b]$  кесмада монотон камаймайдиган бўлиши учун

$$\int_a^b [f] = f(b) - f(a)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва этарли эканлигини исботланг.

## ХУЛОСА

Ҳозирги вақтда математика фанини ўрганиш ва уни сифатли ўқитишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Шу муносабат билан математикани ўқитишни янада самарали илғор педагогик усулларни ишлаб чиқиш ва мавжудларини дарсларни ўтишда қўллаш бўйича бир қатор илмий изланишлар [1-21] олиб борилмоқда. Айтиб ўтиш жоизки, мавзуларни ўтишда ва янги педагогик технологияларни нафақат математик анализнинг танланган бобларини ўқитишда, балки дифференциал тенгламалар фани бўйича дарсларни ўтишда ҳам қўлланилиши талабаларнинг илмий изланишлар олиб боришларини фаоллаштиришига [22-30] ҳамда анча мураккаб бўлган илмий мақолаларни ўзлаштиришларига ижобий таъсир кўрсатмоқда.

## REFERENCES

1. Марданова Ф.Я. Нестандартные методы обучения высшей математике // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 19-22.
2. Шарипова И., Марданова Ф. Преимущества работы в малых группах при изучении темы первообразной функции // Проблемы педагогики. 50:5 (2020), С. 29-32.
3. Rasulov T.H., Rashidov A.Sh. The usage of foreign experience in effective organization of teaching activities in Mathematics // International Journal of Scientific & Technology Research. 9:4 (2020), pp. 3068-3071.
4. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей // Вестник науки и образования. 96:18 (2020), часть 2, С 5-7.
5. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.

6. Boboeva M.N., Rasulov T.H. The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students // Academy. 55:4 (2020), pp. 68-71.
7. Бобоева М.Н. Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными // Наука, техника и образование. 73:9 (2020), С. 48-51.
8. Бобокулова С.Б., Бобоева М.Н. Использование игровых элементов при введении первичных понятий математики // Вестник науки и образования. 99:21 (2020), часть 2, С. 85-88.
9. Бобоева М.Н., Шукурова М.Ф. Обучение теме «множества неотрицательных целых чисел» с технологией «Бумеранг» // Проблемы педагогики. 51:6 (2020), С. 81-83.
10. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics // Academy. 55:4 (2020), pp. 65-68.
11. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений. Молодой учёный, 90:10 (2015), С. 16-20.
12. Расулов Т.Х., Ширинова М.У. Об одном применении леммы Морса // Молодой учёный. № 9 (2015), С. 36-40.
13. Rasulov T., Rasulova Z. Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject // J. Glo. Res. Math. Arch. 6:10 (2019), pp. 43-45.
14. Бобоева М.Н. Метод графического органайзера при изучении темы «Множество неотрицательных целых чисел» // Проблемы науки, 63:4 (2021), С. 71-74.
15. Марданова Ф.Я. Нестандартные методы обучения высшей математике // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 19-22.
16. Бобоева М.Н., Меражов Н.И. Поля значений  $2 \times 2$  операторной матрицы с одномерными интегральными операторами // Вестник науки и образования. 95:17-2 (2020).
17. Сайлиева Г.Р. Использование метода «Математический рынок» в организации практических занятий по «Дискретной математике» // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 27-30.
18. Бобоева М.Н. Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел» // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 23-26.
19. Бобоева М.Н. Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел» кластерным методом // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 23-26.
20. Тошева Н.А. Использование метода мозгового штурма на уроке комплексного анализа и его преимущества // Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 31-34.
21. Расулов Т.Х. Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения // Наука, техника и образование. 73:9 (2020), С. 74-76.

22. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.448-454.
23. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция, Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66
24. Расулов Х.Р., Джўракулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress, v.2 / issue 1, (2021), (issn: 2181-1601) p.455-462.
25. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
26. Расулов Х., Джуракулова Ф. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.
27. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
28. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
29. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
30. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.