ISBN 978-9943-18-262-2

Modern
Stoch**A**stic
Models &
Proble**M**s
Of Actuarial
Ma**TH**ematics

Organizer – Karshi State University

Abstract of Communications of the Conference

Тезисы докладов Конференции

Организатор – Каршинский государственный университет

Совре**М**енные
Стох**А**стические
Модели и
Пр**О**блемы
Актуар**Н**ой
Ма**Т**ематики

Karshi, Uzbekistan

2020

Ministry of Higher and Secondary Special Education
of the Republic of Uzbekistan

Karshi State University

ABSTRACTS
of communications

of the Conference

Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics

September 25, 2020
Karshi, Uzbekistan

"PPCH NASAF"
2020

Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан

Каршинский государственный университет

ТЕЗИСЫ
докладов

конференции

Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики

25 сентября, 2020
Карши, Узбекистан

''ИПТД Насаф''
2020

УДК 519.2, 519.6, 512.6, 517.4
ББК 22.1
А-21

Тезисы докладов конференции “Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики”. Под ред. А.А.Имомова. – Карши, Узбекистан, 2020. – 164 стр.

ISBN 978-9943-18-262-2

В книге собраны тезисы конференции «Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики», состоявшейся в Каршинском государственном университете 25 сентября 2020 года. В ней представлены результаты научных исследований в области теории вероятностей, случайных процессов, теории массового обслуживания, математической статистики, динамических систем, алгебраических структур, математического моделирования и анализа систем и др.

Сборник будет полезен научным исследователям, преподавателям вузов, студентам и всем, кто интересуется современными тенденциями теоретической и прикладной математики.

УДК 519.2, 519.6, 512.6, 517.4
ББК 22.1
А-21

ISBN 978-9943-18-262-2

9 789943 182622

Contents / Оглавление

Определитель возмущения и основное состояние для обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке

Неъматова Ш., Расулов Т.
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
e-mail: rth@mail.ru

Аннотация

Для обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке построен определитель возмущения и изучен основное состояние этой модели.

Ключевые слова: определитель возмущения, основное состояние, обобщенная модель Фридрихса, существенный спектр.

Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики сводятся к исследованию спектральных свойств обобщенной модели Фридрихса [1, 2]. Поэтому изучение определителья возмущения и основных состояний обобщенной модели Фридрихса играет важную роль в современной математической физике.

Пусть $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ – множество всех комплексных, вещественных и целых чисел, соответственно. Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб $(-\pi/h; \pi/h]^{\mathrm{d}}$ – с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа в котором операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $((2\pi/h)\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Например, если $\mathrm{d} = 3$ и

$$a = (\frac{\pi}{2h}, -\frac{2\pi}{3h}, \frac{5\pi}{6h}), \quad b = (\frac{2\pi}{3h}, -\frac{\pi}{6h}, \frac{\pi}{2h}),$$

то

$$a + b = (-\frac{5\pi}{6h}, -\frac{5\pi}{6h}, -\frac{2\pi}{3h}), \ 6a = (\frac{\pi}{h}, 0, \frac{\pi}{h}) \in \mathbb{T}_h^3.$$

По строению множества $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ видно, что для любого $\Omega \subset \mathbb{R}_h^{\mathrm{d}}$ существует $h = h(\Omega) > 0$ такое, что $\Omega \subset \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$, т.е. $\lim\limits_{h\to 0} \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}} = \mathbb{R}_h^{\mathrm{d}}$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$. Обозначим через $\mathcal{A}_\mu(h)$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ называются нульчастичной и одночастичной подпространства фоковского пространства $F(L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}))$ по $L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$, соответственно.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(h)$, действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{A}_\mu(h) := \begin{pmatrix} A_{00}(h) & \mu A_{01}(h) \\ \mu A_{01}^*(h) & A_{11}(h) \end{pmatrix},$$

с матричными элементами $A_{ij}(h) : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \le j$, $i, j = 0, 1:$

$$A_{00}(h) f_0 = -\varepsilon_h f_0, \quad A_{01}(h) f_1 = \int_{\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} v_h(t) f_1(t) dt,$$

$$(A_{11}(h) f_1)(x) = (-\varepsilon_h + w_h(x)) f_1(x), \quad f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H},$$

где ε_h– вещественное положительное число, $w_h(\cdot)$ и $v_h(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$, причем

$$\min_{x\in\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} w_h(x) = 0,$$

а $\mu > 0$ – "параметр взаимодействия". Очевидно, что при этих предположениях оператор $\mathcal{A}_\mu(h)$ ограничен и самосопряжён в $\mathcal{H}$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_0(h)$ действует в $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_0(h) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(h) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $\mathcal{A}_\mu(h) - \mathcal{A}_0(h)$ оператора $\mathcal{A}_0(h)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [3] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(h)$ имеет место равенство

$$\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu(h)) = [-\varepsilon_h; -\varepsilon_h + M_h], \quad M_h := \max_{x\in\mathbb{T}_h^{\rm d}} w_h(x).$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [-\varepsilon_h; -\varepsilon_h + M_h]$ функцию

$$\Delta_\mu(h;\, z) := -\varepsilon_h - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}_h^{\rm d}} \frac{v_h^2(t)dt}{-\varepsilon_h + w_h(t) - z}.$$

Обычно, функция $\Delta_\mu(h;\, \cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_\mu(h)$.

Пусть I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Так как $\mathcal{A}_\mu(h) - \mathcal{A}_0(h)$ является оператором ранга 2, определитель возмущения $\Delta_{\mathcal{A}_\mu(h)/\mathcal{A}_0(h)}(z)$ хорошо определена [4] по формуле

$$\Delta_{\mathcal{A}_\mu(h)/\mathcal{A}_0(h)}(z) := \det\left(I + (\mathcal{A}_\mu(h) - \mathcal{A}_0(h))(\mathcal{A}_0(h) - z)^{-1}\right).$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Определитель возмущения $\Delta_{\mathcal{A}_\mu(h)/\mathcal{A}_0(h)}(z)$ оператора $\mathcal{A}_0(h)$ относительно оператора $\mathcal{A}_\mu(h) - \mathcal{A}_0(h)$ имеет вид*

$$\Delta_{\mathcal{A}_\mu(h)/\mathcal{A}_0(h)}(z) = -\frac{1}{z}\Delta_\mu(h;\, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_0(h)).$$

Теорема 2. *При всех значениях $\mu > 0$ и $h > 0$ оператор $\mathcal{A}_\mu(h)$ имеет не менее одного и не более двух собственных значений.*

В теореме 1, собственное значение $E_\mu(h)$ оператора $\mathcal{A}_\mu(h)$ которое существует при всех $\mu > 0$ обычно называется основным состоянием и в этом случае компоненты соответствующего собственного вектора-функции выглядят так:

$$f_0 = \text{const} \neq 0, \;\; f_1(x) = -\frac{\mu v_h(x) f_0}{-\varepsilon_h + w_h(x) - E_\mu(h)}.$$

Список литературы

[1] Лакаев С. Н. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. *Труды семинара им. И.Г.Петровского.* -Ленинград, **1986**, *11*, 210–223.

[2] Минлос Р. А., Синай Я. Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. *Теор. и матем. физ.* **1979**, *2*, 230–243.

[3] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов.* М.: Мир, 1982.

[4] Gohberg I. C., Krein M. G. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1969.