

KELI DARAXTIDA KOMBINATORIK XOSSALAR: DARAXT QIRRALARI MISOLIDA. D-MUNTAZAM DARAXT USTIDA KONTURLAR

Mardanova Feruza Yadgarovna

Buxoro davlat universiteti

Matematik analiz kafedrası o'qituvchisi

f.y.mardanova@buxdu.uz

Xusainova Mulkijahon Ismatullayevna

Buxoro davlat universiteti

Fizika-matematika fakulteti magistranti

Annotatsiya: Ushbu maqolada biz n o'lchamli konturlarning aniq sonini hisoblab chiqdik, unda o'zgarmas qirra mavjud. D-daraxtlari va umumiy daraxtlar uchun qo'zg'almas qirrani o'z ichiga oladi. Shuningdek, biz bir xil o'lchamdagi cheksiz ko'p konturlarga ega bo'lgan mahalliy cheklangan daraxtlarning tavsifini oldik. Bundan tashqari asosiy yangilik sifatida daraxt uchlari hamda qirralari soni to'plamini yaratilgan.

Kalit so'zlar: D-daraxtlar, n o'lchamli konturlar, Catalon sonlari, muntazam daraxt, iteratsiya, subkontur, subgraf.

COMBINATORY PROPERTIES IN KELI TREE: EXAMPLE OF TREE EDGES. CONTOURS ON THE D-REGULAR TREE

Mardanova Feruza Yadgarovna

Bukhara State University

Teacher of the Department of Mathematical Analysis

f.y.mardanova@buxdu.uz

Xusainova Mulkijahon Ismatullayevna

Master of the Faculty of Physics and Mathematics

Annotation. In this paper, we have calculated the exact number of n -dimensional contours that contain an invariant edge. Includes a fixed edge for D -trees and generic trees. We also derived a description of locally finite trees with infinitely many contours of the same size. In addition, a set of tree vertices and edges has been created as the main innovation.

Keywords: D -trees, n -dimensional contours, Catalon numbers, regular tree, iteration, subcontour, subgraph.

Asosiy texnika-daraxtlarda sanab o'tilgan muammolarni tekshirishda generatsiya funksiyalaridan foydalanish; bu usul juda toza isbotlarni keltirib chiqaradi. Texnikaga

oid klassik ma'lumotlarni esa Kembrijdagi Massachusetts texnologiya institutininig taniqli matematika professori, 2000-2010 yilgacha Norman Levinson nomidagi Amaliy matematika professori bo'lgan Richard Piter Stenlining ikki kitobi [1], [2] larda ko'rish mumkin.

Barchga tanish bo'lgan Catalon sonlari $C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} (n \in \mathbb{N})$, kombinatorikada juda ko'p talqinlar mavjud. Ayniqsa, bu raqamlar ikkilik daraxtlardagi konturlar sonini (1-taklif bo'yicha) hisoblaydi. Aslida, T_2 dagi ildizi x bo'lgan ikkilik daraxt bo'lsin. Barcha $n \geq 2$ uchun, bizda $|\mathcal{F}_{T_2}^n(x)| = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ mavjud.

Bu yerda biz d -dagi konturlarning aniq sonini hisoblaydigan isbotni ko'rib chiqamiz, generatsiya funksiyalaridan foydalangan holda daraxtlar, muqobil hosilasini topish mumkin.[2]. $\mathbb{R}((z))$ aniqlanmagan rasmiy qator halqasi bo'lsin.

$$\mathbb{R}((z)) = \{\sum_{k \geq 0} a_k z^k : a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Qatordagi z^n koeffitsientini chiqaradigan $[z^n]$ operator ya'ni $[z^n](\sum_{k \geq 0} a_k z^k) = a_n [z^n]$ ni aniqlaymiz.

Lagranj teoremasi ma'lum sharoitlarda qator koeffitsientlarini aniq hisoblashimiz mumkinligini aytadi.

1-teorema (Lagranj Inversion Theorem, Lagranj-1770). $\phi \in \mathbb{R}((z))$ ni $\phi(0) \neq 0$ va $f(z) \in z\mathbb{R}((z))$ $f(z) = z\phi(f(z))$ bilan aniqlaymiz. Bunda

$$[z^n]f(z) = \frac{[z^{n-1}]1}{n} \phi(z)^n$$

2-taklif. Agar $d \geq 2, n \geq 1$, T_d d -ildizli x bo'lgan daraxt bo'lsin. So'ng $|\mathcal{F}_{T_d(x)}^1| = 0$ va $n \geq 2$ bo'lganda esa

$$|\mathcal{F}_{T_d(x)}^1| = \left\{ \frac{1}{n} \binom{\frac{d}{d-1}(n-1)}{\frac{1}{d-1}(n-1)} \right\}_0^n \quad n \equiv 1.$$

Isbot. Endervertex x bo'lgan har bir chekka uchun biz bu chetni konturga kiritishimiz yoki kiritmasligimiz mumkin. Agar buni o'z ichiga olmasak, biz x ildizni bu qirraning boshqa uchiga olib boramiz hamda yana bir xil tartibni qo'llaymiz. $f(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ koeffisientlari barcha $n \geq 1$ uchun $a_n = |\mathcal{F}_{T_d(x)}^n|$ bo'lgan hosil qiluvchi funksiyani ko'rib chiqamiz. U holda quyidagi $f(X) = (X + f(x))^d$ tenglamaga ega bo'lamiz [2-6]. $h(X) = X + f(X)$, deb hisoblaymiz, bizga $h(X) = X + f(X)^d$ bor, shuning uchun $h(X) = X(1 - h(X)^{d-1})^{-1}$. Lagranj teoremasini $\phi(X) = (1 - X^{d-1})^{-1}$ bilan qo'llasak $[X^n]h(X) = \frac{1}{n} [X^{n-1}]\phi(X)^n$. Keyin

$$\phi(X)^n = (1 - X^{d-1})^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n + k - 1}{k} X^{(d-1)k}.$$

Shunday qilib, agar bir xil k uchun $n - 1 = (d - 1)k$ bo'lsa, bizda

$$[X^n]h(X) = \frac{1}{n} \binom{n+k-1}{k} = \frac{1}{n} \binom{\frac{d}{d-1}(n-1)}{\frac{1}{d-1}(n-1)} \blacktriangle.$$

Izoh. $h(X) = X + h(X)^d$ tenglama uchun geometrik talqin mavjud. T_d ildizi x bo'lgan d -daraxt bo'lsin. e qirrani qo'shamiz, buning uchun x barg bo'ladi va u e ning oxirgi nuqtasi bo'ladi. Endilkda, e qirrani kiritishimiz yoki kiritmasligimiz ham mumkin.

Tasdiq. $d \geq 2$, T_d ildizi x bo'lgan d -daraxt bo'lsin hamda $n \geq 1$ va $n \equiv 1$ va $k = (n - 1)/(d - 1)$ bo'lsin. Bizda

$$\frac{1}{n} d^k \leq |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)| \leq \frac{1}{n} (ed)^k.$$

Bu quyidagi tengsizlikning natijasidir. Barcha butun sonlar $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k. \blacklozenge$$

3-taklif. $d \geq 2$, $n \geq 1$, T $d + 1$ muntazam daraxt, x esa T ning qirradi bo'lsin. Bunda,

$$|\mathcal{F}_{T_d}^n(x)| = a_{n-1} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k},$$

bo'lganda $a_n = |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)|$.

Tasdiq. $g(X) = \sum_{n \geq 1} b_n X^n$ koeffisientlari $b_n = |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)|$ shuningdek, $f(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ $b_n = |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)|$ koeffisientni hosil qiluvchi bo'lsin. $g(X) = (X + f(X))^{d+1} = Xf(X) + f(X)^2$ ekanligini unutmamiz. Ushbu tsdiq oldingi taklining (3-taklif) bevosita natijasidir.

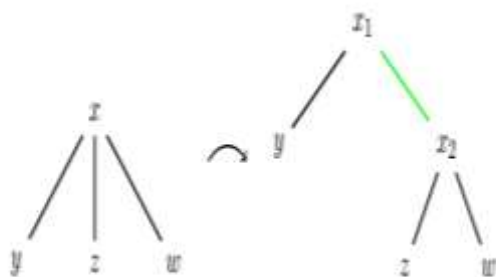
2-teorema. T mahalliy chekli va cheksiz daraxt bo'lsin. x T ning ildizi bo'lsin va T ning uchlari kamida ikkita bolaga ega bo'lsin. Bunda biz barcha $n \geq 1$ uchun, $|\mathcal{F}_T^n(x)| \leq |\mathcal{F}_{T_2}^n(x)|$ mavjud ekanligini bilamiz.

Isbot. Biz T' ning ikkilik yorliqli daraxtini quramiz, shunday qilib T T' ning minori bo'ladi. x dan boshlab biz T ning uchlari kenglik-birinchi qidiruv tartibiga muvofiq qayta ishlaymiz, ya'ni biz x ildizidan boshlaymiz, keyin uning qo'shnilarini, keyin esa qo'shnilarini qayta ishlaymiz. $s > 2$ ta bolaga ega bo'lgan T ning y cho'qqisini qayta ishlaganimizda, deylik z_1, z_2, \dots, z_s , y ni $s-1$ ni y_1, y_2, \dots, y_{s-1} uchlari bilan almashtiramiz. Har bir i uchun y_i ning bolalari, y_{i+1} va z_i , y_{s-1} ning bolalari esa z_{s-1} va z_s . T cho'qqisida 2ta bola bo'lsa, biz y uchini ushlab turamiz. T' ikkilik daraxt ekanligi ma'lum. Biz x' T' ning ildizi deb ataymiz. $\mathcal{F}_T^n(x)$ dagi har bir C konturini oladigan va $\mathcal{F}_{T'}^n(x')$ da $f(C)$ konturni hosil qiluvchi f inyeksion xaritasi mavjudligini ko'rsatamiz. Aslida, C dagi yz_i shaklining har bir chekkasi uchun biz T' dagi $y_i z_i$ chekkasini bog'laymiz (yz_s uchun y_{s-1}, z_s olinadi) va y uchun $s=2$ bolali yz_i qirrani ushlab turamiz. Ushbu usul tomonidan ishlab chiqarilgan qirralarning to'plami $f(C)$ sifatida aniqlanadi. Argumentni

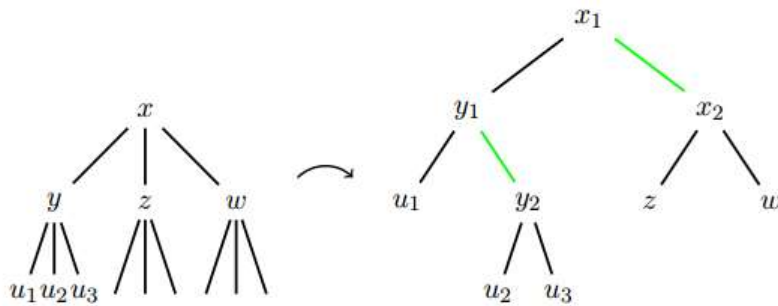
soddalashtirish uchun yangi qirralarni yashil qirralar deb ataymiz [6-10].

$f: \mathcal{F}_T^n(x) \rightarrow \mathcal{F}_{T'}^n(x')$ boshqacha qilib aytganda, $f(C) \subset \mathcal{F}_{T'}^n(x)$ ga tegishli ekanligini isbotlashimiz kerak. $f(C)$ kontur ekanligini ko'rish uchun $f(C)$ da yashil qirralarning yo'qligiga e'tibor beramiz. Qarama-qarshilikka ko'ra, $T' \setminus f(C)$ ning x' ildizini o'z ichiga olgan chekli bog'langan komponenti yo'q deb faraz qilaylik, u holda T' da, T' ning x' ildizidan boshlanadigan chekli γ' yo'l mavjud. T' ning barcha yashil qirralarini, xususan γ' ni qisqartirganimizda, biz x ildizdan boshlanadigan T da asl daraxt va γ yo'lini olamiz. Bizda, γ' yo'lida yashil qirralar yo'qligi sababli, endi T da x ildizdan $E(\gamma) \cap C = \emptyset$ bilan boshlanadigan cheksiz γ yo'l ya'ni ziddiyat mavjud. $f(C)$ ning minimallik xususiyatiga ega ekanligini ko'rish uchun $E(T') \setminus f(C) \setminus \{e'\}$ hali ham x' ildizini o'z ichiga oluvchi chekli komponentga ega bo'ladigan $e' \in f(C)$ qirrasini mavjud deb faraz qilamiz. Barchanyashil qirralarni qisqartirganimizda va mos keladigan $e \in C$ chetini (e' ga f bilan bog'langan qirra) qo'shsak, C kontur bo'lgani uchun, T da x ildizidan boshlanadigan cheksiz a yo'li mavjud bo'lib, $e \in E(a)$. Biz shunday $e' \in E(a')$ qarama-qarshilikni olish uchun a yo'lidan foydalanib, T' da x' dan boshlab cheksiz a' yo'lini quramiz. Darhaqiqat, a ning uchlarida T' daraxtini qurish jarayonini ko'rib chiqamiz. x ildizdan boshlab, har bir $zy \in E(a)$ qirrasini uchun, bu yerda z otasi, y z ni qayta ishlagandan so'ng shunday $1 \leq j \leq s - 1$ mavjud bo'ladiki, z_j, y T' ning qirrasini bo'ladi. Agar $j=1$ bo'lsa, a ga $z_j y$ chekkasini qo'shamiz, agar $j > 1$ bo'lsa, z_1 dan boshlanib, z_j (yashil qirralardan iborat: $z_1 z_2, z_2 z_3, \dots, z_{j-1} z_j$) bilan tugaydigan chekli yo'lni va $z_j y$ chetini a' ga qo'shamiz. a yo'li cheksiz bo'lgani uchun va $e \in E(a)$ biz x' dan boshlab cheksiz a' yo'lini quramiz, shunda $e' \in a'$ ga tegishli bo'ladi. Ushbu $f(C)$ haqiqatdan ham kontur ekanligini ko'rsatadi.

Inyeksion ekanligini va $|C| = n \implies |f(C)| = n$ degan ma'noni anglatishini tekshirish ham oson.



Birinchi iteratsiyaga misol.



Ikkinchi iteratsiyaning bir qismi.

Yuqoridagi teorema bo'yicha biz har bir tepada kamida r bolaga ega bo'lgan daraxtlarni taxmin qilamiz, bu yerda $r \geq 2$.

3-teorema (Bollobas teoremasi). Agar $\{(A_i B_i): i \in I\}$ chekli to'plamlarning cheklangan to'plami bo'lsa, shunday qilib, agar $i=j$ bo'lsa, $A_i \cap B_i = \emptyset$.

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{|A_i| + |B_i|}{|A_i|} \right)^{-1} \leq 1.$$

Xususan, agar hamma $i \in I$ uchun bizda $|A_i| \leq a$ va $|B_i| \leq b$ bo'lsa bunda $|I| \leq \binom{a+b}{a}$.

4-teorema. Aytaylik, T lokal cheklangan x ildizli cheksiz daraxt bo'lsin. T ning barcha uchlari kamida r bolaga ega bo'lsin, ya'ni $r \geq 2$. Bunda barcha $n \geq 1$ uchun

$$|\mathcal{F}_T^n(x)| \leq \binom{n + \lfloor \frac{n-r}{r-1} \rfloor}{\lfloor \frac{n-r}{r-1} \rfloor}.$$

Bu yerda $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}$.

Isbot. C ni T dan olib tashlaganimizda T dagi n o'lchamli kontur va I_c chekli bog'langan komponent bo'lsin. I_c dagi $|E(I_c)|$ qirralar sonini yuqori chegarasini topamiz. B I_c va C ning birlashmasi bo'yicha T ning induksiyalangan subgrafi bo'lsin. $B=(V,E)$ n ta bargli T ning ildizli chekli pastki daraxti ekanligini va B ning barg bo'lmagan har bir tepasida kamida r ta bola borligini unutmamiz [10-13]. B ning uchlari soni t bo'lsin va $k=t-n$ sonini hisobga olamiz. $k-I_c$ ning uchlari soniligiga e'tibor qaratamiz. T ning barcha uchlarida kamida r bola borligidan foydalanib,

$$2(t - 1) = \sum_{v \in V} d(v) \geq (k - 1)(r + 1) + r + n.$$

shunday, $k \leq (n - 1)/(r - 1)$ ga ega bo'lamiz.

I_c daraxt bo'lgani uchun I_c dagi qirralarning soni $|E(I_c)| = k - 1 \leq (n - r)/(r - 1)$. Isbotni yakunlash uchun quyidagilar o'rinlidir:

Agar C_1 va C_2 T dagi x cho'qqisining ikkita alohida konturi bo'lsa, ularning har biri n o'lchamli va agar C_1 T dan chiqartirilsa I_{C_1} chekli bog'langan component bo'lsa, u holda $E(I_c) \cap C_2 \neq \emptyset$.

Faraz qilaylik, T da $E(I_{C_1}) \cap C_2 \neq \emptyset$ shu kabi yuqoridagidek har biri n o'lchamli ikkita C_1 va C_2 konturlar mavjud. T dan C_2 ni olib tashlaganimizda C_2 chekli bog'langan component bo'lsin. U holda I_{C_1} I_{C_2} ning subgrafi va $I_{C_1} \neq I_{C_2}$. Negaki, $|\partial_e(I_{C_1})| < |\partial_e(I_{C_2})| = n$ deb faraz qilganimizda I_{C_1} va I_{C_2} T ning pastki daraxtlari va T ning barcha uchlari kamida r bolaga ega.♦

$(C, E(I_C))$ o'lchamdagi C kontur jufti bo'lsin, bu yerda T dan C ni olib tashlaganimizda I_C chekli bog'langan komponentdir. Bizda $|C| = n$ va $|E I_C| \leq \lfloor (n-r)/(r-1) \rfloor$ mavjud. Qachonki, to'plam $\{(C, E(I_C)): C \in \mathcal{F}_T^n(x)\}$ cheklangan va $C_1 \cap E(C_2) = \emptyset$ bo'lsa, $C_1 = C_2$ dir. Yuqoridagi teoremaning natijasini quyidagicha

$$|\mathcal{F}_T^n(x)| \leq \binom{n + \lfloor \frac{n-r}{r-1} \rfloor}{\lfloor \frac{n-r}{r-1} \rfloor}$$
 yakunlaymiz.

Ta'rif. T ildizi x bo'lgan daraxt bo'lsin. C - x ning ildiz kontur bo'lib, $l \in C$ chekkasi mavjud.

n o'lchamdagi T bo'yicha C ildizli konturlar to'plamini $|\mathcal{F}_{r,T}^n(x)|$

bilan belgilaymiz. Bizda $|\mathcal{F}_{r,T}^n(x)| \leq |\mathcal{F}_{r,T}^n(x)|$ ekanligi aniq.

Taklif. T_d ildizi x bo'lgan daraxt bo'lsin. $n \geq d$ bo'lganda

$$|\mathcal{F}_{r,T_d}^n(x)| = a_n - \sum_{m_1+m_2+\dots+m_d=n} a_{m_1} \dots a_{m_d};$$

bu yerda $a_n = |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)|$. Shuni esda tutish joizki: $|\mathcal{F}_{r,T_d}^n(x)| = 0$ ($n < d$)

Tasdiq. Aytaylik, $f_{T_d}(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ va $f(X) = \sum_{n \geq 1} c_n X^n$ mos ravishda $a_n = |\mathcal{F}_{T_d}^n(x)|$ hamda $c_n = |\mathcal{F}_{r,T_d}^n(x)|$ koeffisientli funksiyalarni hosil qilsin. x bilan har bir qirra uchun biz uni C konturiga qo'shishimiz yoki qo'shmasligimiz mumkin. Jumladagi kabi bir xil jarayonni takrorlaymiz, agar biz qirrani qo'shmasak, ildizni o'sha chetning so'nggi nuqtasiga o'tkazamiz. Xuddi shu tasdiq orqali biz $f_{T_d}(X) = (X + f_{T_d}(X))^d$ ni topamiz. Shunday

$$f(X) = (X + f_{T_d}(X))^d = f_{T_d}(X) - f_{T_d}(X))^d.$$

n -o'lchamdagi ko'p cheksiz konturlar bir xil o'lchamdagi n uchun ko'p konturlar borligini tekshirish mumkin, ularning chekli bog'langan komponenti maxsus qirra x ni o'z ichiga oladi.

Bizda $G=(V,E)$ graf berilgan bo'lsin. Ikkita x va y uchlarini bog'lovchi G dan har bir chekli mustaqil yo'l uchun γ ning barcha qirralarini (hamda ichki uchlarini) olib tashlaymiz va xy qirrasini qo'shamiz. Ushbu grafikni, ya'ni G ning minorini, balki qirralari kam bo'lgan \tilde{G} bilan belgilaymiz.

Lemma. T bargsiz x ildizli daraxt bo'lsin. Faraz qilaylik, har bir mustaqil yo'l T chekli uzunlikka ega. Bu yerda $|\mathcal{F}_T^n(x)| < +\infty$ faqat va faqat $|\mathcal{F}_{\tilde{T}}^n(x)| < +\infty$. \tilde{T} ning har bir konturi uchun $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ kontur T ning mustaqil yo'llarining (yagona) oilasiga bog'langan. Bunda

$$\sum_{C \in \mathcal{F}_T^n(x)} \prod_{i=1}^n |\gamma_i| = |\mathcal{F}_T^n(x)|.$$

Yig'indi va ko'paytma cheklangan bo'lgani uchun biz $|\mathcal{F}_T^n(x)| < +\infty$ ni olamiz. Qarama-qarshilik o'xshashdir.

Shunday qilib biz quyidagi xarakteristikaga ega bo'lamiz.

5-teorema. T lokal chekli ildizli, x ildizga ega bargsiz daraxt. Agar T cheksiz mustaqil yo'lga ega bo'lsa, u holda shunday biz $|\mathcal{F}_T^n(x)| < +\infty$ uchun $n \geq 1$ mavjud.

Tasdiq. Faraz qilaylik, T ning kamida uchta darajali chekli sonli uchlari bor. Agar mustaqil yo'l cheksiz bo'lsa, biz bu yo'lni barg bilan almashtiramiz. Mazkur daraxtni \tilde{T} bilan belgilaymiz. T ning cheksiz mustaqil yo'li borligi sababli, \tilde{T} ning kamida bitta bargi mavjud. Bundan tashqari \tilde{T} chekli daraxtdir, chunki T ning eng kamida bu darajaga ega bo'lgan chekli soni bor. B \tilde{T} daraxtning pastki qismi bo'lsin, shunda $x \in B$ va B hech qanday bargni o'z ichiga olmaydi. C B ning tashqi hegara qirralari bo'lsin. Shu tarzda qurilgan har bir C uchun biz bir xil o'lchamdagi T konturlar oilasini olamiz va T dagi har qanday kontur bunday B uchun ba'zi bir tashqi chegara qirralaridan kelib chiqadi. Bizda \tilde{T} ning barglari bo'lmagan cheklangan miqdordagi pastki daraxtlari borligi sababli $n_0 \geq 1$ mavjud, barcha $n \geq n_0$ uchun $|\mathcal{F}_T^n(x)|$ mavjud [9-11].

Faraz qilaylik, T ning cheksiz sonida teskarisi uchun kamida uch darajali uchlari mavjud. x dan masofasi k bo'lgan qirralarning to'plami E_k bo'lsin. E_k -bu kontur. T ning kamida uch darajali uchlari soni cheksiz bo'lgani uchun, k ni orttirganimizda, har bir E_k dagi chekkalar soni cheksizlikka intiladi. $(k_i)_i$ natural sonlarning ortib boruvchi ketma-ketligi bo'lsin, $n_i = |E_{k_i}|$ ham ortib boruvchi bo'lsin. γ cheksiz mustaqil yo'l bo'lsin. Shunday i_0 mavjud bo'lib, E_{k_i} barcha $i \geq i_0$ uchun cheksiz mustaqil γ yo'lining e_i qirrasini o'z ichiga oladi. U holda e_i ni γ ning istalgan boshqa cheti bilan almashtirib, bir xil n_i o'lchamdagi ko'p cheksiz konturlar mavjud.

Ta'rif. Subkonturlarning har qanday maksimal bog'langan to'plami (komponenti) Γ chegarasining konturi deyiladi.

6-eorema. K Keli daraxtining bog'langan subgrafi bo'lsin. Bunda ,

$$L_n = \sum_{i=0}^n (k+1) k^i$$

qirralar to'plamini topish uchun maxsus formula yaratildi.

n o'lchamli konturlarning aniq sonini hisoblab chiqdik, unda o'zgarmas qirra mavjud. D-daraxtlari va umumiy daraxtlar uchun qo'zg'almas qirrani o'z ichiga oladi. Shuningdek, biz bir xil o'lchamdagi cheksiz ko'p konturlarga ega bo'lgan mahalliy cheklangan daraxtlarning tavsifini oldik. Bundan tashqari asosiy yangilik sifatida daraxt uchlari hamda qirralari soni to'plamini yaratdik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. R.P. Stanley. Enumerative combinatocs. vol 1. Cambridge University Press, Cambridge(1997).
2. R.P. Stanley. Enumerative combinatocs. vol2. Cambridge University Press, Cambridge(1999).
3. Бобоева М.Н. Поля значений одной 2×2 операторной матрицы с одномерными интегральными операторами. Вестник науки и образования. 17-2 (95) (2020), С 14-18.
4. Шарипова И.Ф, Марданова Ф.Я. [Использование истории изучения определенного интеграла в преподавании математики](#). Проблемы науки. 4 :63 (2021), 87-90 бетлар.
5. Г.Р Сайлиева, Использование метода «математический рынок» в организации практических занятий по «дискретной математике», Проблемы педагогики. 53(2), 27-30.
6. Jo'rayeva N.O. Mobile Softwareanwendungen zur Organisation unabhängiger Bildung// Berlin Studies Transnational Journal of Science and Humanities. Vol. 2, Issue 1.5 (2022), – P. -661-664. (13.00.00; № 7).
7. Dilmurodov E.B., Rasulov T.H. Essential spectrum of a 2×2 operator matrix and the Faddeev equation // European science, 51(2), (2020), pp. 7-10
8. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress, 2(1), (2021), pp. 559-567
9. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Analysis of the spectrum of a 2×2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 11(2), (2020), pp. 138-144
10. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
11. Марданова Ф.Я. Нестандартные методы обучения высшей математике. Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 19-22.
12. Mardanova F.Ya. Maktab matematikasida algebraik tenglamalarni yechishni o'rgatishda interfaol usullarni qo'llash. Science and Education. 2:11 (2021), 835-850 betlar.
13. Марданова Ф.Я. Математикадан фан тўғарақларини ташкил этиш ҳақида баъзи мулоҳазалар. Science and Education. 2:11 (2021), 870-882 бетлар.