О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ДВУХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Хайитова Х.Г. Email: Khayitova1172@scientifictext.ru

Хайитова Хилола Гафуровна – преподаватель,
кафедра математического анализа, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *в настоящей работе рассматривается ограниченная и самосопряженная модель Фридрихса H с двухмерным возмущением. Эта модель ассоциирована с системой двух частиц на d - мерной решетке Z^d. Определен определитель Фредгольма, соответствующий модели Фридрихса H. Нули этого определителя являются собственными значениями оператора H. Изучено число и местонахождение собственных значений модели Фридрихса H. Установлено, что модель Фридрихса H не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра.*
Ключевые слова: *модель Фридрихса, нелокальный потенциал, параметр взаимодействия, существенный спектр, кратность.*

ON THE NUMBER OF EIGENVALUES OF THE FRIEDRICHS MODEL WITH TWO-DIMENSIONAL PERTURBATION

Khayitova Kh.G.

Khayitova Khilola Gafurovna - Teacher,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL ANALYSIS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY, BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *in this paper we consider a bounded and self-adjoint Friedrichs model H with two-dimensional perturbation. This model is associated to a system of two particles on a d - dimensional lattice Z^d. The Fredholm determinant corresponding to the Friedrichs model H is defined. Zeros of this determinant are eigenvalues of the operator H. The number and location of the eigenvalues of the Friedrichs model H are studied. It is established that the model Friedrichs has no eigenvalues, located on the right hand side of the essential spectrum.*
Keywords: *Friedrichs model, nonlocal potential, coupling constant, essential spectrum, multiplicity.*

УДК 517. 984

Пусть $\mathbb{T}^d$ -мерной тор и $L_2(\mathbb{T}^d)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^d$. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим так называемый модель Фридрихса H действующий по формуле

$$H := H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2,$$

где H_0- оператор умножения на функцию $u(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{T}^d)$:

$$(H_0 f)(p) = u(p) f(p),$$

а $V_\alpha, \alpha = 1,2$ - нелокальные операторы взаимодействия вида

$$(V_\alpha f)(p) = v_\alpha(p) \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t) f(t) dt, \qquad f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

При этом $\mu_\alpha > 0, \alpha = 1,2$ – параметры взаимодействия, а $v_\alpha(\cdot), \alpha = 1,2$ и $u(\cdot)$-вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^d$. В этих предложения оператор A является ограниченным и самосопряженным.

По определению оператор возмущения $\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$ оператор H_0 является самосопряженным оператором ранга 2. Из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{ess}(H)$ оператора H совпадает с существенным спектром, точнее с спектром оператора H_0. Известно, что $\sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0) = [m, M]$, где числа m и M определяются равенствами

$$m \coloneqq \min_{p\in\mathbb{T}^d} u(p), \qquad M := \max_{p\in\mathbb{T}^d} u(p).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{ess}(H) = [m, M]$.

Определим регулярные в области $\mathbb{C}\backslash[m, M]$ функции

$$I_{\alpha\beta}(z) \coloneqq \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_\alpha(t) v_\beta(t) dt}{u(t) - z}, \qquad \alpha, \beta = 1,2;$$

$$\Delta(z) := det\left(\delta_{\alpha\beta} - \mu_\beta I_{\alpha\beta}(z)\right)_{\alpha,\beta=1}^{2}, \tag{1}$$

где

$$\delta_{\alpha\beta} \coloneqq \begin{cases} 1, если\ \alpha = \beta \\ 0, если\ \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

Видно, что $I_{\alpha\beta}(z) = I_{\beta\alpha}(z)$ при всех $\alpha, \beta = 1,2$ и $z \in \mathbb{C}\backslash[m, M]$. Обычно функция $\Delta(\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма ассоциированным с оператором H.

Установим связь между собственными значениями оператора H и нулями функции $\Delta(\cdot)$.

Лемма 1. *Число* $z \in \ \backslash[m, M]$ *является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда* $\Delta(z) = 0$.

Доказательство. Пусть число $z \in \ \backslash[m, M]$ есть собственное значение оператора H, а $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ соответствующая собственная функция. Тогда функция f удовлетворяет уравнению

$$u(p) f(p) - \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha v_\alpha(p) \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t) f(t) dt = z f(p). \tag{2}$$

Заметим, что для любых $z \in \mathbb{C}\backslash[m, M]$ и $p \in \mathbb{T}^d$ имеет место соотношение $u(p) - z \neq 0$. Тогда из уравнения (2) для f имеем

$$f(p) = \frac{1}{u(p) - z} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha C_\alpha v_\alpha(p), \tag{3}$$

где

$$C_\alpha \coloneqq \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t) f(t) dt, \qquad \alpha = 1,2. \tag{4}$$

Подставляя выражения (3) для f в равенства (4) получим, что уравнения (2) имеет нулевое решения тогда и только тогда, когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \left(1 - \mu_1 I_{11}(z)\right) C_1 - \mu_2 I_{12}(z) C_2 = 0 \\ -\mu_1 I_{21}(z) C_1 + \left(1 - \mu_2 I_{22}(z)\right) C_2 = 0 \end{cases}$$

или матричное уравнение

$$\left(\delta_{\alpha\beta} - \mu_\beta I_{\alpha\beta}(z)\right)_{\alpha,\beta=1}^{2} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0$$

имеет не нулевое решение $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$, т.е. когда $\Delta(z) = 0$, где $\mathbb{C}^2$- декартовая квадрат множества $\mathbb{C}$. Лемма 1 доказана.

Пусть $supp\{v_\alpha(\cdot)\}$ - носитель функции $v_\alpha(\cdot)$ и $mes(\Omega)$ - мера Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{T}^d$.

Следующая теорема устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $H_\alpha \coloneqq H_0 - \mu_\alpha V_\alpha, \alpha = 1,2$.

Теорема 1. *Если для любых $\alpha \neq \beta$ верно*

$$mes(supp\{v_\alpha(\cdot)\} \cap supp\{v_\beta(\cdot)\}) = 0, \quad (5)$$

то число $z \in \mathbb{C}\backslash[m, M]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда число z является собственным значением хотя бы одного из операторов $H_\alpha, \alpha = 1,$.

Для удобства читателя приведем следующий пример, где в случае $d = 1$ функции $v_\alpha(\cdot), \alpha = 1{,}2$, удовлетворяет условию (5), т.е. класс функций удовлетворяющих условию (5) не пусто:

$$v_1(x) := \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi, 0] \\ 0, & x \in [0, \pi] \end{cases};$$

$$v_2(x) := \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [-\pi, 0] \end{cases}.$$

Для этих функций при всех $x \in (-\pi, \pi]$ имеет место равенство $v_1(x)v_2(x) = 0.$ Поэтому $\{v_\alpha(\cdot)\} \cap \quad \{v_\beta(\cdot)\}) = \emptyset$ для всех $\alpha \neq \beta$.

Следующая теорема описывает число и местонахождение собственных значений оператора A.

Теорема 2. Для любых $\boldsymbol{\mu_\alpha} >\ ,1,$ оператор $\boldsymbol{A}$ имеет не более двух собственных значений (с учётом кратности) лежащих левее точки $\boldsymbol{m}$ и не имеет собственных значений правее точки $\boldsymbol{M}$**.**

Отметим, что теоремы 1 и 2 играют ключевой роль при определении месторасположение и структуру двухчастичных и трехчастичных ветвей существенного спектра, а также при исследовании числа собственных значений трехчастичных решетчатых модельных операторов (см. например [1-14]), а также операторных матриц операторов, одно из диагональных элементов которого является трехчастичный решетчатый модельный оператор (см. например [15-23]).

Список литературы / References

1. *Расулов Т.Х.* Структура существенного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 26:2, 2012. С. 24-32.
2. *Расулов Т.Х.* Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика. 166:1, 2011. С. 95-109.
3. *Расулов Т.Х., Расулова З.Д.* Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами // Сибирские электронные математические известия. 12, 2015. С. 168-184.
4. *Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т.* Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Известия вузов. Математика. № 1, 2014. С. 61-70.
5. *Umirkulova G.H., Rasulov T.H.* Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice // European science. 51:2, 2020. Part II. Pp. 19-22.
6. *Расулов Т.Х., Рахмонов А.А.* Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра одного трехчастичного модельного оператора // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 23:2, 2011. С. 170-180.
7. *Kurbonov G.G., Rasulov T.H.* Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. Academy. 55:4, 2020. Pp. 8-13.
8. *Расулов Т.Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

9. *Умарова У.У.* Аналог системы интегральных уравнений Фаддеева для трехчастичного модельного оператора // Учёные XXI века. 40:5-3, 2018. С. 14-15.
10. *Rasulova Z.D.* Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice // J. Pure and App. Math.: Adv. Appl., 11:1, 2014. Pp. 37.
11. *Muminov M.I., Rasulov T.H.* Universality of the discrete spectrum asymptotics of the three- article Schrödinger o erator on a lattice // Nano y tem : Phy ic , Chemi try, Mathematics, 6:2, 2015. Pp. 280-293.
12. *Rasulova Z.D.* On the spectrum of a three-particle model operator // J. Math. Sci.: Adv. Appl., 25, 2014. Pp. 57-61.
13. *Rasulov T.H.* Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian // Contem. Analysis and Appl. Mathematics. 2:2, 2014. Pp. 179-198.
14. *Rasulov T.H., Rasulova Z.D.* Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3, 2014. Pp. 327-342.
15. *Muminov M.I., Rasulov T.H.* The Faddeev equation and essential spectrum of a Hamiltonian in Fock Space // Methods Funct. Anal. Topol., 17:1, 2011. Pp. 47-57.
16. *Muminov M.I., Rasulov T.H.* Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2x2 operator matrix // Eurasian Mathematical Journal. 5:2, 2014. Pp. 60.
17. *Расулов Т.Х.* Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // Теорет. матем. физика. 161:2, 2009. С. 164-175.
18. *Расулов Т.Х.* Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // Известия вузов. Математика. 12, 2008. С. 59-69.
19. *Muminov M.I., Rasulov T.H*. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space // Comm. in Mathematical Analysis. 17:1, 2014. Pp. 1-22.
20. *Muminov M.I., Rasulov T.H.* On the eigenvalues of a 2x2 block operator matrix // Opuscula Mathematica. 35:3, 2015. Pp. 369-393.
21. *Rasulov T.H.* On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix // Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1, 2016. Pp. 48-61.
22. *Rasulov T.H.* The finiteness of the number of eigenvalues of an Hamiltonian in Fock space // Proceedings of IAM, 5:2, 2016. Pp. 156-174.
23. *Расулов Т.Х.* Исследование существенного спектра одного матричного оператора // Теоретическая и математическая физика, 164:1, 2010. С. 62-77.