# ПАНЖАРАДАГИ УЧ ЎЛЧАМЛИ ҚЎЗҒАЛИШГА ЭГА БИЛАПЛАСИАН ОПЕРАТОРИГА МОС ФРЕДГОЛЬМ ДЕТЕРМИНАНТИ ҲАҚИДА

**Ҳилола Ғафуровна Ҳайитова**
Бухоро давлат университети
hayitovahilola@mail.ru

**Дилдора Савриддин қизи Рахматова**
Бухоро давлат университети

## АННОТАЦИЯ

Мақолада бир ўлчамли панжарада уч ўлчамли қўзғалишга эга билапласиан оператори импульс кўринишида ўрганилади. Унга мос Фредгольм детерминанти қурилади ҳамда бу детерминантнинг ноллари қаралаётган оператор хос қийматлари бўлиши кўрсатилади. Нисбатан содда иккита ёрдамчи оператор аниқланиб, дастлабки операторнинг дискрет спектри билан боғлиқлиги ўрнатилади.

**Калит сўзлар:** билапласиан, Фредгольм детерминанти, хос қиймат, хос функция, импульс тасвир.

# ABOUT THE FREDGOLM DETERMINANT SUITABLE FOR THE BILAPLASIAN OPERATOR, WHICH HAS THREE DIMENSIONAL MOVEMENTS ON THE GRILL

**Hilola Gafurovna Haitova**
Bukhara State University
hayitovahilola@mail.ru

**Dildora Savriddin kizi Rakhmatova**
Bukhara State University

## ABSTRACT

In the present paper we study the bilaplacian operator with rank three perturbation on the one-dimensional lattice in the momentum representation. The corresponding Fredholm determinant is constructed and it is shown that zeroes of the this determinant are coincide with the eigenvalues of the considered operator. Two more simple auxiliary operators are defined and the connection with the discrete spectrum of the investigated operator is established.

**Keywords:** bilaplacian, Fredholm determinant, eigenvalue, eigenfunction.

## КИРИШ

$R^n$ фазодаги тўртинчи тартибли эллиптик операторлар, хусусан бигармоник операторлар физик моделларнинг кенг синфида муҳим аҳамиятга эга [1,2]. Бигармоник операторлар билапласиан номи билан ҳам машҳур бўлиб $\nabla^4 = (\nabla^2)^2$ тенглик ёрдамида аниқланувчи дифференциал оператордир, бу ерда $\nabla^2$

Лапласиан оператори. [3] мақолада $d$ ўлчамли $Z^d$ панжарада $\hat{v}$ бир ўлчамли потенциалга эга $\hat{\Delta}\hat{\Delta}$ дискрет бигармоник операторининг, яъни $\hat{h}_\mu = \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{v}$ операторнинг спектрал хоссалари ўрганилган, бу ерда $\mu \in R$. Бу модель $Z^d$ даги дискрет Шредингер операторини ҳам ўз ичига олиб, бир заррачали система билан боғлиқ ва дисперция муносабати айнимаган қуйи чегарага эгадир. Бундан ташқари, $\hat{h}_\mu$ операторни импулс кўринишда $L_2(T^d)$ фазодаги Фридрихс модели сифатида ҳам қараш мумкин, бунда $T^d$ орқали $d$ ўлчамли тор белгиланган.

## АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Эслатиб ўтиш жоизки, дискрет Шредингер оператори ва Фридрихс моделининг спектрал хоссалари сўнгги йилларда кўплаб олимлар томонидан батафсил ўрганилган (масалан [4-13] ишларга қаранг). [14-23] мақолаларда эса локал бўлмаган потенциаллар жуфти ёрдамида таъсирлашувчи $d$ ўлчамли панжарадаги учта заррачалар системасига мос модель операторларнинг спектрал хоссалари ўрганилган. Тўғри интегралга ёйиш усули ёрдамида каналь операторларнинг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласи Фридрихс моделининг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилади.

Даставвал ўқувчига қулайлик учун мақолада ишлатиладиган функционал анализ курсининг баъзи муҳим тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

$H$ Ҳильберт фазоси ва $A: H \to H$ чизиқли чегараланган оператор бўлсин. Агар бирор $\lambda \in C$ сон учун $A - \lambda I$ га тескари оператор мавжуд бўлиб, у $H$ нинг ҳамма ерида аниқланган бўлса, $\lambda$ сони $A$ операторнинг регуляр нуқтаси дейилади,

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

оператор эса $A$ операторнинг $\lambda$ нуқтадаги резольвентаси дейилади. Барча регуляр нуқталар тўплами $\rho(A)$ орқали белгиланади. Бу ерда $I$ орқали $H$ фазодаги бирлик оператор белгиланган.

$A$ операторнинг регуляр бўлмаган барча нуқталари тўплами $A$ операторнинг спектри дейилади ва $\sigma(A)$ орқали белгиланади. Агар бирор $\lambda \in C$ сон учун $Ax = \lambda x$ тенглама нолмас $x$ ечимга эга бўлса, $\lambda$ сони $A$ оператор учун хос қиймат дейилади, нолмас $x$ ечимга эса хос вектор дейилади.

$A$ операторнинг барча хос қийматлари тўпламига $A$ операторнинг нуқтали спектри дейилади ва $\sigma_{pp}(A)$ каби белгиланади. $A$ операторнинг барча чекли каррали яккаланган хос қийматлари тўпламига $A$ операторнинг дискрет спектри дейилади ва $\sigma_{disc}(A)$ каби белгиланади.

Агар бирор $\lambda \in \sigma(A)$ сони учун нолга кучсиз яқинлашувчи $f_n \in H$ бирлик векторлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \| (A-\lambda I) f_n \| = 0$$

бўлса, у ҳолда $\lambda$ сон $A = A^*$ операторнинг муҳим спектрига қарашли дейилади. $A$ операторнинг муҳим спектри $\sigma_{ess}(A)$ билан белгиланади.

$T$ - бир ўлчамли тор, $L_2(T)$ эса $T$ тўпламда аниқланган квадрати билан интегралланувчи (умуман олганда комплекс қийматлар қабул қилувчи) функцияларнинг Ҳильберт фазоси бўлсин.

Фиксирланган $\mu, \lambda \in R$ сонлари учун $L_2(T)$ Ҳилберт фазосида қуйидагича аниқланган $H_{\mu,\lambda}$ операторни қараймиз:

$$H_{\mu,\lambda} := H_0 - \mu V_1 - \lambda V_2,$$

бу ерда $H_0$ кўпайтириш оператори

$$(H_0 f)(x) = (1-\cos x)^2 f(x),$$

$V_1$ ва $V_2$ операторлар эса қуйидагича кўринишга эга бўлган интеграл операторлар:

$$(V_1 f)(x) = \int_T f(t)dt,\ (V_2 f)(x) = \int_T \cos(x-t) f(t)dt.$$

Функционал анализ элементлари ёрдамида $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг $L_2(T)$ Ҳильберт фазосидаги чизиқли, чегараланган ва ўз-ўзига қўшма оператор эканлигини исботлаш мумкин.

## МУҲОКАМА

[24] мақолада $H_{\mu,\lambda}$ операторга мос Фредгольм детерминанти ҳақида қисқача маълумотлар келтирилган. Ушбу мақолада бу тасдиқлар исботлар билан бойитилган ва математик нуқтаи назардан асосланган.

Аниқланишига кўра, $V_1$ бир ўлчамли интеграл оператордир. $V_2$ интеграл операторнинг икки ўлчамли эканлиги

$$\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$$

тенгликдан ва интегралнинг аддитивлик хоссасидан фойдаланиб кўрсатилади. Шу сабабли нол бўлмаган $\mu$ ва $\lambda$ сонлари учун $\mu V_1 + \lambda V_2$ қўзғалиш оператори уч ўлчамли бўлади.

Чекли ўлчамли қўзғалишларда муҳим спектрнинг ўзгармаслиги ҳақидаги Вейл теоремасига кўра, $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг муҳим спектри $\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ учун $\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [0;4]$ тенглик ўринли бўлади. Бунда $[0;4]$ кесма $(1-\cos x)^2$ функциянинг қийматлар соҳаси бўлиб, $H_0$ қўзғалмас операторнинг спектри (соф муҳим спектр) айнан шу кесмадан иборат бўлади.

Энди $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қийматларини топиш масаласини қараймиз. Шу мақсадда ўрганилаётган операторга мос Фредгольм детерминантини қурамиз.

Ҳар бир фиксирланган $\mu, \lambda \in R$ сонлари учун $C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ соҳада регуляр бўлган

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(z) := 1 - \mu \int_T \frac{dt}{(1-\cos t)^2 - z};$$

$$\Delta_{\lambda}^{(2)}(z) := 1 - \lambda \int_T \frac{(\cos t)^2 dt}{(1-\cos t)^2 - z};$$

$$\Delta(z) := \int_T \frac{\cos t\, dt}{(1-\cos t)^2 - z};$$

$$\Delta_{\lambda}^{(3)}(z) := 1 - \lambda \int_T \frac{(\sin t)^2 dt}{(1-\cos t)^2 - z}$$

ёрдамчи функцияларни аниқлаймиз. Одатда

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \left(\Delta_{\mu}^{(1)}(z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(z) - \mu\lambda\Delta^2(z)\right)\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)$$

каби аниқланган функцияга $H_{\mu,\lambda}$ операторга мос Фредгольм детерминанти дейилади ва у $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қийматлари сони ҳамда жойлашув ўрнини аниқлашда муҳим аҳамият касб этади.

$H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қийматлари ва $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ функция ноллари орасидаги муносабатни ифодаловчи қуйидаги теоремани баён қиламиз ва исботлаймиз.

**1-теорема.** Ҳар бир фиксрланган $\mu, \lambda \in R$ сонлари учун $z_{\mu,\lambda} \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $\Delta_{\mu,\lambda}(z_{\mu,\lambda}) = 0$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

**Исбот.** Теоремани исботлаш учун хос қийматга нисбатан ушбу

$$H_{\mu,\lambda} f = zf\ ,\ z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$$

тенгламани қараймиз.

Фараз қилайлик $z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қиймати, $f \in L_2(T)$– эса бу хос қийматга мос хос функция бўлсин. У ҳолда $f \in L_2(T)$ хос функция

$$(1-\cos x)^2 f(x) - \mu \int_T f(t)dt - \lambda \int_T \cos(x-t) f(t)dt = zf(x) \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Айтиш жоизки, ихтиёрий $z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун барча $x \in T$ нуқталарда $(1-\cos x)^2 - z \neq 0$ муносабат ўринли бўлади. Шу сабабли (1) тенгликдан $f$ функция учун қуйидаги

$$f(x) = \frac{\mu a + \lambda b \cos x + \lambda c \sin x}{(1-\cos x)^2 - z} \qquad (2)$$

ифодага эга бўламиз.

Бу ерда

$$a := \int_T f(t)dt,\ b := \int_T \cos t\, f(t)dt,\ \ c := \int_T \sin t\, f(t)dt. \qquad (3)$$

$f(x)$ функция учун топилган (2) ифодани (3) белгилашларга қўйиб қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\Delta_\mu^{(1)}(z)a - \lambda\Delta(z)b - \lambda\left(\int_T \frac{\sin t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)c = 0;$$

$$-\mu\Delta(z)a + \Delta_\lambda^{(2)}(z)b - \lambda\left(\int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)c = 0;$$

$$-\mu\left(\int_T \frac{\sin t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)a - \lambda\left(\int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)b + \Delta_\lambda^{(3)}(z)c = 0$$

ёки

$$\Delta_\mu^{(1)}(z)a - \lambda\Delta(z)b = 0;$$

$$-\mu\Delta(z)a + \Delta_\lambda^{(2)}(z)b = 0; \qquad (4)$$

$$\Delta_\lambda^{(3)}(z)c = 0.$$

$a,b,c$ номаълумларга нисбатан охирги тенгламалар системасини ҳосил қилишда тоқ функциядан симметрик оралиқ бўйича олинган интегралнинг қиймати 0 га тенг эканлигидан, яъни ҳар бир фиксирланган $z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун

$$\int_T \frac{\sin t}{(1-\cos t)^2 - z}dt = 0,\ \int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z}dt = 0$$

тенгликлар ўринли эканлигидан фойдаландик.

Бунда (1) тенглама ечимга эга бўлиши учун (4) тенгламалар системаси нолмас ечимга эга бўлиши зарур ва етарлидир.

## НАТИЖА

Ўз навбатида (4) тенгламалар системаси нолмас ечимга эга бўлиши учун

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \left(\Delta_\mu^{(1)}(z)\Delta_\lambda^{(2)}(z) - \mu\lambda\Delta^2(z)\right)\Delta_\lambda^{(3)}(z) = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. 1-теорема тўлиқ исботланди.

1-теорема исботидан кўриниб турибдики, агар $z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қиймати бўлса, у ҳолда унга мос хос функция (2) кўринишда бўлади.

1- теоремадан $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг дискрет спектри учун қуйидаги муносабат ўринли эканлиги келиб чиқади:

$$\sigma_{disc}(H_{\mu,\lambda}) = \{z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) : \Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0\}.$$

$\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ функциянинг аниқланишига кўра барча $\mu,\lambda \in R$ сонлари учун $\Delta_{\mu,\lambda}(z)=0$ ўринли бўлиши учун $\Delta_{\mu}^{(1)}(z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(z)-\mu\lambda\Delta^2(z)=0$ ёки $\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)=0$ тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Шу ўринда қуйидагича савол пайдо бўлади: Фредголь детерминантлари $\Delta_{\mu}^{(1)}(z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(z)-\mu\lambda\Delta^2(z)$ ва $\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)$ функциларга тенг бўлган чизиқли, чегараланган ва ўз-ўзига қўшма операторлар мавжудми? Агар мавжуд бўлса, улар $H_{\mu,\lambda}$ билан қандай боғланган бўлади? Қуйида биз шу саволларга жавоб излаймиз.

$L_2(T)$ Ҳильберт фазосида таъсир қилувчи қуйидаги операторларни аниқлаймиз:

$$(H_{\mu,\lambda}^{(1)}f)(x)=(1-\cos x)^2 f(x)-\mu\int_T f(t)dt-\lambda\cos x\int_T \cos t\, f(t)dt;$$

$$(H_{\lambda}^{(2)}f)(x)=(1-\cos x)^2 f(x)-\lambda\sin x\int_T \sin t\, f(t)dt.$$

$H_{\mu,\lambda}$ оператор каби $H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ ва $H_{\lambda}^{(2)}$ операторлар ҳам $L_2(T)$ Ҳильберт фазосида таъсир қилувчи чизиқли, чегараланган ва ўз-ўзига қўшма операторлар эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

**2-теорема.** а) Ҳар бир фиксирланган $\mu,\lambda \in R$ сонлари учун $z_{\mu,\lambda}\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(z_{\mu,\lambda})\Delta_{\lambda}^{(2)}(z_{\mu,\lambda})-\mu\lambda\Delta^2(z_{\mu,\lambda})=0$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

б) Ҳар бир фиксирланган $\lambda\in R$ сони учун $z_{\lambda}\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\lambda}^{(2)}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $\Delta_{\lambda}^{(3)}(z_{\lambda})=0$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

**Исбот.** а) Фараз қилайлик, ҳар бир фиксирланган $\mu,\lambda\in R$ сонлари учун $z_{\mu,\lambda}\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ операторнинг хос қиймати, $f\in L_2(T)-$ эса бу хос қийматга мос хос функция бўлсин. У ҳолда $f\in L_2(T)$ хос функция

$$(1-\cos x)^2 f(x)-\mu\int_T f(t)dt-\lambda\cos x\int_T \cos t\, f(t)dt=zf(x) \tag{5}$$

тенгламани қаноатлантиради.

$z_{\mu,\lambda}\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ бўлганлиги боис (5) тенгликдан $f(x)$ функция учун қуйидаги

$$f(x)=\frac{\mu a+\lambda b\cos x}{(1-\cos x)^2-z} \tag{6}$$

ифодага эга бўламиз. Бунда $a$ ва $b$ сонлари (3) тенглик орқали аниқланган. $f(x)$ функция учун топилган (6) ифодани (3) тенгликга қўйиб, (5) тенглама нолмас ечимга эга бўлиши учун $\Delta_{\mu}^{(1)}(z_{\mu,\lambda})\Delta_{\lambda}^{(2)}(z_{\mu,\lambda})-\mu\lambda\Delta^{2}(z_{\mu,\lambda})=0$ бўлиши зарур ва етарли эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса ўз навбатида 2-теорема а) тасдиғи исботини якунлайди.

2-теореманинг а) тасдиғи ҳам шунга ўхшаш исботланади.

2-теоремага кўра $H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ ва $H_{\lambda}^{(2)}$ операторларнинг дискрет спектрлари учун

$$\sigma_{disc}(H_{\mu,\lambda}^{(1)})=\{z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}):\Delta_{\mu}^{(1)}(z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(z)-\mu\lambda\Delta^{2}(z)=0\};$$

$$\sigma_{disc}(H_{\lambda}^{(2)})=\{z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}):\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)=0\};$$

тенгликлар ўринлидир.

## ХУЛОСА

1- ва 2-теоремаларни инобатга олган ҳолда қуйидаги натижага келиш мумкин:

**Натижа.** Ҳар бир фиксирланган $\mu,\lambda\in R$ сонлари учун $z_{\lambda,\mu}\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $z_{\lambda,\mu}$ сони $H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ ва $H_{\lambda}^{(2)}$ операторларнинг камида биттаси учун хос қиймат бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ҳолда

$$\sigma_{disc}(H_{\mu,\lambda})=\sigma_{disc}(H_{\mu,\lambda}^{(1)})\cup\sigma_{disc}(H_{\lambda}^{(2)})$$

тенглик ўринли бўлади.

$H_{\mu,\lambda}^{(1)}$ ва $H_{\lambda}^{(2)}$ операторлар $H_{\mu,\lambda}$ операторга нисбатан содда кўринишга эга. Шу боис хулоса чиқарилган тенглик $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг навбатдаги спектрал хоссаларини ўрганишда муҳим ҳисобланади.

Хусусан, исталган $\lambda>0$ ва $z>4$ сонлари учун $\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)>1$ тенгсизлик бажарилади, яъни ихтиёрий $\lambda>0$ сони учун $H_{\lambda}^{(2)}$ оператор 4 дан катта хос қийматларга эга эмас. Агар

$$\int_{T}\frac{(\sin t)^{2}dt}{(1-\cos t)^{2}}=\int_{T}\frac{1+\cos t}{1-\cos t}dt=+\infty$$

эканлигини инобатга олсак, у ҳолда исталган $\lambda>0$ сони учун

$$\Delta_{\lambda}^{(3)}(0)=1-\lambda\int_{T}\frac{(\sin t)^{2}dt}{(1-\cos t)^{2}}=-\infty$$

бўлади. $\Delta_{\lambda}^{(3)}(\cdot)$ функциянинг $(-\infty;\,0)$ оралиқда монотон камаювчи ва

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta_{\lambda}^{(3)}(z)=1$$

тенглик бажарилгани боис ихтиёрий $\lambda>0$ сони учун $H_{\lambda}^{(2)}$ оператор ягона манфий хос қийматга эга бўлади. Худди шундай мулоҳазалардан фойдаланиб, ихтиёрий

$\lambda<0$ сони учун $H_{\lambda}^{(2)}$ оператор 4 дан катта ягона оддий хос қийматга эга эканлигини ва манфий хос қийматларга эга эмаслигини исботлаш мумкин.

## REFERENCES

1. Mardanov R., Zaripov S. (2016). Solution of Stokes flow problem using biharmonic equation formulation and multiquadratics method. *Lobachevskii J. Math.*, 37, 268-273.
2. McKenna P., Walter W. (1987). Nonlinear oscillations in a suspension bridge. *Arch. Rational Mech. Anal.,* 98, 167-177.
3. Khalkhuzhaev A., Kholmatov Sh., Pardabaev M. (2019). Expansion of eigenvalues of rank-one perturbations of the discrete bilaplacian. *arXiv: 1910.01369*, 1-22.
4. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. (2004). Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.*, 5, 743-772.
5. Albeverio S., Lakaev S., Makarov K., Muminov Z. (2006). The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. *Comm. Math. Phys.*, 262, 91-115.
6. Лакаев С., Халхужаев А., Лакаев Ш. (2012). Асимптотика собственного значения двухчастичного оператора Шредингера. *ТМФ*, 3(171), 438-451.
7. Lakaev S., Kholmatov Sh. (2011). Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schroedinger operators on lattices with zero range interaction. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44, 135304.
8. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. (2007). The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2(330), 1152-1168.
9. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. (2008). О спектре двухчастичного оператора Шредингера на тешетке. *ТМФ*, 2(155), 287-300.
10. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. (2009). О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. *ТМФ*, 2(158), 263-276.
11. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. (2007). Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. *ТМФ*, 3(152), 502–517.
12. Абдуллаев Ж., Икромов И., Лакаев С. (1995). О вложенных собственных значе-ниях и резонансах обобщенной модели Фридрихса. *ТМФ*, 103, 54-62.
13. Muminov M.I., Rasulov T.H. (2015). Universality of the discrete spectrum asymptotics of the three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2(6), 280-293.
14. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. *European science,* 2(51), Part II, 19-22.

ISSN: 2181-1601

15. Умиркулова Г.Х. (2020). Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке. *Вестник науки и образования*, 16-2 (94), 14-17.
16. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2014). Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 3(5), 327-342.
17. Rasulov T.H., Bahronov B.I. (2019). Description of the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 6(9), 15-17.
18. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. (2020). Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. *Academy*, 4(55), 8-13.
19. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. (2015). Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. *Сибирские электронные математические известия*, 12, 168-184.
20. Умарова У. (2018). Аналог системы интегральных уравнений Фаддеева для трех-частичного модельного оператора. *Учёные XXI века*, 5-3(40), 14-15.
21. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. *European science*, 2(51), 15-18.
22. Бахронов Б.И. (2020). О виртуальном уровне модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72), 13-16.
23. Бахронов Б.И. (2020). Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Вестник науки и образования*, 16-2(94), 9-13.
24. Хайитова Х.Г., Рахматова Д.С. (2021). Определитель Фредгольма оператора билапласиан с трехмерным возмущением на решетке. *Проблемы науки*, 4(63), 29-32.