ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЎЛЧАМЛИ ҚЎЗҒАЛИШГА ЭГА БИЛАПЛАСИАН ОПЕРАТОРИНИНГ СПЕКТРИ ВА РЕЗОЛЬВЕНТАСИ

Ҳилола Ғафуровна Ҳайитова
Бухоро давлат университети
hayitovahilola@mail.ru

Шохида Шомухаммад қизи Рамазанова
Бухоро давлат университети

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада бир ўлчамли панжарадаги икки ўлчамли қўзғалишга эга бўлган H_μ, $\mu \in R$, билапласиан оператори импульс кўринишида ўрганилади. H_μ операторнинг муҳим ва дискрет спектрлари тавсифланади. H_μ операторга мос резольвента операторининг аниқ кўриниши топилади.

Калит сўзлар: панжара, билапласиан, муҳим спектр, дискрет спектр, Фридрихс модели, резольвента оператори.

SPECTRUM AND RESOLUTION OF BILAPLASIAN OPERATOR WITH TWO-DIMENSIONAL MOVEMENT

Hilola Gafurovna Haitova
Bukhara State University
hayitovahilola@mail.ru

Shokhida Shomukhammad kizi Ramazanova
Bukhara State University

ABSTRACT

In this paper we study the bilaplacian operator H_μ, $\mu \in R$, in momentum representation with the rank two perturbation on a one-dimensional lattice. We describe the essential and discrete spectrum of H_μ. Exact form of the resolvent operator of H_λ is find.

Keywords: lattice, bilaplacian, essential spectrum, discrete spectrum, Friedrichs model, resolvent operator.

КИРИШ

Қаттиқ жисмлар физикаси ва панжаравий майдонлар назариясида узлуксиз фазодаги одатдаги Шредингер операторларининг панжаравий аналоги бўлган ва дискрет Шредингер оператори [1] деб аталувчи операторлар пайдо бўлади. Дискрет Шредингер оператори чегараланган оператор бўлсада, узлуксиз ҳолда Шредингер операторига қараганда қийинроқ характеристикага эга. Уч заррачали одатдаги Шредингер операторининг муҳим спектри ярим ўқдан иборат. Уч заррачали дискрет Шредингер оператори чегараланган ва ўз-ўзига қўшма бўлганлиги боис унинг муҳим спектри чекли сондаги кесмалар бирлашмасидан иборат. Бу кесмаларга одатда муҳим спектрнинг икки ва уч заррачали тармоқлари дейилади ҳамда улар кесишиши ёки кесишмаслиги мумкин. Икки ва уч заррачали тармоқлар кесишмаган ҳолда муҳим спектр бўшлиғида жойлашган хос қийматларни тадқиқ қилиш имконияти пайдо бўлади. Шу нуқтаи назардан дискрет Шредингер операторлари ва улар билан боғлиқ модел операторларнинг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласи долзарб муаммо саналади.

АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Ушбу мақолада бир ўлчамли панжарадаги икки ўлчамли қўзғалишга эга бўлган импульс кўринишидаги H_μ, $\mu \in R$, билапласиан операторининг муҳим ва дискрет спектрлари топилади ва резольвента оператори қурилади. Бизга яхши маълумки, бигармоник операторлар математик физикада билапласиан оператори номи билан ҳам маълум бўлиб, $\nabla^4 = (\nabla^2)^2$ формула орқали аниқланган дифференциал оператордир, бу ерда ∇^2 Лапласиан оператори.

[2] мақолада d ўлчамли Z^d панжарада $\hat{v}$ бир ўлчамли потенциалга эга $\hat{\Delta}\hat{\Delta}$ дискрет бигармоник операторининг, яъни $\hat{h}_\mu = \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{v}$ операторнинг баъзи спектрал хоссалари ўрганилган, бу ерда $\mu \in R$. Бу модель Z^d даги дискрет Шредингер операторини ҳам ўз ичига олиб, бир заррачали система билан боғлиқ ва дисперция муносабати айнимаган қуйи чегарага эгадир. Бундан ташқари, $\hat{h}_\mu$ операторни импульс кўринишда $L_2(T^d)$ фазодаги Фридрихс модели сифатида ҳам қараш мумкин, бунда T^d орқали d ўлчамли тор белгиланган.

Эслатиб ўтиш жоизки, дискрет Шредингер оператори ва Фридрихс моделининг спектрал хоссалари сўнгги йилларда кўплаб ишларда батафсил ўрганилган (масалан [1-11] ишларга қаранг). [12-23] мақолаларда эса локал бўлмаган потенциаллар жуфти ёрдамида таъсирлашувчи d ўлчамли панжарадаги учта заррачалар системасига мос модель операторларнинг спектрал хоссалари ўрганилган. Тўғри интегралга ёйиш усули ёрдамида каналь операторларнинг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласи Фридрихс моделининг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилади. [24] мақолада бир ўлчамли панжарада уч ўлчамли қўзғалишга эга импульс кўринишидаги билапласиан операторининг хос қийматлари ўрганилган.

Операторлар назариясида спектр тушунчаси энг муҳим тушунчалардан биридир. Чизиқли оператор спектрини ўрганиш математик физикад муҳим саналади. Масалан, квант механикасида система Гамильтониани – бу Ҳильберт фазосидаги ўз-ўзига қўшма оператордир, унинг спектрини ўрганиш система физик хусусиятларини ўрганишда муҳим аҳамият касб этади. Функционал анализ курсидан бизга яхши маълумки, ўз-ўзига қўшма операторнинг спектри ҳақиқий сонлар ўқида ётиб, турли хос қийматларга мос келувчи хос векторлар (функциялар) ўзаро ортогонал бўлади.

МУҲОКАМА ВА НАТИЖАЛАР

T бир ўлчамли торда аниқлангаан квадрати билан интегралланувчи (умуман олганда комплекс қийматни қабул қилувчи) функцияларнинг Ҳильберт фазосини $L_2(T)$ орқали белгилаймиз.

Ҳар бир фиксирланган $\mu \in R$ сони учун $L_2(T)$ Ҳильберт фазосида аниқланган H_μ оператор қуйидагича берилган бўлсин:

$$H_\mu := H_0 - \mu V,$$

бу ерда H_0 кўпайтириш оператори

$$(H_0 f)(x) = (1 - \cos x)^2 f(x),$$

V интеграл оператори эса қуйидагича аниқланган

$$(Vf)(x) = \int_T \sin(x+t) f(t) dt.$$

Бундай кўринишда таъсир қилувчи H_μ оператор учун қуйидаги тасдиқлар ўринлидир:

1) H_μ оператор чизиқлидир яъни, ихтиёрий $\alpha, \beta \in C$ сонлари ва ихтийрий $f, g \in L_2(T)$ функциялар учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$H_\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha H_\mu f + \beta H_\mu;$$

2) H_μ оператор чегараланган оператор, яъни шундай $C_\mu > 0$ сони топилиб, ихтиёрий $f \in L_2(T)$ функциялар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\| H_\mu f \| \le C_\mu \| f \|;$$

3) H_μ оператор ўз-ўзига қўшма оператор, яъни ихтиёрий $f, g \in L_2(T)$ функциялар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$(H_\mu f, g) = (f, H_\mu g).$$

Энди V қўзғалиш оператори икки ўлчамли эканлигини кўрсатамиз. V операторнинг қийматлар соҳасини топиш мақсадида

$$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$$

фойдаланиб

$$(Vf)(x) = \sin x \int_T \cos t\, f(t) dt + \cos x \int_T \sin t\, f(t) dt$$

тасвирни ҳосил қиламиз.

Кўриниб турибдики

$$\operatorname{Im} V = \{ f(x) = a \sin x + b \cos x : a, b \in C \}.$$

$f_1(x)=\sin x$ ва $f_2(x)=\cos x$ функциялар $\operatorname{Im} V$ қисм фазога тегишли чизиқли боғланмаган элементлар ва исталган $f\in \operatorname{Im} V$ функция $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирланади. Шу сабабли $\dim \operatorname{Im} V=2$, яъни V икки ўлчамли оператор экан. Шундай қилиб, оператора H_0 операторнинг μV қўзғалиш оператори ўз-ўзига қўшма икки ўлчамли оператор экан. Чекли ўлчамли қўзғалишларда муҳим спектрнинг ўзгармаслиги ҳақидаги машҳур Вейл теоремасига кўра H_μ ва H_0 операторларнинг муҳим спектрлари устма-уст тушади. H_0 оператор $(1-\cos x)^2$ функцияга кўпайтириш оператор бўлганлиги боис бу оператор соф муҳим спектрга эга ва

$$\sigma(H_0)=\sigma_{ess}(H_0)=[0;4].$$

Шундай қилиб, H_μ операторнинг $\sigma_{ess}(H_\mu)$ муҳим спектри $\mu\in R$ таъсирлашиш параметридан боғлиқ эмас ва [0;4] кесма билан устма-уст тушади, яъни $\sigma_{ess}(H_\mu)=[0;4]$.

Энди H_μ оператор дискрет спектрини тадқиқ қиламиз. Фараз қилайлик, C - комплекс сонлар тўплами бўлсин. Ҳар бир фиксирланган $\mu>0$ сони учун $C\setminus[0;4]$ соҳада регуляр бўлган

$$\Delta_\mu(z):=1-\mu^2\left(\int_T \frac{\cos^2 t dt}{(1-\cos t)^2-z}\right)\left(\int_T \frac{\sin^2 t dt}{(1-\cos t)^2-z}\right)$$

функцияни қараймиз. Одатда $\Delta_\mu(\cdot)$ функцияга H_μ операторга мос Фредгольм детерминанти дейилади.

Қуйидаги теорема H_μ операторнинг хос қийматлари ва $\Delta_\mu(\cdot)$ функция ноллари орасидаги боғланишни ифодалайди.

1-Теорема. Ҳар бир фиксирланган $\mu\in R$ сони учун $z_\mu\in C\setminus\sigma_{ess}(H_\mu)$ сони H_μ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $\Delta_\mu(z_\mu)=0$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Фараз қилайлик, ҳар бир фиксирланган $\mu\in R$ сони учун $z_\mu\in C\setminus\sigma_{ess}(H_\mu)$ сони H_μ операторнинг хос қиймати, $f\in L_2(T)$ эса бу хос қийматга мос хос функция бўлсин. У ҳолда $f\in L_2(T)$ функция хос қийматга мос $H_\mu f=z_\mu f$ тенгламани қаноатлантиради. Охирги тенгламани

$$(1-\cos x)^2 f(x)-\mu\int_T \sin(x+t)f(t)dt=z_\mu f(x)$$

ёки

$$(1-\cos x)^2 f(x)-\mu\sin x\int_T \cos t\, f(t)dt-\mu\cos x\int_T \sin t\, f(t)dt=z_\mu f(x) \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$a := \int_T \cos t \, f(t)dt; \tag{2}$$

$$b := \int_T \sin t \, f(t)dt. \tag{3}$$

$z_\mu \in C \setminus [0;4]$ бўлганлиги боис барча $x \in T$ нуқталарда $(1-\cos x)^2 - z_\mu \neq 0$ муносабат бажарилади. Шу сабабли (1) тенгламадан $f(x)$ функция учун

$$f(x) = \frac{a\mu \sin x + b\mu \cos x}{(1-\cos x)^2 - z_\mu} \tag{4}$$

ифодани топамиз. $f(x)$ функция учун топилган (4) ифодани (2) ва (3) белгилашларга қўямиз ҳамда

$$\left(1 - \mu\int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)a - \mu\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)b = 0;$$

$$-\mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)a + \left(1 - \mu\int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)b = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Тоқ функциядан симметрик оралиқ бўйича олинган интегралнинг қиймати 0 га тенг эканлигидан, яъни ҳар бир фиксирланган $z \in C \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун

$$\int_T \frac{\sin t}{(1-\cos t)^2 - z}dt = 0, \quad \int_T \frac{\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2 - z}dt = 0$$

тенгликлар ўринли эканлигидан охирги тенгламалар системасини

$$a - \mu\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)b = 0;$$

$$-\mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}dt\right)a + b = 0 \tag{5}$$

каби ёзиш мумкин. Кўриниб турибдики, (1) тенглама нолмас ечимга эга бўлиши учун a ва b номаълумларга нисбатан (5) тенгламалар системаси нолмас ечимга эга бўлиши зарур ва етарлидир. Ўз навбатида (5) тенгламалар системаси нолмас ечимга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти

$$\Delta_\mu(z_\mu) := 1 - \mu^2\left(\int_T \frac{\cos^2 t dt}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}\right)\left(\int_T \frac{\sin^2 t dt}{(1-\cos t)^2 - z_\mu}\right)$$

нолга тенг бўлиши, яъни $\Delta_\mu(z_\mu) = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. 1-теорема тўлиқ исботланди.

1-теоремадан H_μ операторнинг дискрет спектри учун қуйидаги тасдиқ ўринли эканлиги келиб чиқади:

$$\sigma_{disc}(H_\mu)=\{z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_\mu):\Delta_\mu(z)=0\}.$$

Шундай қилиб, H_μ операторнинг хос қийматларини ўрганиш масаласи бу операторга мос келувчи $\Delta_\mu(z)$ Фредгольм детерминантининг нолларини ўрганиш масаласига келтирилди.

ХУЛОСА

Хулоса қилиб айтганда H_μ операторнинг спектри

$$\sigma(H_\mu)=[0;4]\cup\{z\in C\setminus[0;4]:\Delta_\mu(z)=0\}$$

каби аниқланади.

Ишнинг навбатдаги асосий натижасини баён қиламиз.

2-теорема. H_μ операторнинг $R_z(H_\mu)$, $z\in C\setminus\sigma(H_\mu)$ резольвента оператори $L_2(T)$ фазода қуйидагича таъсир қилувчи

$$(R_z(H_\mu)g)(x)=\frac{g(x)}{(1-\cos x)^2-z}$$
$$+\frac{\mu}{\Delta_\mu(z)[(1-\cos x)^2-z]}\left[\cos x+\mu\sin x\int_T\frac{\cos^2 t dt}{(1-\cos t)^2-z}\right]\int_T\frac{(\sin t)g(t)dt}{(1-\cos t)^2-z}$$
$$+\frac{\mu}{\Delta_\mu(z)[(1-\cos x)^2-z]}\left[\sin x+\mu\cos x\int_T\frac{\sin^2 t dt}{(1-\cos t)^2-z}\right]\int_T\frac{(\cos t)g(t)dt}{(1-\cos t)^2-z}$$

оператордир.

Исбот. H_μ операторнинг резольвента операторини аниқлаш мақсадида

$$H_\mu f-zf=g$$

тенгламани қараймиз ва уни

$$(1-\cos x)^2 f(x)-\mu\sin x\int_T\cos t\, f(t)dt-\mu\cos x\int_T\sin t\, f(t)dt-zf(x)=g(x) \qquad (6)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$z\in C\setminus[0;4]$ тасдиқга кўра ихтиёрий $x\in T$ учун $(1-\cos x)^2-z\neq 0$ тенгсизлик бажарилади. Шу боис (6) тенгламадан $f(x)$ функция учун

$$f(x)=\frac{g(x)+a\mu\sin x+b\mu\cos x}{(1-\cos x)^2-z} \qquad (7)$$

ифодани топамиз. Бунда a ва b сонлари мос равишда (2) ва (3) тенгликлар ёрдамида аниқланган сонлардир. $f(x)$ функция учун топилган (7) ифодани (2) ва (3) белгилашларга қўямиз ҳамда

$$\left(1-\mu\int_T\frac{\sin t\cos t}{(1-\cos t)^2-z}dt\right)a-\mu\left(\int_T\frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2-z}dt\right)b=\int_T\frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2-z}dt;$$

$$-\mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)a + \left(1-\mu\int_T \frac{\sin t\cos t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)b = \int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt$$

ёки

$$a-\mu\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)b = \int_T \frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt;$$

$$-\mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)a + b = \int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt \qquad (8)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

(8) тенгламалар системасидан a ва b номаълумларни топамиз. Бу тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасини

$$\mu\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)$$

ифодага кўпайтириб, биринчи тенгламага қўшамиз ҳамда

$$\Delta_\mu(z)a = \int_T \frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt + \mu\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)\int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. 1-теорема натижасига кўра $z \in C \setminus \sigma_{disc}(H_\mu)$ учун $\Delta_\mu(z) \neq 0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шу сабабли a ни қуйидагича топамиз:

$$a = \frac{1}{\Delta_\mu(z)}\int_T \frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt + \frac{\mu}{\Delta_\mu(z)}\left(\int_T \frac{\cos^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)\int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt.$$

Худди шу каби (8) тенгламалар системасининг биринчи тенгламасини

$$\mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)$$

ифодага кўпайтириб, иккинчи тенгламага қўшамиз ҳамда

$$\Delta_\mu(z)b = \int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt + \mu\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)\int_T \frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Натижада b ни қуйидагича топамиз:

$$b = \frac{1}{\Delta_\mu(z)}\int_T \frac{(\sin t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt + \frac{\mu}{\Delta_\mu(z)}\left(\int_T \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2 - z}dt\right)\int_T \frac{(\cos t)g(t)}{(1-\cos t)^2 - z}dt.$$

a ва b номаълумлар учун топилган юқоридаги ифодаларни (7) ифодага қўйиб $f = R_z(H_\mu)g$ тенгликни ҳосил қиламиз. 2-теорема тўлиқ исботланди.

REFERENCES

1. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. (2004). Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.* 5, 743-772.

2. Khalkhuzhaev A., Kholmatov Sh., Pardabaev M. (2019). Expansion of eigenvalues of rank-one perturbations of the discrete bilaplacian. arXiv: 1910.01369, 1-22.
3. Albeverio S., Lakaev S., Makarov K., Muminov Z. (2006). The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. *Comm. Math. Phys.,* 262, 91-115.
4. Лакаев С., Халхужаев А., Лакаев Ш. (2012). Асимптотика собственного значения двухчастичного оператора Шредингера. *ТМФ,* 3(171), 438-451.
5. Lakaev S., Kholmatov Sh. (2011). Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schroedinger operators on lattices with zero range interaction. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44. 135304.
6. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. (2007). The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbation . *J. Math. Anal. Appl.*, 2(330), 1152-1168.
7. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. (2008). О спектре двухчастичного оператора Шредингера на тешетке. *ТМФ,* 2(155), 287-300.
8. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. (2009). О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. *ТМФ*, 2(158), 263-276.
9. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. (2007). Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. *ТМФ*, 3(152), 502–517.
10. Абдуллаев Ж., Икромов И., Лакаев С. (1995). О вложенных собственных значе-ниях и резонансах обобщенной модели Фридрихса. *ТМФ*, 103, 54-62.
11. Muminov M.I., Rasulov T.H. (2015). Universality of the discrete spectrum asymptotics of the three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2(6), 280-293.
12. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. *European science,* 2(51), Part II, 19-22.
13. Умиркулова Г.Х. (2020). Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке. *Вестник науки и образования,* 16-2 (94), 14-17.
14. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2014). Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 3(5), 327-342.
15. Rasulov T.H., Bahronov B.I. (2019). Description of the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation. *Journal of Global Research in Mathematical Archives,* 6(9), 15-17.
16. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. (2020). Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. *Academy,* 4(55), 8-13.

17. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. (2015). Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. *Сибирские электронные математические известия,* 12, 168-184.
18. Умарова У. (2018). Аналог системы интегральных уравнений Фаддеева для трех-частичного модельного оператора. *Учёные XXI века,* 5-3(40), 14-15.
19. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. *European science*, 2(51), 15-18.
20. Бахронов Б.И. (2020). О виртуальном уровне модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72), 13-16.
21. Бахронов Б.И. (2020). Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Вестник науки и образования,* 16-2(94), 9-13.
22. Хайитова Х.Г. (2020). О числе собственных значений модели Фридрихса с дву-мерным возмущением. *Наука, техника и образование,* 8(72), 5-8.
23. Рашидов А.Ш. (2018). Резольвента модели Фридрихса с одномерным возмущением. *Ученый XXI века*, 4-1(39), 6-7.
24. Хайитова Х.Г., Рахматова Д.С. (2021). Определитель Фредгольма оператора билапласиан с трехмерным возмущением на решетке. *Проблемы науки*, 4(63), 29-32.