O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

"FIZIKA" KAFEDRASI

Saidov Q.S. Bekmurodova M.B.

NAZARIY MEXANIKA

QISQA KURSI

BUXORO – 2022

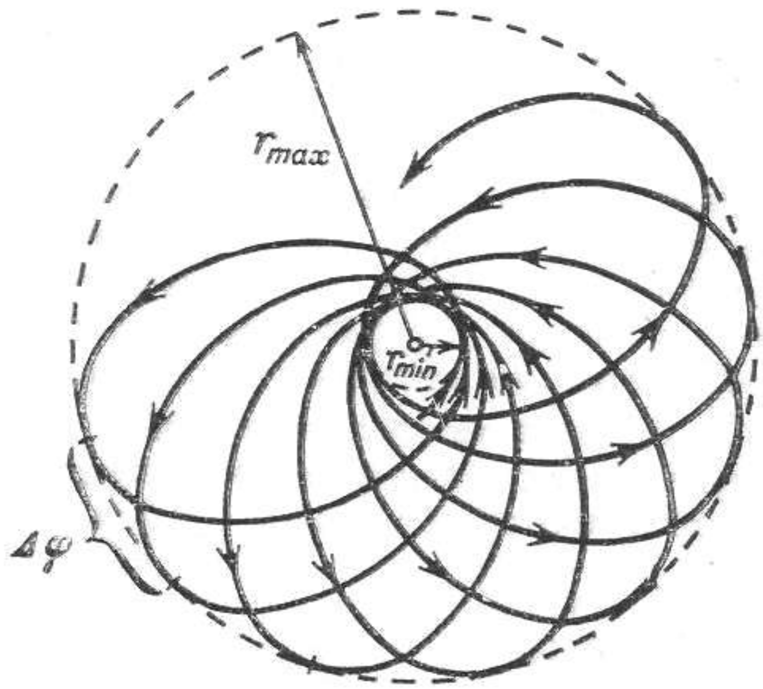
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

“FIZIKA” KAFEDRASI

Saidov Q.S. Bekmurodova M.B.

NAZARIY MEXANIKA
qisqa kursi



BUXORO – 2022

ISBN: 978-9943-8864-3-8
UO'K: 531(075.8)
KBK: 22.31ya73
C 21

Ushbu o‘quv qo‘llanma fizika ixtisosligi bo‘yicha ta’lim oluvchi talabalarga mo‘ljallangan bo‘lib, undan matematika, mexanika, amaliy matematika yo‘nalishidagi talabalar ham foydalanishlari mumkin.

Mazkur o‘quv uslubiy qo‘llanma Buxoro davlat universiteti “Fizika” kafedrasida tasdiqlangan o‘quv dasturi asosida tayyorlandi va Buxoro davlat universiteti kengashining 2022- yil 7-iyun 10-son yig‘ilishi qarori bilan chop etishga tavsiya etildi.

Taqrizchilar:
Fizika – matematika fanlari falsafa doktori, dotsent
Kasimova.G.K.
Fizika – matematika fanlari falsafa doktori, dotsent
Fayziyev.Sh.Sh.

ISBN: 978-9943-8864-3-8 "FAN VA TA`LIM" NASHRIYOTI

So‘z boshi

Mazkur Nazariy mexanika kursi universitet va pedagogika oliy o‘quv yurtlari fizika, fizika va astronomiya ta’lim yo‘nalishlarida ta’lim oluvchi talabalarga o‘qitiladigan fan hisoblanib, u nazariy fizika kurslarning dastlabkisidir. Uslubiy qo‘llanma albatta, ba’zi kamchiliklardan holi emas. Hurmatli kitobxonlar o‘zlarining fikr-mulohazalarini Buxoro davlat universiteti fizika-matematika fakulteti “Fizika” kafedrasiga yuborishlari mumkin. Mualliflar oldindan sizning bildirgan fikr-mulohazangizga o‘z minatdorchiligini bildiradi.

Bizning manzil: Buxoro sh. M.Iqbol 11, BuxDU, fizika-matematika fakulteti, Fizika kafedrasi.

Mualliflar

KIRISH

Nazariy mexanika moddiy nuqtalarning, ularning diskret sistemalarining va absolyut qattiq jismlarning harakatlarini oʻrganadigan mexanikaning qismi hisoblanadi. Ta'kidlash mumkinki nazariy mexanikada keltirilgan munosobatlar va ma'lumotlar mexanik harakatlarning umumiy qonuniyatlarini namoyon etadi, hamda real hodisalarga mos keladi. Shuning uchun, nazariy mexanikaning tadqiqot usullari fizikaviy tabiatdan qat'iy nazar juda koʻplab tabiat hodisalarini oʻrganish imkoniyatini beradi. Nazariy mexanika fanining tadqiqot ob'ektiga oddiy jismlardan boshlab planetar harakatlar mexanikasi kiradi.

Mexanikaning nazariy asoslari hisoblanmish qonunlari va aksiomalari avlodlar olimlarining koʻp asrlik mehnatlari natijasida shakllanib kelmoqda. Mexanikaning ilk qonuniyatlari qadimiy Misr va Gretsiyada miloddan avval IV-III asrlarda qoʻllanilgan. Qadimda mexanik tadqiqotlar olib borgan olimlarga Demokrit (460-370 m.avv), Evklid(III m.avv) va Arximed (III m.avv) kabilarni misol keltirish mumkin. Statikani fan sifatida shakllanishida Arximedning ilmiy ishlari muhim hisoblanadi. Arximed richagni muvozanati toʻgʻrisidagi masalani yechib ogʻirlik markazi toʻgʻrisidagi ta'limotni yaratib moment tushunchasi kiritilishiga sabab boʻldi. Oʻrta asrlarda arab mamlakatlarida va Oʻrta Osiyoda yashab ijod qilgan Abu Rayxon Beruniy (973-1048), Misrlik Abu Ali –Xasan ibn al-Xaysam (Alxazena) (965-1039), Al-Xorazmiy, Abu Ali ibn Sino (980-1037 va Ulugʻbek Muhammad Taragʻay (1394-1449) kabi olimlar matematika, astronomiya va mexanika sohalarida tadqiqotlar olib borganlar. Beruniy aniq astronomik va geografik oʻlchashlarga erishgan. U Hindistonga sayohati davomida Yer radiusini oʻlchash usulini ishlab chiqqan. Ibn Sino ta'rifiga koʻra, jism holatining oʻzgarib borishi harakatni ifodalaydi; jismlarning fazodagi harakati esa bu harakatning xususiy holidir deb ta'kidlaydi. Ulugʻbek planetalar harakatini, jumladan, Quyosh va Oyning mexanik harakatini katta aniqlikda hisoblay olgan.

XIV asrning oʻrtalarida kemasozlik rivojlanishi bilan bir qatorda mexanika tez sur'atlar bilan taraqqiy etgan. Taniqli olim Leonardo Da-Vinchi (1452-1519) tomonidan uchish moslamalarida mexanik masalalarni yechishda matematik usullardan foydalanganligi o‘z samarasini bergan. U jismlarning qiya tekislik bo‘ylab harakati va sirpanishda ishqalanishni e’tiborga oladi. Shuningdek, kuch momenti tushunchasini birinchi bo‘lib fanga kiritadi. Polshalik Nikolay Kopernik (1473-1543) va uning izdoshlari Jordano Bruno (1548-1600), Iogan Kepler (1564-1633) osmon jismlari mexanikasini ishlab chiqdilar. Italiya olimi Galileo Galiley (1564-1633) dinamikaning moddiy jismlar harakati haqidagi bo‘limning asoschisidir. To‘g‘ri chiziq bo‘ylab notekis, ilgarilanma harakat qilayotgan jismning tezligi va tezlanishi tushunchasini birinchi bo‘lib Galiley kiritdi. Bundan tashqari inersiya qonunini kashf etdi. Galiley ishlariga tayangan holda Golland olimi Gyugens fizik mayatnik nazariyasini yaratdi. Shuningdek, Galiley kiritgan tezlanish tushunchasini nuqtaning egri chiziqli harakati uchun umumlashtiradi. Dinamikaning asosiy qonunlarini o‘rganish sohasida Galiley boshlagan ishlarni ingliz olimi Isaak Nyuton rivojlantirib, klassik mexanikaning asosiy tushunchalari fazo, vaqt, massa, kuch, inersial sanoq sistema haqidagi qonunlarni yaratilishida katta hissa qo‘shdi. Bu asosiy qonunlar Nyutonninig «Natural falsafasining matematik ifodasi» nomli asarida bayon etilgan (1687 yil) va u klassik mexanikaning asosini tashkil etadi.

Nazariy mexanika fani nazariy fizikaning boshqa bo‘limlari elektrodinamika, kvant mexanika, statistik fizika fanlari bilan uzviy bog‘lanishga egadir. Nyuton nazariyasiga ko‘ra tabiatdagi har qanday o‘zaro ta’sir bir onda uzatiladi, boshqacha aytganda jismlar orasidagi o‘zaro ta’sir chegaralanmagan yoki cheksiz tezlik bilan tarqaladi. Har qanday fizik nazariya singari klassik mexanika ham aniq tadbiq qilish chegarasiga ega. Tezligi yorug‘likning bo‘shliqdagi tezligiga yaqin bo‘lgan jismlar harakati shuningdek, alohida atomlar, elektronlar va atom yadrosi va boshqa elementar zarralar harakatini klassik mexanika ifodalay olmaydi. Tezligi yorug‘lik tezligiga yaqin jismlar harakatini maxsus nisbiylik nazariyasi postulatiga tayanuvchi relyativistik mexanika o‘rganadi. Shunday qilib, klassik mexanika makrojismlar yetarli kichik tezliklar bilan bo‘ladigan harakatlari nazariyasidan iborat, ya’ni klassik mexanika bu makroskopik jismlar harakatining norelyativistik nazariyasidir.

Nazariy mexanika kursi statika, kinematika va dinamikadan iborat uch qismga bo‘linadi. Kinematikada jismlarning harakati geometrik nuqtai nazardan, ya’ni harakatga keltiruvchi sababga bog‘lamay o‘rganiladi. Dinamikada moddiy jismlarning harakati unga ta’sir etuvchi kuchlarga bog‘liq ravishda tekshiriladi. Statikada jismlarning muvozanati, ularga qo‘yilgan kuchlarni sodda holga keltirish masalalari hal qilinadi.

Real jismlarning harakati turli tuman va murakkab bo‘lganligi tufayli ularni o‘rganishni osonlashtirish maqsadida abstrakt tushunchalar kiritilgan. Bunday ob’ektlar sifatida moddiy nuqta, moddiy nuqtalar sistemasi, absolyut qattiq jism, yaxlit muhit kabi tushunchalarni keltirish mumkin.

Moddiy nuqta - harakatning muayyan sharoitlarida o‘lchamlari hisobga olinmaydigan jismdir. Moddiy nuqtaning vaziyati va harakati boshqa moddiy nuqtalar vaziyati va harakatiga bog‘liq bo‘lgan moddiy nuqtalar to‘plamiga – moddiy nuqtalar sistemasi yoki mexanik sistema deyiladi. Yoki boshqacha aytganda moddiy nuqtalar sistemasi - har birini moddiy nuqta deb qarash mumkin bo‘lgan nuqtalar to‘plamidir. Masalan, Quyosh sistemasi.

O‘zining harakati davomida istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa o‘zgarmasdan qoladigan sistema absolyut qattiq jism deb qabul qilingan. Tabiatda uchraydigan har qanday moddiy jismlar atom va molekulalardan tashkil topgan bo‘lib, ular diskret strukturaga ega. Ammo, masalani soddalashtirish maqsadida u yaxlit muhit deb qaraladi. Tekshiriluvchi ob’ektlarga bog‘liq holda klassik mexanika moddiy nuqta va moddiy nuqtalar sistemasi mexanikasi, absolyut qattiq jism mexanikasi, yaxlit muhit mexanikasiga bo‘linadi. O‘z navbatida yaxlit muhit mexanikasi elastiklik nazariyasi, gidrodinamika va aerodinamikaga bo‘linadi.

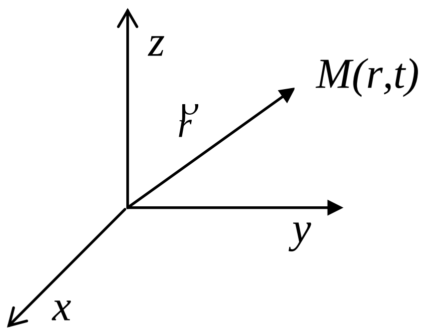
Fazo va vaqt haqidagi klassik tasavvurlar birinchi bor N’yuton tomonidan aniq ko‘rinishda ifodalangan. Bunda fazo va vaqtni ob’ektiv mavjudligi tan olinadi. Ammo, ular bir-biridan va harakatlanuvchi materiyadan ajralgan holda mavjud bo‘lib qoladi. Moddiy jismlar harakati va maydonlarda yuz beruvchi jarayonlar fazo vaqtning xususiyatlariga mutlaqo ta’sir etmaydi. Klassik mexanikada fazo ham vaqt ham absolyut deb qaraladi. Klassik mexanikada fazo hamma yerda uzluksiz, bir jinsli va izotrop deb hisoblanib, uning metrik xususiyatlari Evklid geometriyasining aksiomalari orqali to‘liq ifodalanadi. Vaqt esa fazoning hamma nuqtalari uchun bir xil universal kattalik hisoblanib, hamma yerda bir tekis kechadi va fazo singari uzluksiz va bir jinsli deb qaraladi.

Moddiy nuqta yoki jismlar harakatini tekshirishda sanoq sitemasidan foydalaniladi. Klassik mexanikada absolyut qattiq jism bilan bog‘langan koordinatalar sistemasi va unga biriktirilgan soat, uzunlik va vaqt etalonlari birgalikda sanoq sistemasini tashkil etadi. Fazo bir jinsli va izotrop bo‘lganligi uchun uning xossalari hamma nuqtalari va barcha yo‘nalishlari bo‘yicha bir xil.

Vaqt o‘tishi bilan jismning fazodagi vaziyatining o‘zgarishiga mexanik harakat deb ataladi. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki har qanday mexanik harakatni bir qiymatli o‘rganish uchun, birinchidan, jismni biror shartli ravishda tanlab olingan sanoq sistemada qaralishi lozim. Ikkinchidan, vaqtni o‘lchash uchun bizga biror davriy jarayon bo‘lishi lozim. Yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra ayni bir jism harakatini, yoki biror bir tabiat hodisasini o‘rganish uchun uning qachon va qayerda sodir bo‘lishligini bilish lozim. Odatda istalgan jismni harakatini fazodagi holatini $\vec{r}$ radius-vektor va harakatni sodir bo‘lganligini t vaqt orqali ifodalash uchun dekart koordinatalar sistemasida tashkil etuvchilar yordamida yozishimiz mumkin (1-rasm).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Rasm 1. Nuqtaning fazodagi o‘rni dekart koordinatalar sistemasida.

I Bob. HARAKAT TENGLAMALARI

1.1. MODDIY NUQTA HARAKATINI DEKART KOORDINATALAR SISTEMASIDA IFODALANISHI.

Har qanday harakat nisbiydir. Jism harakatini ifodalash uchun koordinata sistemasini tanlashga to‘g‘ri keladi. Aks holda nuqta harakatlanmoqdami yoki kuzatuvchimi mavhum qoladi. Shuning uchun turlicha trayektoriyali harakatlar uchun mos ravishda sistemalar tanlanadi. Oddiy va qulay sistema Dekart koordinatalar sistemasidir. Moddiy nuqtaning Dekart koordinata sistemasidagi harakat qonunlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (1.1)$$

Agar bu tenglamalardan vaqtni chiqarib koordinatalarni o‘zaro bog‘liqligi topilsa nuqtaning trayektoriya tenglamasi topiladi va bunday ko‘rinishdagi tenglamalarga parametrik tenglamalar deyiladi. Koordinata boshidan moddiy nuqtaga yo‘nalgan vektor radius-vektor deb ataladi. Koordinatalar orqali ifodalangan radius-vektor quyidagi ko‘rinishda yoziladi.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1.2)$$

Shuningdek, bu radius-vektorining vaqt bo‘yicha to‘liq differensiallari nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlarini beradi

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (1.3)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (1.4)$$

Tezlik va tezlanish vektorlarining o‘qlardagi proyeksiyalarini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

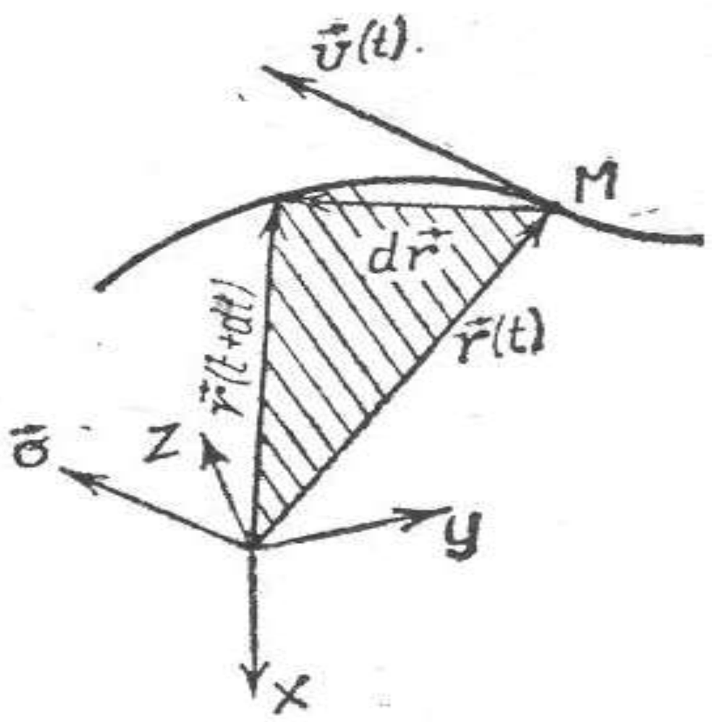
$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \qquad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (1.5).$$

Tezlik va tezlanishlarning modullarini esa quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \qquad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (1.6)$$

Demak, radius-vektordan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosila tezlik vektoriga, radus-vektordan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosila esa tezlanish vektoriga teng ekan.

Nuqtaning yassi harakatini tekshirishda $\vec{v}$ oniy tezlik bilan birga $\vec{\sigma}$ sektorial tezlik tushunchasini kiritish qulaylik tug‘diradi. Sektorial tezlikning son qiymati $\vec{r}$ radius-vektor tomonidan vaqt birligi ichida bosib o‘tilgan yuzaga teng bo‘lib, yo‘nalishi $\vec{r}$ va $\vec{v}$ vektorlari bilan o‘ng vint sistemasi hosil qiluvchi $\vec{\sigma}$ vektorga teng (2-rasm).



Rasm 2. Egri chiziqli harakatda sektorial tezlik vektori.

Rasmdan ko‘ramizki, harakatlanuvchi M nuqta $\vec{r}$ radius-vektorning dt vaqt ichida bosib o‘tgan yuzasi $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$ yuza vektorining son qiymatiga yetarli aniqlik bilan teng, demak, sektorial tezlik vektori uchun quyidagi ifoda o‘rinli

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}] \qquad (1.7)$$

Sektorial tezlikning dekart koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini topamiz.

$$\dot{\vec{\sigma}} = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\vec{i}(y\dot{z} - \dot{y}z) + \vec{j}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \vec{k}(x\dot{y} - y\dot{x})\right] \qquad (1.8)$$

Bundan sektorial tezlikning proyeksiyalari

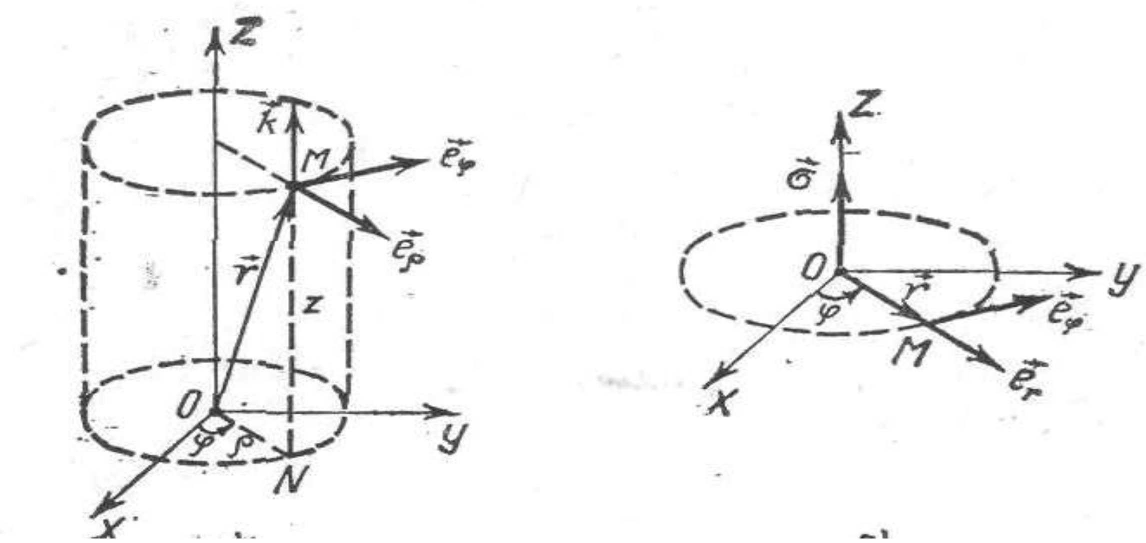
$$\sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}), \qquad \sigma_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}), \qquad \sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad (1.9)$$

Agar harakat XOY tekislikda sodir bo‘lsa faqat z o‘qdagi proyeksiya qoladi.

$$\dot{\vec{\sigma}} = \frac{1}{2}\vec{k}(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad (1.10)$$

1.2. MODDIY NUQTA HARAKATINI SILINDRIK VA QUTB KOORDINATALAR SISTEMASIDA IFODALANISHI.

Silindrik koordinatalar sistemasida M nuqtaning holati ρ, φ, z koordinatalar bilan aniqlanadi. Nuqtaning harakat qonunlari $\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t)$ ko‘rinishlarda bo‘ladi.



a b

Rasm 3. Silindrik koordinatalar sistemasida M nuqtaning holati.

Dekart koordinatalarini silindrik koordinatalari orqali quyidagicha yozish mumkin.

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \qquad (1.11)$$

$$\vec{r} = \rho\cdot\vec{e}_\rho + z\vec{k},\quad r=\sqrt{\rho^2+z^2},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.12)$$

Silindrik koordinatalar sistemasining $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ortlari bilan $\vec{i}, \vec{j}$ Dekart ortlari orasidagi bog‘lanishni topish uchun $\vec{r}$ radius-vektor har ikkala sistemadagi (1.12) ifodalarini o‘zaro tenglashtiramiz va (1.11) ni inobatga olsak, natijada quyidagicha bog‘lanishlarga ega bo‘lamiz:

$$\vec{e}_\rho = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,\quad \vec{e}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi \qquad (1.13)$$

Silindrik koordinatalar sistemasining $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ortlarining yo‘nalishi vaqtga bog‘liq holda o‘zgaradi, shuning uchun, ularning vaqt bo‘yicha hosilalarini topish kerak bo‘ladi.

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi) = \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi,$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) = -\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\rho$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi,\qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\rho \qquad (1.14)$$

Nuqtaning (1.12) radius-vektoridan vaqt bo‘yicha hosilalarida (1.14) tengliklarni inobatga olsak tezlik va tezlanish vektorlarini aniqlashimiz mumkin.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho + \rho\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho + \rho\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k},\qquad v=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2} \qquad (1.15)$$

$$v_\rho = \dot{\rho},\quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi},\quad v_z = \dot{z} \qquad (1.16)$$

v_ρ, v_φ, v_z larga mos ravishda tezlik vektorining radial, ko‘ndalang va aksial proyeksiyalari deb yuritiladi. Tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha hosila olib $\vec{a}$ tezlanish vektor va uning proyeksiyalari uchun quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k} \qquad (1.17)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\qquad a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi},\quad a_z = \ddot{z} \qquad (1.18)$$

Agar $z=0,\quad \rho=r$ bo‘lsa silindrik koordinatalar sistemasi tekislikdagi z,φ qutb koordinatalar sistemasiga o‘tadi (3-rasm b).

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{1.19}$$

$$\vec r=r\vec e_r \qquad\qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.20}$$

Bunda harakat qonuni $r=r(t),\quad \varphi=\varphi(t)$ tenglamlar bilan beriladi. Ulardan t ni chiqarib, M nuqtaning qutb koordinatalar sistemasidagi $r=r(\varphi)$ traektoriyasi tenglamasi topiladi. Tekislikda harakatlanuvchi M nuqtaning *qutb koordinatlaridagi* $\vec r$ radius-vektori, $\vec v$-chiziqli va $\vec\sigma$- sektorial tezliklari hamda $\vec a$ tezlanishi uchun (1.15) - (1.18) munosabatlarga ko‘ra quyidagicha yoziladi. $z=0\qquad \rho=r\qquad \vec e_\rho=\vec e_r$

$$\vec r=r\vec e_r,\quad \vec v=\dot r\vec e_r+r\dot\varphi\vec e_\varphi \tag{1.21}$$

$$\vec\sigma=\frac{1}{2}[\vec r,\vec v]=\frac{1}{2}r^2\dot\varphi\vec k \tag{1.22}$$

$$\vec a=(\ddot r-r\dot\varphi^2)\vec e_r+(2\dot r\dot\varphi+r\ddot\varphi)\vec e_\varphi=(\ddot r-r\dot\varphi^2)\vec e_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)\vec e_\varphi \tag{1.23}$$

$$a_r=\ddot r-r\dot\varphi^2\qquad a_\varphi=2\dot r\dot\varphi+r\ddot\varphi \tag{1.24}$$

Masala: $\rho=\rho_0\cos(\omega t),\quad \varphi=\varphi_0\sin(\omega t),\quad z=A+v_0t$

bo‘lsa uning silindrik koordinata sistemalaridagi tezligi va tezligi modulini toping.

1.3. MODDIY NUQTA HARAKATINI SFERIK KOORDINATALAR SISTEMASIDA IFODALANISHI.

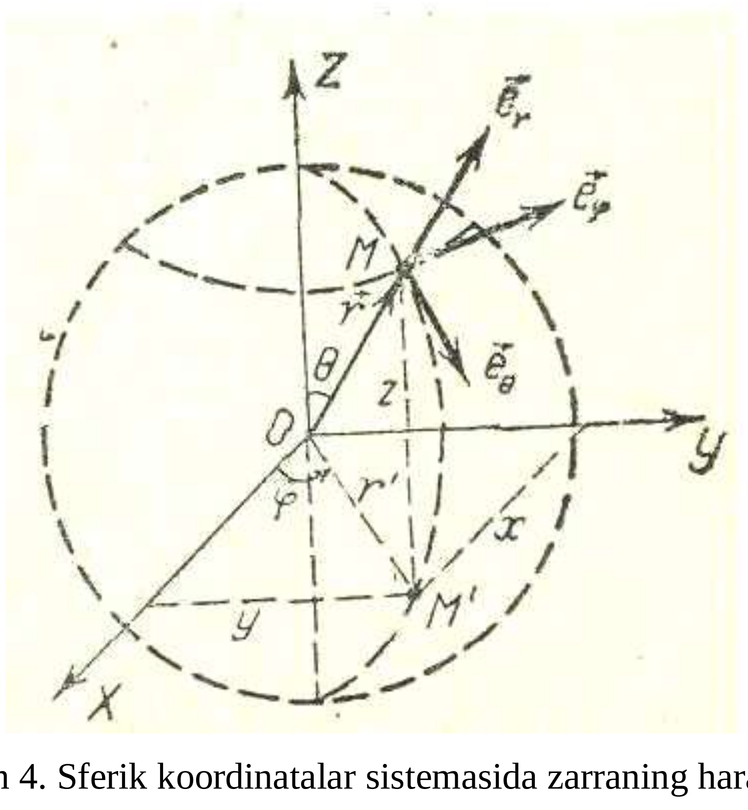
Sferik koordinatalar sistemasida M moddiy nuqtaning holati r,θ,φ koordinatalar orqali, uning harakat qonunlari esa quyidagi tenglamalar bilan beriladi.

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{1.25}$$

Sferik va Dekart koordinatalari orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar orqali ifodalanadi (4-rasm):

$$\begin{gathered} x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{r'}{z}, \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x} \end{gathered} \tag{1.26}$$

Bu erda $r' = \sqrt{x^2+y^2}$. Sferik sistemaning $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ortlari bilan Dekart ortlari $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orasidagi bog‘lanishlarni quyidagicha topish mumkin:



Rasm 4. Sferik koordinatalar sistemasida zarraning harakati.

$$\left.\begin{aligned}
\vec e_r &= \vec i\sin\theta\cos\varphi + \vec j\sin\theta\sin\varphi + \vec k\cos\theta\\
\vec e_\theta &= \vec i\cos\theta\cos\varphi + \vec j\cos\theta\sin\varphi - \vec k\sin\theta\\
\vec e_\varphi &= -\vec i\sin\varphi + \vec j\cos\varphi
\end{aligned}\right\}$$

$$\vec e_\theta = \frac{d\vec e_r}{d\theta}, \qquad \vec e_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\vec e_r}{d\varphi} \tag{1.27}$$

Sferik koordinatalar sistemasining barcha ortlari M nuqta harakatlanganda o‘z yo‘nalishlarini o‘zgartiradi, shuning uchun, ularning vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$\dot{\vec e}_r = \vec i(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi) + \vec j(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi) - \vec k\dot\theta\sin\theta =$$
$$= \dot\theta\vec e_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi$$
$$\dot{\vec e}_\theta = \vec i(-\dot\theta\sin\theta\cos\varphi - \dot\varphi\cos\theta\sin\varphi) + \vec j(-\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\theta\cos\varphi) - \vec k\dot\theta\cos\theta =$$
$$= -\dot\theta\vec e_r + \dot\varphi\cos\theta\,\vec e_\varphi$$
$$\dot{\vec e}_\varphi = -\vec i\dot\varphi\cos\varphi - \vec j\dot\varphi\sin\varphi = -\dot\varphi(\cos\varphi - \vec j\sin\varphi) = -\dot\varphi\sin\theta\,\vec e_r - \dot\varphi\cos\theta\,\vec e_\theta$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec e}_r &= \dot\theta\vec e_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi\\
\dot{\vec e}_\theta &= -\dot\theta\vec e_r + \dot\varphi\cos\theta\,\vec e_\varphi\\
\dot{\vec e}_\varphi &= -\dot\varphi\sin\theta\,\vec e_r - \dot\varphi\cos\theta\,\vec e_\theta
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Sferik koordinatalar orqali ifodalangan $\vec r = r\vec e_r$ radius-vektordan birinchi tartibli hosila olib, (1.28) ni e’tiborga olsak tezlik uchun quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$\begin{aligned}
&\vec v = \dot{\vec r} = \frac{d}{dt}(r\vec e_r) = \dot r\vec e_r + r\dot\theta\vec e_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi\\
&v = \sqrt{\dot r^2 + r^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)}\\
&v_r = \dot r,\quad v_\theta = r\dot\theta,\quad v_\varphi = r\dot\varphi\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Ma’lumki, tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosila tezlanish vektorini beradi:

$$\vec a = a_r\vec e_r + a_\theta\vec e_\theta + a_\varphi\vec e_\varphi \tag{1.30}$$

Bu yerda

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot r - r(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)\\
a_\theta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\\
a_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

a_r, a_θ va a_φ mos holda radial, meridional va azimutal tezlanishlar deb yuritiladi.

Masalalar

1.masala. Harakat qonuni $x = a\cos^2\omega t, \quad y = b\sin^2\omega t$ bo‘lgan zarraning trayektoriyasi, tezlik va tezlanish vektorlari topilsin.

Yechish: harakat tenglamalaridan vaqtni chiqarib quyidagi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

trayektoriya tenglamasini topamiz. Tezlik va tezlanishlari esa

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = -\omega(a\vec{i} - b\vec{j})\sin 2\omega t$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = -2\omega^2(a\vec{i} - b\vec{j})\cos 2\omega t$$

bo‘ladi. Ko‘ramizki, trayektoriya $y = b - \frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqdan iborat.

1.4. UMUMLASHGAN KOORDINATALARDA JISMLARNING HARAKATINI TAHLIL QILISH.

Bundan oldingi mavzularda turli xil koordinatalar sistemasida jismlarning vaziyatlari , tezlik va tezlanish vektorlari orasidagi bog‘lanishlarni tahlil qilgan edik. Mazkur masalani hal qilish uchun umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar tushunchasidan foydalanish mumkin. Unda Dekart, silindrik, sferik va boshqa koordinatalar sistemalari xususiy hollar singari qaraladi. Ushbu masala birinchi bor Lagranj tomonidan kiritilgan. Lagranj metodiga ko‘ra ixtiyoriy sistema holatini uning umumlashgan koordinatalari va umumlashagan tezliklari orqali tavsiflanadi. Uning mulohazasiga ko‘ra jismning ixtiyoriy vaqt momentidagi tezlanishi unga shu vaqt davomida ta’sir qilayotgan kuch orqali aniqlanadi.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right) \tag{1.32}$$

Bu erda $\vec{F}$ – moddiy nuqta yoki zarrachaga ta’sir etayotgan kuch bo‘lib, u umumiy holda zarrachaning tezligi, radius-vektori va vaqtga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

$$\vec{F}_{gr} = G\frac{mM}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \qquad \vec{F}_{lor} = q\left[\vec{v},\vec{B}\right] = q\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{v},\vec{B}\right] \tag{1.33}$$

$$F_{Lor} = qvB\sin\alpha \tag{1.34}$$

Ko‘rinib turibdiki $\vec{B}$-magnit maydon induksiyasi vaqt bo‘yicha o‘zgarsa, u holda Lorens kuchi vaqtga ham bog‘liq bo‘lib qoladi. Bundan tashqari, magnit maydon induksiyasi turli nuqtalarda har xil bo‘lsa, ya’ni maydon bir jinsli bo‘lmasa u holda Lorens kuchi ham radius-vektorga, ham tezlikka, ham vaqtga bog‘liq bo‘ladi.

Ma’lumki, moddiy nuqtaning Dekart koordinatalar sistemasidagi vaziyatini uchta x, y, z koordinatalar aniqlaydi.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.35}$$

N ta moddiy nuqtadan iborat sistemaning holatini aniqlash uchun N ta radius-vektorni topishga to‘g‘ri keladi va buning uchun $3N$ ta koordinata zarur bo‘ladi.

Mexanik sistemaning fazodagi holatini bir qiymatli aniqlovchi har qanday o‘zaro bog‘lanmagan skalayar kattaliklar soni sistemaning erkinlik darajalari soni deyiladi. Bu kattaliklar qo’yilgan masalaning shartiga ko‘ra Dekart, sferik, silindrik koordinatlari bo‘lishi mumkindir. Shuning uchun har qanday s ta $q_1, q_2, ..q_s$ kattaliklar umumlashgan koordinatalar ularning hosilalari umumlashgan tezliklar deyiladi. Umumlashgan koordinatlar soni mexanik sistemaning erkinlik darajalari soniga teng bo‘ladi. Umumlashgan koordinatalar tushunchasi umumiy bo‘lib, har qanday mexanik sistema uchun qo‘llanilishi mumkin.

$S = 3n$ mexanik sistema uchun umumlashgan koordinatalar soni $3n$ ta (x_i, y_i, z_i) dekart, (ρ_i, φ_i, z_i) silindrik, $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ sferik umumlashgan koordinatalarda olinishi mumkin.

$$\begin{aligned} q &= \{x, y, z\} \\ \dot{q} &= \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} \\ \ddot{q} &= \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\} \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{y} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{z} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Umumiy ko‘rinishdagi harakat tenglamasini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \tag{1.37}$$

Umumlashgan koordinatalar sistemaning erkinlik darajalar soniga teng bo‘lishi lozim.

1.5. ENG KICHIK TA’SIR TAMOYILI. LAGRANJ FUNKSIYASI

Umumiy ko‘rinishdagi harakat tenglamasini quyidagi ko‘rinishda ifodaladik.

$$\ddot{q} = f(q,\dot{q},t) \tag{1.38}$$

Ushbu umumiy harakat tenglamasi qanday ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin degan masalani hal qilamiz. Ya’ni umumlashgan kuchni aniqlashga kirishamiz. Bu masalani hal qilish uchun qaralayotgan fizikaviy sistemaning biror boshlang‘ich va oxirgi holatlardagi koordinatalari va umumlashgan tezliklari ma’lum bo‘lgan sistema qanday real trayektoriya bo‘ylab boshlang‘ich holatdan oxirgi holatga o‘tadi degan masalani hal qilish lozim. Boshqacha aytganda jismning harakat traektoriyasi uning harakat tenglamasi bilan chambarchas bog‘liq. Masalani dastlab bir jinsli muhitda tarqalayotgan yoruglik to‘lqini kabi qaraylik. Geometrik optika qonunlariga asosan yorug‘lik ikki nuqtani tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tarqaladi. Ya’ni, bo‘lishi mumkin bo‘lgan trayektoriyalar ichidan eng qisqasini tanlaydi. Endi yorug‘lik bir jinsli bo‘lmagan muhitda tarqalishini qarasak, bu holda yorug‘lik to‘g‘ri chizik bo‘ylab tarqalmaydi. Aksincha, u A nuqtadan B nuqtaga o‘tishi uchun eng qisqa vaqt sarflovchi yo‘lni tanlaydi. Yorug‘lik tarqalishi yo‘nalishini optik zichligiga qarab o‘zgartiradi. Demak, fizikaviy sistema A nuqtadan B nuqtaga yoki eng qisqa trayektoriya bo‘ylab yoki, eng qisqa vaqt talab qiladigan trayektoriya bo‘ylab o‘tadi. Buni umumiy holda ko‘rib chiqish uchun ayrim masalalarni kiritamiz.

Ta’rif. Ixtiyoriy fizikaviy sistemaning umumlashgan koordinatalari, umumlashgan tezliklari va umumiy holda vaqtga bog‘lik bo‘lgan funksiyasi Lagranj funksiyasi deyiladi.

$$L = L(q,\dot{q},t) \tag{1.39}$$

Biz hozirga qadar umumlashgan koordinata va umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lgan quyidagi kattaliklarni bilamiz.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} = f\ (q,\dot{q})$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kq^2}{2} = f(q)$$

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = f(q,\dot{q})$$

Endigi maqsadimiz ixtiyoriy fizikaviy sistema uchun Lagranj funksiyasini aniqlashdan iborat. Buning uchun Lagranj quyidagi ta’sir prinsipini taklif etdi.

Ta’rif. Har qanday sistema uning Lagranj funksiyasi orqali aniqlanuvchi quyidagi ta’sir kattaligi bilan xarakterlanadi.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{1.40}$$

S -ta’sir funksiyasi.

Ta’rif. Har qanday sistema o‘z harakati davomida shunday trayektoriyani tanlaydiki ta’sir variatsiyasi nolga teng bo‘ladi

$$\delta S = 0 \tag{1.41}$$

Keyingi ishlarni bajarishdan oldin oliy matematika kursidan quyidagilarni esga olaylik.

Eslatma. 1. Agar bizga ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsa, uning differensiali quyidagicha topiladi.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.44}$$

2. Agar xuddi shu funksiyaning orttirmasini topish talab etilsa u quyidagicha

$$\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \tag{1.45}$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

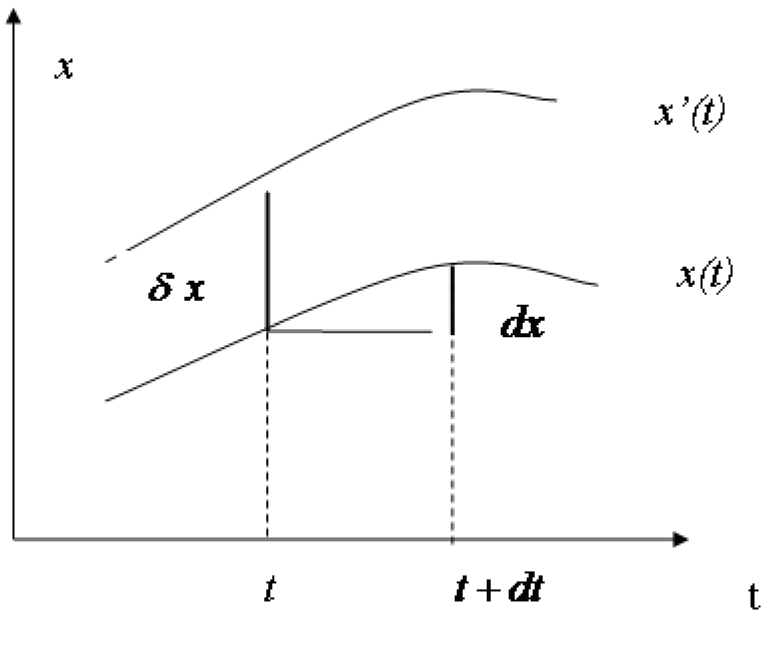
3. Xuddi shu funksiyaning variatsiyasi esa

$$\delta f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y \tag{1.46}$$

Yuqoridagi ikkita formuladan uchinchisining farqi x, y o‘zgaruvchining variatsiyasi chekli o‘zgarishidir. Virtual siljish vaqtning funksiyasi hisoblanmaydi. Funksiyaning variatsiyasi – real harakatdan berilgan vaqt momentida xayoliy (bog‘lanishlar ruxsat etgan) harakatga orttirma olib o‘tishidir (5-rasm).
Ta’sir ifodasidan ko‘rinib turibdiki uning qiymati integral ostidagi funksiyaning ko‘rinishiga bog‘liq, ya’ni u Lagranj funksiyasining funksionalidir.
Ta’sir variatsiyasini yozish mumkin

$$\delta S=S'-S=\int_{t_1}^{t_2}L'dt-\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\int_{t_1}^{t_2}[L'-L]dt=0$$

$$L'=L+\delta L=L+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}$$



Rasm 5. Funksiyaning variatsiyasi va differensiali.

Demak, ta’sirning variatsiyasini quyidagicha topish mumkin.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta \dot{q} - L \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta \dot{q} \right] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \right] dt \qquad (1.47)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) dt$$

Ikkinchi hadni bo‘laklab integrallaymiz $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt \qquad (1.48)$$

Masalaning qo‘yilishiga ko‘ra yuqori va pastki chegarada umumlashgan koordinatalar variatsiyasi nolga teng. t_1 dan t_2 vaqt intervalida $\delta q(t)$ -funksiya eng kichikdir. $t = t_1$ va $t = t_2$ barcha solishtiriladigan funksiyalar bir xil qiymatga ega bo‘ladi.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Endi (1.48) ifodani (1.47) formulaga qo‘yamiz.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \delta q dt \qquad (1.49)$$

$\delta S = 0$ shartni qo‘llasak, ya’ni har qanday sistema o‘z harakati davomida shunday trayektoriyani tanlaydiki ta’sir variatsiyasi nolga teng bo‘ladi.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \delta q dt = 0 \qquad (1.50)$$

Ko‘rinib turibdiki oxirgi shart o‘rinli bo‘lishi uchun quyidagi shart bajarilishi lozim

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (1.51)$$

Bu Lagranj tenglamasi bo'lib, u sistemaning harakat tenglamasi deyiladi. Agar bir necha erkinlik darajasiga ega sistema qaralsa alohida tenglamalar majmuasini hosil qilamiz.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2,..S) \tag{1.52}$$

Matematik nuqtai nazardan (1.52) tenglama S ta tenglamalardan iborat va ularni to'la aniqlash uchun barcha koordinatalarning boshlang'ich qiymatlari berilishi kerak.

1.6. LAGRANJ FUNKSIYASINING AYRIM MUHIM XOSSALARI

Eng kichik ta'sir prinsipiga ko'ra ixtiyoriy fizikaviy sistemaning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lishi ma'lum edi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{1.53}$$

Bu harakat tenglamasini keltirib chiqarishda biz biror-bir joyda Lagranj funksiyasining oshkor ko'rinishidan foydalanganimiz yo'q. Shuning uchun, bu tenglama ixtiyoriy sistema uchun o'rinli. Lagranj funksiyasining konkret ko'rinishlarini topishdan oldin uning (1.53) harakat tenglamasiga asoslangan ayrim xossalarini ko'rib chiqamiz.

1.Agar sistema ikkita yopiq A va B qismlardan iborat bo'lsin. Mos holda ularning Lagranj funksiyalari L_A va L_B bo'lsin. Agar bu qismlarning o'zaro ta'siri inobatga olinmas darajada bo'lsa yaxlit sistemaning Lagranj funksiyasi quyidagi chegaraviy qiymatga intiladi. Lagranj funksiyasining additivlik xossasi bir qismga mos qiymatga ikkinchisi erishmaydi.

$$\lim L = L_A + L_B \tag{1.54}$$

2.Agar qaralayotgan sistema erkin zarralar sistemasidan iborat bo'lsa, bunday sistemaning Lagranj funksiyasi alohida zarralar Lagranj funksiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$L = \sum_i L_i \tag{1.55}$$

3.Agar sistemaning Lagranj funksiyasiga biror doimiy additiv kattalik ishtirok etsa $L' = L + A \qquad A = const$. Birinchi harakat tenglamasi o‘zgarmaydi.

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q};$$

4.Bir biridan koordinata va vaqtning $f(q,t)$ funksiyasidan vaqt bo‘yicha to‘liq hosilaga farqlanuvchi ikkita $L'(q,\dot{q},t)$ va $L(q,\dot{q},t)$ funksiyalarni ko‘raylik.

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

Eng kichik ta’sir prinsipiga ko‘ra har qanday sistemaning ta’sir funksiyasi uning Lagranj funksiyasidan olingan quyidagi integral orqali aniqlanadi.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q,t) dt$$

$$S' = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) \tag{1.56}$$

Oxirgi ayirma harakatning variatsiyasida yo‘qoladi va $\delta S' = \delta S = 0$ bo‘ladi hamda sistemaning harakat tenglamasi o‘zgarmaydi.

Demak, Lagranj funksiyasi unga koordinata va vaqtning to‘liq hosilasini qo‘shishgacha aniqlik bilan aniqlangandir. Agar qaralayotgan sistemaning Lagranj funksiyasi bir-biridan to‘la hosilaga farq qilsa ularning harakat tenglamalari bir xil ko‘rinishga ega bo‘ladi. Lagranj funksiyasining bu xususiyatidan uni soddalashtirish maqsadida foydalaniladi.

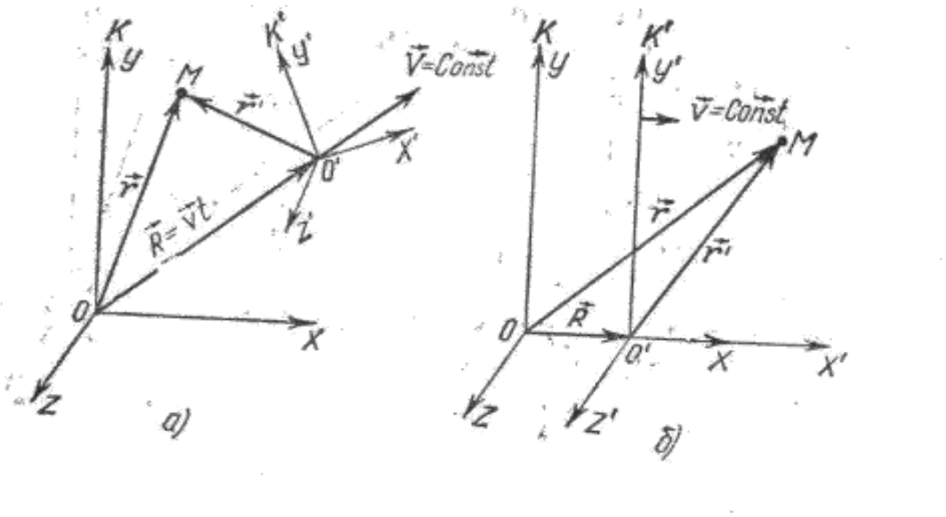
Shunday inersial sistema mavjudki unda tezlik doimiy qiymatga va yo‘nalishga ega. Nisbiylik prinsipiga ko‘ra tabiat qonunlari barcha inersial sistemalarda bir xil. Masalani umumiy holda qo‘yamiz. Faraz qilaylik bizga zarraning tenglamasi ma’lum bo‘lsin.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.57}$$

Agar bizga biror K' sanoq sistemasi berilgan bo‘lib, u K sistemaga nisbatan doimiy tezlik bilan harakatlanayotgan bo‘lsa (6-rasm), zarraning bu sistemalardagi radius vektorlari quyidagicha bog‘langanligini ko‘rish mumkin.

$$\vec r = \vec r\,' + \vec R = \vec r\,' + \vec V t \tag{1.58}$$

Bunda vaqt barcha sanoq sistemalarida bir xilda bo‘ladi. Galiley nisbiylik prinsipiga ko‘ra vaqt mutlaqo ya’ni vaqtning davomiyligi sanoq sistemaning qanday doimiy tezlik bilan harakatlanishiga bog‘liq emas.



Rasm 6. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati.

Demak butun koinot uchun yagona vaqt mavjud bo‘ladi $t = t'$. Yuqoridagi tenglikning ikkala tomonini vaqt bo‘yicha differensiallab Galileyning tezliklarni qo‘shish qonunini olamiz.

$$\begin{gathered} \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r\,'}{dt} + \vec V \frac{dt}{dt} \\ \vec v = \vec v\,' + \vec V \end{gathered} \tag{1.59}$$

Erkin zarraning Lagranj funksiyasi radius vektor va vaqtga oshkora bog‘liq bo‘lolmaydi, chunki bir jinslilik buziladi. Lagranj funksiyasi tezlikning yo‘nalishiga bog‘liq bo‘lolmaydi, chunki izotroplik buziladi. Shuning uchun, tezlikning kvadratiga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

$$L = L\left(v^2\right) = a v^2$$

Tezliklarni almashtiramiz.

$$L(v^2)=bv^2=b(\vec{v}'+\vec{V})^2=bv'^2+2b\vec{v}'\vec{V}+bV^2$$

$$L(v^2)=bv'^2+2b\frac{d\vec{r}'}{dt}\vec{V}+bV^2=L(v'^2)+\frac{d}{dt}\left(2b\vec{r}'\vec{V}+b\vec{V}^2t\right)$$

Ikkinchi had haqiqatdan ham to‘liq differensial shuning uchun tushirib qoldirish mumkin. Tekshirishlar natijalaridan $a=\frac{m}{2}$ ma’lum. Demak erkin zarraning Lagranj funksiyasi topildi.

$$L=\frac{mv^2}{2} \tag{1.60}$$

1.7. GAMILTON TENGLAMASI.

Mexanika qonunlarini Lagranj funksiyasi orqali shakllanishini ko‘rib o‘tdik. Lagranj funksiyasi koordinatalar va tezliklar orqali ifodalanadi. Shunday sistemalar mavjudki ularda umumlashgan koordinatalar va impulslar orqali ifodalanishi qulay bo‘ladi. Shuning uchun harakat qonunlarini bu koordinatalardagi ifodalarini topish talab etiladi.

Lagranj funksiyasining to‘liq differensiali

$$dL=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i$$

Bu munosabatni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$dL=\sum \dot{p}_i dq_i+\sum p_i d\dot{q}_i \tag{1.61}$$

chunki $\frac{\partial L}{\partial q_i}=F=\frac{dp_i}{dt}=\dot{p}_i$ umumlashgan kuch.

Ikkinchi hadni ko‘paytma hosilasi ko‘rinishida yozamiz.

$$\sum p_i d\dot{q}_i=d\left(\sum p_i\dot{q}_i\right)-\sum \dot{q}_i dp_i$$
$$dL=\sum \dot{p}_i dq_i+d\left(\sum p_i\dot{q}_i\right)-\sum \dot{q}_i dp_i$$
$$d\left(\sum p_i\dot{q}_i-L\right)=\sum \dot{q}_i dp_i-\sum \dot{p}_i dq_i$$

Differensial ostidagi kattalik sistemaning energiyasini beradi va unga Gamilton funksiyasi deyiladi.

$$H(p,q,t)=\sum_i p_i\dot{q}_i-L \tag{1.62}$$

$$dH=\sum \dot{q}_i dp_i-\sum \dot{p}_i dq_i \tag{1.62*}$$

Differensial qoidasidan

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.63}$$

Bu qidirilayotgan p va q o‘zgaruvchili tenglamalar Gamilton tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalarning oddiyligi va simmetriyasini e’tiborga olib ularni kanonik tenglamalar deb aytiladi.

Gamilton funksiyasidan vaqt bo‘yicha to‘liq differensial quyidagichadir.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

Bu munosabatga (1.63) tenglamalardan $\dot{q}_i$ va $\dot{p}_i$ larni qo‘yamiz

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.64}$$

Agar Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog‘liq bo‘lmasa $\frac{dH}{dt} = 0$ bo‘ladi, ya’ni energiyaning saqlanish qonuniga keladi. (1.61) formuladan

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

λ - tashqi maydonni xarakterlovchi parametr bo‘lsin (1.62) formuladan

$$dH = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

Bundan

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q_i} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q} \tag{1.65}$$

Xususiy hosilalar birinchi holda $\dot{p}, q$ doimiyligida va ikkinchi qismida $\dot{q}, q$ doimiyligida olinadi.

Agar $L = L_0 + L'$ ya’ni L' qo‘shimchaga ega

$H = H_0 + H'$

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q} \tag{1.66}$$

Potensial maydondagi zarraning Gamilton funksiyasi quyidagichadir.

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + U(x,y,z)$$

1.8. GAMILTON - YAKOBI TENGLAMASI.

Berilgan t_1 va t_2 vaqt momentlarida sistemaning egallaydigan $q^{(1)}$ va $q^{(2)}$ holatlari trayektoriya bo‘yicha eng kichik ta’sir integralini ko‘rdik.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{1.67}$$

S integralning minimal qiymati haqiqiy harakatni ifodalaydi.

Ta’sirning o‘zgarishi bir trayektoriyadan unga yaqin trayektoriyaga o‘tishda quyidagi formula bilan aniqlanardi.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \; dt$$

Haqiqiy harakat trayektoriyasi Lagranj tenglamasini qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun integral nolga teng bo‘lgan holati qidiriladi. Birinchi holat $\delta q(t_1) = 0$ va $\delta q(t_2) = \delta q$ o‘zgartiriladi.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q = p\delta q$$

Ixtiyoriy erkinlik darajasi uchun

$$\delta S = p_i \delta q_i \qquad (1.68)$$

Bu munosabatdan ta’sirning koordinatalar bo‘yicha xususiy hosilalari kelib chiqadi.

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \qquad (1.69)$$

Ta’sirning (1.67) formulaga binoan to‘liq differensiali vaqt bo‘yicha quyidagichadir.

$$\frac{dS}{dt} = L \qquad (1.70)$$

Ikkinchi tomondan S ni koordinata va vaqtning funksiyasi sifatida qarab vaqt bo‘yicha to‘liq hosilasini olamiz.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

(1.69) formulani inobatga olsak

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \qquad (1.71)$$

(1.70) formulani inobatga olsak

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i \qquad (1.72)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\sum p_i \dot{q}_i + L = -H(P, q, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p,q,t) \tag{1.73}$$

(1.71) formulani dS uchun yozish mumkin.

$$dS = \sum_i p_i \frac{dq}{dt} \cdot dt - Hdt = \sum_i p_i dq_i - Hdt$$

$$dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt \tag{1.74}$$

Ta’sirning o‘zi uchun esa quyidagi integralni olamiz.

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - Hdt \right) \tag{1.75}$$

Agar $H(p,q)$ vaqtga oshkora bog‘liq bo‘lmasa, energiya saqlanadi va H ni E ga o‘zgartirish mumkin.

$$S(q,t) = S_0(q) - Et \tag{1.76}$$

$$S_0(q) = \sum_i \int p_i dq \tag{1.77}$$

$S_0(q)$ ba’zida qisqartirilgan ta’sir deyiladi. (1.73) tenglamada $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ e’tiborga olib tenglamani umumiy holda quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t \right) = 0$$

yana ham yoyib S erkinlik darajasida yozsak,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_S}; q_1 \ldots q_S; t \right) = 0 \tag{1.78}$$

Bu tenglamaga Gamilton-Yakobi tenglamasi deyiladi. Bitta zarra uchun uning ko‘rinishi quyidagicha (tashqi $U(x,y,z,t)$ maydonda).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U(x,y,z,t) = 0 \tag{1.79}$$

Agar $H(p,q)$ vaqtga oshkora bog‘liq bo‘lmasa (1.76) formulani e’tiborga olib (1.78) formulani sodda ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \qquad\qquad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_0}{\partial q}$$

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial S_0}{\partial q_S};q_1\ldots q_S\right)=E \qquad (1.80)$$

1.9.ADIABATIK INVARIANTLIKLAR

Bir o‘lchamli finit harakatlanuvchi sistemani ko‘raylik. Sistemaning xossalari yoki tashqi maydon bilan xarakterlanuvchi harakatni λ parametr tavsiflasin. Qandaydir tashqi sabablar ta’sirida λ vaqt bo‘yicha sekin o‘zgarsin (ba’zida bunga adiabatik holat deyiladi). Sistema harakati davomida T davr vaqtida λ oz o‘zgaradi.

$$T\frac{d\lambda}{dt}<<\lambda \qquad (1.81)$$

Bunday sistema yopiq hisoblanmaydi va uning energiyasi E saqlanmaydi. Energiyaning o‘zgarish tezligi $\dot{E}$ λ parametrning $\dot{\lambda}$ o‘zgarish tezligiga proporsional bo‘ladi. Shunday kombinatsiya (kattalik) bo‘lishi kerakki sistema harakatida bu kattalik o‘zgarmasligi kerak va unga adiabatik invariantlik deyiladi.

Unda $H(p,q,\lambda)$ funksiyasi ham λ parametrga bog‘liq bo‘lsin. Energiyaning vaqt bo‘yicha to‘liq differensialigiga ko‘ra

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \qquad \text{chunki} \qquad \frac{dH(p,q)}{dt}=\frac{\partial H(p,q)}{dt}$$

Bu tenglamani davr bo‘yicha o‘rtachalash mumkin, chunki λ davrda juda oz o‘zgaradi $(\dot{\lambda}<<\lambda)$

$$\frac{d\overline{E}}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\lambda}$$

O‘rtachalashda faqat p va q kattaliklar bo‘yicha inobatga olinadi. O‘rtachalashni oshkora ko‘rinishda yozamiz.

$$\frac{d\overline{E}}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}dt \qquad (1.82)$$

Gamilton tenglamasiga ko‘ra quyidagi munosabatlar ma’lum.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

Bu tenglik yordamida integralni koordinata bo‘yicha yozish mumkin. Davrni ham quyidagicha yozish mumkin.

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

$\oint$ -yopiq integral T davr mobaynida koordinataning to‘liq o‘zgarishi (“oldinga” va “ortga”) bo‘yicha integralni ifodalaydi.

Endi (1.82) integralni yozish mumkin

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{1}{\partial H / \partial p} dq} \tag{1.83}$$

Ta’kidlanganidek λ doimiy qiymatida trayektoriya davomida Gamilton funksiyasi doimiy E qiymatini saqlaydi, ammo impuls $p(q, E, \lambda)$ bo‘yicha o‘zgaradi. $H(p, q, \lambda) = E$ tenglikni λ bo‘yicha differensiallasak va λ parametr q va E ga oshkora bog‘liq emasligi uchun quyidagilarni yozish mumkin.

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} = 0$$

yoki $$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = -\frac{dp}{d\lambda}$$

Bu munosabatni (1.83) integralga qo‘yamiz va maxrajdagi integraldagi funksiyani $\frac{\partial P}{\partial E}$ ko‘rinishda beramiz.

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \tag{1.84}$$

yoki $$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\overline{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0$$

Bu tenglikni quyidagi ko‘rinishdagi belgilashlar yordamida berish mumkin.

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = 0 \qquad (1.85)$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq \qquad (1.86)$$

Integral E va λ ni berilgan qiymatlarida harakat trayektoriyasi bo‘yicha olinadi. I integral λ parametrning o‘zgarishida qaralgan yaqinlashishda o‘zgarmaydi va adiabatik invariantlik deyiladi. (1.86) integral $p(q)$ bog‘lanishni ko‘rsatuvchi chiziqdan iborat va fazoviy trayektoriya deyiladi. Davriy harakatlanuvchi sistema uchun fazoviy trayektoriya – yopiq chiziq. Bu chiziq bo‘ylab olingan integral ichki yuzani anglatadi.

Misol uchun bir o‘lchovli ossillyator uchun adiabatik invariantni topamiz. Gamilton funksiyasi

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$ $\omega-$ ossillyatorning xususiy chastotasi

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$ E ga bo‘lsak

$$\frac{P^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

Elliptik orbita uchun katta va kichik yarim o‘qlarni tenglamadan yozish mumkin $a = \sqrt{2mE}$ $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$$I = \frac{1}{2\pi}\pi ab = \frac{\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{4E^2 m}{m\omega^2}} = \frac{E}{\omega}$$

Ossillyatorda adiabatik invariantlik I parametr sekin o‘zgarsa uning energiyasi chastotaga proporsional o‘zgaradi va $E = I\omega$.

1.10.NUQTA TEZLIGI VA TEZLANISHINI TABIIY USULDA ANIQLASH

Jismning qaralayotgan vaqt momentidagi tezligi uning o'rtacha tezligi deyiladi.

$$\vec{v}_{o'r} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.87)$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}'\text{-}\vec{r}$$

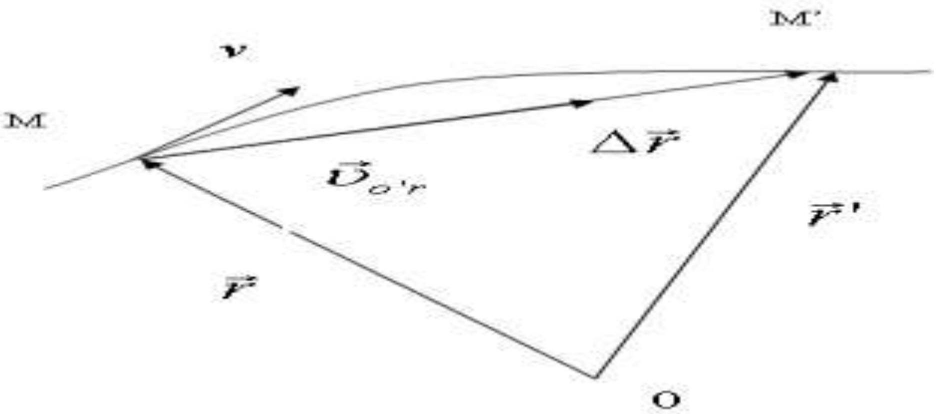
Jismning oniy vaqt momentidagi tezligi radius vektorning vaqt bo'yicha hosilasiga teng

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1.88)$$

Koordinata sistemasida

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (1.89)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \qquad (1.90)$$



Rasm 7. Moddiy nuqtaning o'rtacha tezligi.

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.91)$$

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v} \qquad \cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v} \qquad \cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v}$$

Nuqtaning tezligini tabiiy usulda aniqlashda uning trayektoriyasi aniq bo'lishi kerak. Trayektoriyaning boshqa shakllari uchun ham xuddi shunday keltirib chiqarish mumkin.

Xususiy hollarni ko’ramiz:

1. Tekis harakat

$$v = \frac{dS}{dt} = const$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Tezlikning faqat yo’nalishining o’zgarishi xarakterli bo’ladi.

2. To’g’ri chiziqli harakat.

To’g’ri chiziqli harakatda trayektoriyaning egrilik radiusi $\rho = \infty$ bo’ladi va

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Agar to’g’ri chiziqli tekis harakat bo’lsa

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \frac{v^2}{\rho} = 0$$

a=0 jism hech qanday tezlanishga ega emas.

3.Tekis tezlanuvchan harakat .

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Tezlikning algebraik qiymatining o’zgarishi urinma a_τ tezlanish bilan xarakterlanadi.

$$v = v_0 + a_\tau t$$

$$S = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

Bu formulalar ham to'g'ri chiziqli, ham egri chiziqli harakatlar uchun o'rinli

Murakkab harakat tezligi. Qo'zg'almas deb qabul qilingan sistemaga nisbatan nuqtaning harakatiga absolyut harakat deyiladi. $\vec{v}, \vec{a}$

Harakatlanuvchi sistemaga nisbatan nuqtaning harakatiga nisbiy harakat deyiladi. v_r, a_r

Sistemaning o'zi barcha nuqtalari bilan qo'zg'almas deb qaralgan sistemaga nisbatan harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi. $\vec{a}_R, \vec{v}_R$

Nuqta harakatlanayotgan k' va qo'zg'lmas k sistemaga nisbatan harakat qilsin.

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}' \qquad (1.92)$$

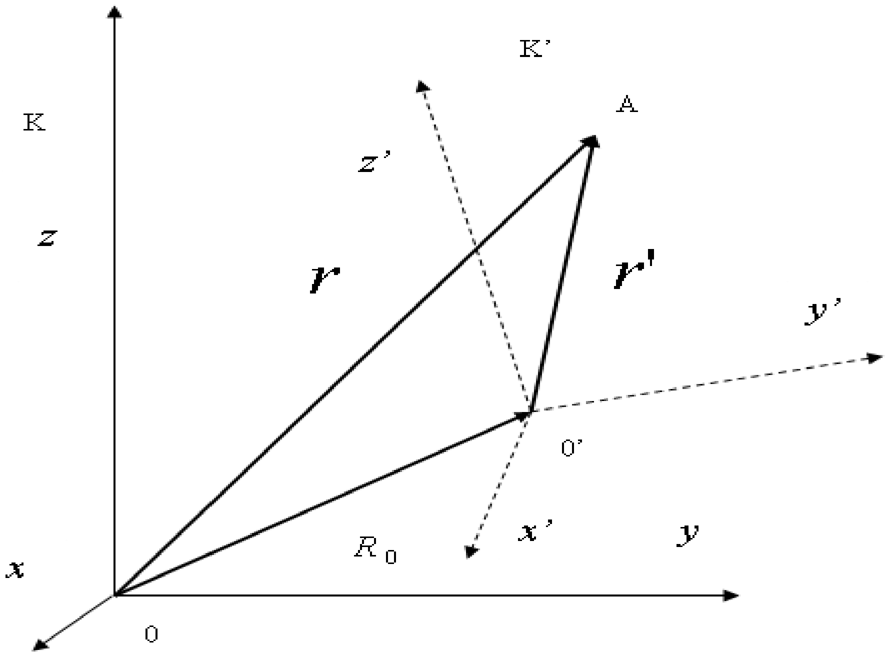
Vaqt bo'yicha hosila olsak

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_r$$

bunda

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$



Rasm 8. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati.

Nuqtaning nisbiy tezligi yoki k'sistemadagi tezligi

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$

$$\vec{v}_R = \frac{d\vec{R}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}_0'}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$\vec{R}_0 - x', y', z' - const$ o'zgarmas bo'lganda O'nuqtaning radius vektori . $\vec{r}_0$ $-$jismning massa markazini xarakterlovchi radius vektor.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_0'}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{r}_0'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{y}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)$$

Nuqtaning absolyut tezligi.

Oxirgi formuladan $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$ va x', y', z' barchasini o'zgaruvchi kattaliklar deb qarab hosila olsak absolyut tezlanish uchun quyidagini olamiz.

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_r + \vec{a}_k \qquad (1.93)$$

$\vec{a}_R -$ aylanma tezlanish (kariolis tezlanishi)

$\vec{a}_r$ −nuqtaning nisbiy tezlanishi

$$\vec{a}_k = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

Demak, murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishi uning aylanma tezlanishi, nisbiy tezlanishi va kariolis tezlanishi yig'indisiga teng.

Ma'lumki

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Aylanma harakatda yoki

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\imath}'], \quad \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\jmath}'], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}']$$

Hisobga olinsa vektor ko'paytma formulasidan foydalanilsa kariolis tezlanishi

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_r]$$

Bo'ladi uning moduli

$$\vec{a}_k = 2\omega\vec{v}_r \sin(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \qquad (1.94)$$

Demak murakkab harakatdagi nuqtaning kariolis tezlanishi qo'zg'aluvchi *Oxyz* koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi bilan nuqtaning nisbiy tezligi vektorli ko'paytmasining ikkilanganiga teng.Bu formuladan nuqtaning murakkab harakatiga oid masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Koriolis tezlanishi (1.94) ifodadan topiladi. Koriolis tezlanishi vektor kattalik bo'lgani uchun har qanday vektor singari uch elementdan: moduli, yo'nalishi va a ning qo'yilish nuqtasi aniqlangan bo'lishi kerak. Bu elementlarni aniqlashdan oldin Koriolis tezlanishining fizik ma'nosi nimadan iborat ekanligini ko'raylik.

Koriolis tezlanish murakkab harakatda A nuqta tezlanishining shunday tashkil etuvchisidirki, bu tezlanish vektori ko'chma harakatda burchakli tezlik vektorining nisbiy tezlik vektoriga bo'lgan vektor ko'paytmasiga teng. Kooriolis tezlanishi birinchidan nuqtaning nisbiy xarakatining o‘zgarishi natijasida ko‘chma tezlik modulining o‘zgarishini va ikkinchidan, ko‘chma aylanma xarakat natijasida nisbiy tezlik yo‘nalishining o‘zgarishini ifodalaydi. Koriolis tezlanishi ko‘chma aylanma harakat bilan nisbiy harakatning qo‘shilishi natijasida hosil bo‘ladi. SHuning uchun agar ko‘chma xarakat ilgarlanma harakat bo‘lsa ω=0 bo‘ladi. Demak Koriolis tezlanishi bu ko‘chma va nisbiy harakatlarning qo‘shilishidan hosil bo‘ladigan kattalik. Endi a vektorning elementlari: vektorining qo‘yilish nuqtasi, uning moduli va yo‘nalishini qanday qilib aniqlashni ko‘raylik.

1) a_{kor} ning qo‘yilish nuqtasi A nuqta.

2) a_{kor} ning moduli $a_{kor} = 2\omega v_n \sin(\omega v_n)$ formula bilan aniqlanadi.

quyidagi uch xolda $a_{kor} = 0$ bo‘ladi.

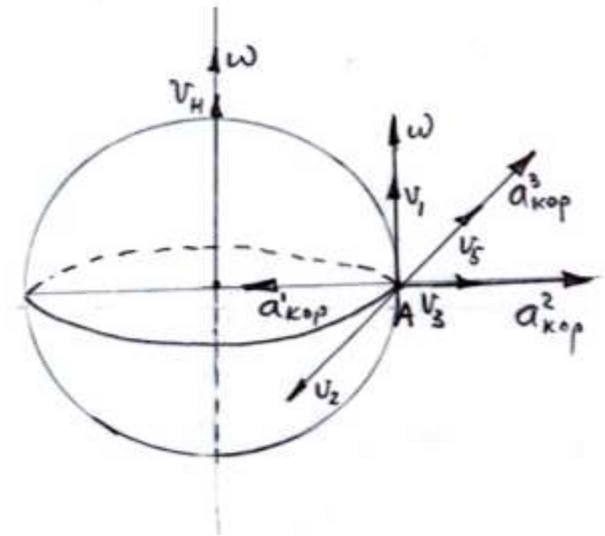
a) ya’ni OXYZ sistema ilgarlanma xarakat qilganda, yoki OXYZ sistema ω=0 bo‘lganda,

b) v_k =0 ya’ni OXYZ ga nisbatan A nuqta tinch xolatda bo‘lganda yoki tanlangan vaqtda OXYZ sistema uchun v_k =0 bo‘lganda.

c) ω va vektorlar orasidagi burchak 0 ga yoki 180˚ ga teng bo‘lganda ya’ni A nuqtaning nisbiy tezligining yo‘nalishi aylanish o‘qiga paralel bo‘lgan xollarda.

a_{kor} ning moduli ω va v_k vektorlar orasidagi burchak 90° bo‘lganda maksimal bo‘ladi. YA’ni agar A nuqtaning harakati tezligi ω vektorga perpendikulyar bo‘lsa, maksimal qiymatga ega bo‘ladi.

A nuqta v_k =0 tezlik bilan harakat qilsa, 9-rasmga asosan v_2 va v_3 tezlik bilan xarakat qilganda $a_{kor} = a^{\max}{}_{kor}$ bo‘lishini ko‘rish mumkin.



Rasm 9. Moddiy nuqtaning koriolis tezlanishi.

3) a_{kor} ning yo‘nalishi parma qoidasiga asosan topiladi. Agar parmaning dastasini ω vektoridan v_k vektoriga tomon qisqa yo‘l bilan aylantirsak, parmaning ilgarilanma xarakatini yo‘nalishi a_{kor} vektorining yo‘nalishini ko‘rsatadi. Rasmda A nuqta v_2 tezlik bilan harakat qilganida parmani ω dan v_2 ga (fikran ω ni A ga ko‘chirib) qisqa yo‘l bilan aylantirsak a_{kor} ning yo‘nilishi v_3 vektor ustiga tushgan $a^2{}_{kor}$ ekanligini ko‘rish mumkin. A nuqta v_5 tezlik bilan harakat qilganida, parma qoidasidan ko‘rinadiki, a_{kor} ning yo‘nalishi $a^3{}_{kor}$ bo‘ladi. bu vektorlarning yo‘nalishi yuqoridagi rasmda ko‘rsatilgan. Umuman a_{kor} vektor shunday yo‘nalganki, a_{kor} ning oxiridan qaraydigan kuzatuvchiga ω vektori v_k vektoriga qarab qisqa yo‘l bilan yaqinlashishi soat milining aylanish yo‘nalishiga teskari yo‘nalgan bo‘ladi. Koriolis tezlanishning xosil bo‘lishiga oid bir misol keltiramiz. Platforma ω burchak tezligi bilan O nuqtadan o‘tadigan o‘q atrofida tekis aylansin. Platformaning radiusi bo‘ylab odam M vaziyatda doimiy v tezlik bilan qarakat qilsin. Bu erda M nuqtada ko‘chma tezlik v_k M_1 nuqtada

esa $v_{k\ 1}$ bo‘ladi va $v_{k\ 1}$ =ω.OM, v_k -ko‘chma tezlikning o‘zgarishi a_{kor} ni hosil qiladi. a_{kor} vektori M nuqtada (ω vektori O nuqtadan o‘quvchiga qarab yo‘nalgan) v_k bo‘ylab M_1 nuqtada esa v_{k1} bo‘ylab yo‘nalganligini parma qoidasidan foydalanib oson topish mumkin.

Agar nuqta er sirtida harakat qilsa erning harakati ko‘chma harakat bo‘ladi. Er sirtidagi M_1 va M_2 nuqtalarga ta’sir etadigan a_{kor} vektori nuqta shimoliy sharda bo‘lganda sharq tomonga janubiy yarim sharda bo‘lganda g‘arb tomonga qarab yo‘nalgan 9-rasm. Daryolarda oqayotgan suv shimoliy yarim sharda Koriolis tezlanishiga ega bo‘lganligi tufayli sharqqa qarab oqadi. Shuning uchun daryoning qirg‘og‘i g‘arbiy qirg‘oqiga nisbatan ko‘proq emiriladi: Koriolis tezlanishi mavjud bo‘lganligi uchun erkin tushadigan jism sharqqa qarab og‘adi.

II. BOB. SAQLANISH QONUNLARI

2.1. ZARRALAR SISTEMASINING LAGRANJ FUNKSIYASI. ENERGIYANING SAQLANISH QONUNI

O‘zaro ta’sirlashuvchi zarralar sistemasini ko‘ramiz, ular boshqa jismlar bilan ta’sirlashmaydilar. Bunday sistemani yopiq sistema deb atash qabul qilingan. Zarralar aro ta’sirlarni Lagranj funksiyasiga koordinataning funksiyasini qo‘shish bilan izohlash mumkin.

O‘zaro ta’sirlashmaydigan zarralar sistemasining Lagranj funksiyasi bizga ma’lum.

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{2.1}$$

O‘zaro ta’sirlashadigan zarralar sistemasining Lagranj funksiyasini tuzishda koordinata funksiyasi kiritiladi. Chunki bo‘ladigan ta’sirlar faqat uzoqlashish masofasiga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni ta’sir xarakteriga bog‘liqdir.

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \ldots) \tag{2.2}$$

$r_i - i$ zarraning radius vektori, $-U(r_1, r_2, \ldots)$ potensial energiyasi. Potensial energiya berilgan vaqt momentidagi moddiy nuqtalarning faqat joylashishiga bog‘liq. Agar birortasining holati o‘zgarsa, bu ta’sir darhol boshqalarining joylashishiga ta’sir qiladi. Lagranj funksiyasini bilgan holda harakat tenglamasini yozishimiz mumkin.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \tag{2.3}$$

Lagranj tenglamasiga uning funksiyasini qo‘yib hisoblaymiz.

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_i}\frac{m_i v_i^2}{2} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \tag{2.5}$$

Tenglamaning bu ko‘rinishi Nyuton tenglamasi deyiladi va u o‘zaro ta’sirlashuvchi zarralar sistemasining asosini bildiradi. Oxirgi tenglamaning o‘ng tomoni $i-$ zarraga ta’sir qiluvchi kuchni anglatadi.

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \tag{2.6}$$

Bu kuch ham potensial energiya singari barcha zarralarning tezliklariga emas balki, ularning koordinatalariga bog‘liqdir. Shuningdek oxirgi tenglamalardan ko‘rinadiki zarralarning tezlanish vektorlari ham faqat koordinata funksiyalaridir.

Agar harakatni dekart koordinatasi emas, boshqa umumlashgan koordinatalar orqali berilsa quyidagicha yozamiz.

$$\begin{gathered} L = \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - U(q) \\ L = T(\dot{q}) - U(q) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Agar bitta zarraning tashqi maydondagi harakati Lagranj funksiyasida $U(r,t)$, ya’ni potensial energiya endi vaqtga ham bog‘liq bo‘lsa quyidagicha yozamiz.

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r,t) \tag{2.8}$$

Unda harakat tenglamasi

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{2.9}$$

Endi maydon bir jinsli bo‘lsa

$$\vec{F}\vec{r} = -U \tag{2.10}$$

Vaqtning bir jinsliligi tufayli yuzaga keladigan saqlanish qonunini ko‘ramiz. Shu bir jinslilikka ko‘ra yopiq sistemaning Lagranj funksiyasi vaqtga oshkora bog‘liq bo‘lmaydi. Shuning uchun Lagranj funksiyasining vaqt bo‘yicha to‘la hosilasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{2.11}$$

Agar L vaqtga yaqqol bog‘liq bo‘lganda edi o‘ng tomonda $\frac{\partial L}{\partial t}$ had qo‘shilardi. $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ hosilalarni Lagranj tenglamalariga ko‘ra $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i}$ ga almashtirilsa

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

Yoki bir xil hosilalar birlashtirilsa

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)=0$$

Bundan ko‘rinib turibdiki hosila ostidagi ifoda saqlanadi.

$$E=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{2.12}$$

Bu kattalik yopiq sistema harakati davomida o‘zgarmaydi, ya’ni u harakat integrallaridan biridir. Bu kattalik sistemaning to‘liq energiyasi deyiladi. Energiyaning additivligi Lagranj funksiyasining additivligidan kelib chiqadi.

Energiyaning saqlanish qonuni faqat yopiq sistemalar uchungina emas, balki o‘zgarmas (ya’ni vaqtga bog‘liq bo‘lmagan) tashqi maydondagi sistemalar uchun ham o‘rinlidir. Energiyalari saqlanadigan mexanikaviy sistemalarni ba’zida konservativ sistemalar deyiladi. Yopiq sistemalar Lagranj funksiyasi quyidagicha beriladi.

$$L=T(\dot{q})-U(q) \tag{2.13}$$

T - tezliklarning kvadratik funksiyasi. Bunga bir jinsli funksiyalar haqidagi tanish bo‘lgan Eyler teoremasini qo‘llasak

$$f=cx^n \qquad\qquad x\frac{\partial f}{\partial x}=nf$$

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=2a\dot{q}^2=2T$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=2T \tag{2.14}$$

Oxirgi tenglamalardan foydalanib (2.12) tenglamani yozamiz.

$$\begin{aligned} E&=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = 2T-T+U \\ E&=T(q,\dot{q})+U(q) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dekart koordinata sistemasida esa

$$E=\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}+U(r_1,r_2....) \qquad (2.16).$$

Demak sistemaga energiyasi ikkita butunlay har xil hadlar: tezlikka bog‘liq bo‘lgan had kinetik energiya va faqat zarralarning koordinatalariga qarab o‘zgaradigan potensial energiya yig‘indisi ko‘rinishida berilishi mumkin.

$$E=T(q,\dot{q})+U(q) \qquad (2.17)$$

2.2. SISTEMANING IMPULSI VA INERSIYA MARKAZI.

Fazo bir jinsli bo‘lsa yopiq sistemaning mexanik xossalari ixtiyoriy parallel ko‘chirishda o‘zgarmaydi. Zarralarning tezliklari o‘zgarmas bo‘lgan holda koordinatalarining cheksiz kichik qiymatga o‘zgarishida Lagranj funksiyasining o‘zgarishi.

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i=\varepsilon\sum \frac{\partial L}{\partial r_i} \qquad (2.18)$$

Yig‘indi barcha moddiy nuqtalar bo‘yicha boradi. Minimallik talabidan $\delta L=0$ variatsiya o‘rinli, ε ning ixtiyoriy qiymatida esa

$$\sum \frac{\partial L}{\partial r_i}=0 \qquad (2.19)$$

bo‘lishiga olib keladi. Lagranj tenglamasidan foydalanamiz.

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}=\sum \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{d}{dt}\sum \frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{d}{dt}\sum_i p_i=0$$

Demak, yopiq mexanikaviy sistemada uning impuls vektori harakat davomida o‘zgarmaydi ya’ni saqlanadi.

$$\vec{P}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}=const \qquad (2.20)$$

$$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i \qquad (2.21)$$

Energiyadan farqli ravishda sistemaning impulsi alohida zarralarning impulslarining geometrik yig‘indisidan iborat.

Tashqi maydon bo‘lmasa impulsning uchala komponentasi ham saqlanadi. Sistemaning potensial energiyasi tashqi maydon bo‘lganda ham biror koordinataga bog‘liq bo‘lmasa impulsning shu komponentasi saqlanadi.

Oldingi darsdan ma’lumki $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ i- zarrachaga ta’sir qiluvchi kuchdir F_i. Shuning uchun (2.19) formula yopiq sistemaning barcha zarralariga ta’sir qiluvchi kuchlar yig‘indisidir.

$$\sum_i F_i = 0 \tag{2.22}$$

Agar ikkita zarradan iborat sistemani qarasak $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ bo‘ladi. Birinchi zarraga ikkinchisi tomonidan ta’sir kuchi, ikkinchi zarraga birinchi zarra tomonidan ta’sir kuchiga qiymat jihatdan teng va qarama-qarshi yo‘nalgan.

Umumlashgan koordinatalarda esa quyidagichadir.

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.23}$$

Umumlashgan impuls

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.24}$$

Umumlashgan kuch.

K' sistema K sistemaga nisbatan $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlasa tezliklarni qo‘shish formulasi quyidagicha.

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$

Bu ifodani sistemaning impulsi formulasiga qo‘yamiz.

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{V} \sum_i m_i$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_i m_i \qquad \vec{P} = \vec{P}' + \mu \vec{V} \qquad \mu = \sum_i m_i \tag{2.25}$$

Xususan shunday K' sistema topiladiki unda zarralar sistemasining to‘liq impulsi nolga teng bo‘ladi $\vec{P}' = 0$. Bu hisob sistemasining tezligi quyidagicha

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \tag{2.26}$$

Aytish joizki impulsning saqlanish qonuni muvozanat holati va mexanik sistemaning tezligini aniqlash imkonini beradi. O‘z navbatida massaning additivligi haqida xulosa qilish mumkin. Oxirgi formulaning o‘ng tomonini vaqt bo‘yicha to‘liq hosila ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lganligi uchun radius vektorlariga o‘tish mumkin.

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{2.27}$$

Sistemaning tezligi $\vec{V}$ tezligi esa oxirgi formula bilan aniqlanadigan $\vec{R}$ radius-vektorli nuqtaning siljish tezligidir. Bunday nuqtaga sistemaning inersiya markazi deyiladi.

Yaxlit holatda $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan sistemaning to‘liq energiyasini yozish mumkin.

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{ich} \tag{2.28}$$

E_{ich} - ichki energiya, $\mu = \sum m_i$ sistemaning massasi.

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$ tezliklarni almashtirish qonunidan energiyani almashtirish qonunini topamiz.

$$E = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{2} + U = \frac{\mu V^2}{2} + \vec{V}\vec{P}' + E'$$

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + \vec{V}\vec{P}' + E' \tag{2.29}$$

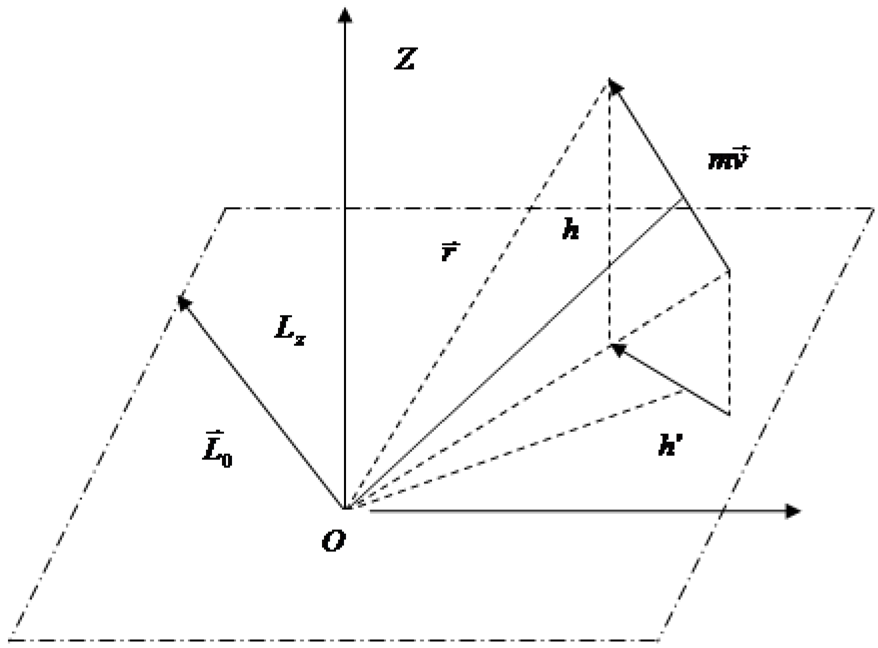
Bu zarralar sistemasi energiyasini almashtirish qonuni bo‘lib, (2.25) formula esa sistemaning impulsini almashtirish qonunidir. Agar K' sistemaning inersiya markazi qo‘zg‘almas bo‘lsa $\vec{P}' = 0$ $E = E_{ich}$ bo‘ladi.

2.3. SISTEMA IMPULS MOMENTINING SAQLANISHI.

Biror markazga nisbatan nuqtaning impuls momenti impuls vektori va markaz yotgan tekislikka perpendikulyar vektordir.Uning yo‘nalishida parma harakati o‘rinli. Nuqtaga nisbatan impuls momenti vektori va uning modulini quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad (2.30)$$

$$L_0 = mvh \quad (2.31)$$



Rasm 10. Nuqtaga nisbatan impuls momenti vektori.

Endi m massali moddiy nuqtaning berilgan $\vec{F}$ kuch ta’siridagi harakatini ko‘raylik. $\vec{r}$ va $m\vec{v}$ vektorlar o‘zgaruvchan bo‘lganligi uchun ko‘paytma hosilasidan foydalanamiz.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt}\right] \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (2.32)$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Birinchi hadning moduli nolga teng. Shuning uchun impuls momentining o‘zgarishi uchun yozish mumkin.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_0 \quad (2.33)$$

Moddiy nuqtaning biror markazga nisbatan impuls momentining vaqt bo‘yicha hosilasi shu nuqtadagi kuch momentiga teng. Biror o‘qdagi proyeksiyasi quyidagicha.

$$\frac{dL_я}{dt} = M_я \qquad (2.34)$$

Agar kuch momentining biror o‘qdagi momenti nolga teng bo‘lsa impuls momentining shu o‘qdagi proyeksiyasi saqlanadi.

Markaziy kuch ta’siridagi moddiy nuqtaning harakatini ko‘ramiz. Markaziy kuchlarni planetalarning quyosh atrofidagi harakati, yo‘ldoshlarning planetalar atrofidagi harakati, elektronlarning atomlardagi harakati misolida uchratamiz. Markaziy kuchlarda kuch momenti natijaviysi nolga teng $\vec{M}_0 = 0$ bo‘ladi. (2.33) formuladan bu nuqtaning impuls momenti doimiy bo‘ladi $\vec{L}_0 = const$. Vektor ko‘paytmaning qoidasiga ko‘ra $\vec{r}$ va $m\vec{v}$ vektorlar doimo bir tekislikda yotadi. Impuls momentining moduli ham doimiy qoladi.

$L_0 = mvh = const$ jismning massasi doimiy qaralganligi uchun keyingi ko‘paytma doimiy bo‘lishi yetarli.

$$vh = const \qquad (2.35)$$

Nuqta harakatda element qaralsa sektor yuzasi quyidagicha.

$$dS = \frac{1}{2}hdr = \frac{1}{2}hvdt$$

Oldingi teglikka ko‘ra $vh = 2\frac{dS}{dt} = const$, ya’ni $\frac{dS}{dt} = const$ sektorial tezlik saqlanadi. Teng vaqtlarda radius vektor teng yuzalar chizadi. Bu qonun I.Kepler tomonidan ochilgan (1571-1630).

Sistemaning biror O markazga nisbatan impuls momenti uning tarkibiy nuqtalarining impuls momentlarining geometrik yig‘indisidan iborat va shu markazga nisbatan bosh impuls momenti deyiladi.

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{l}_{ok} \qquad (2.36)$$

Sistemaning biror o‘qga nisbatan impuls momenti uning tarkibiy nuqtalarining o‘qdagi impuls momentlarining geometrik yig‘indisidan iborat va shu o‘qga nisbatan bosh impuls momenti deyiladi.

$$\vec{L}_z = \sum \vec{l}_{zk} \tag{2.37}$$

Jismning barcha nuqtalari o‘qga perpendikulyar tekisliklarda harakatlanadi.

$$\vec{l}_{zk} = m_k \vec{v}_k \vec{r}_k = m_k \vec{r}_k^{\,2} \omega$$

$$\vec{L}_k = \sum \vec{l}_{zk} = \sum m_k r_k^{\,2} \omega = \omega \sum m_k r_k^{\,2} = \vec{J}_z \omega$$

$$\vec{L}_z = \vec{J}_z \omega \tag{2.38}$$

Ichki kuchlarning ixtiyoriy markazga nisbatan bosh momenti doim nolga teng. Shuning uchun impuls momentining o‘zgarishi tashqi kuchlarning bosh momentiga teng.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 \tag{2.39}$$

Agar sistemaga ta’sir qiluvchi tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo‘lsa sistema impuls momenti va uning moduli o‘zgarmaydi.

$$\vec{L}_z = \sum m_k [\vec{r}_k, \vec{v}_k] = const \tag{2.40}$$

Bu holat tashqi kuchlar bo‘lmaganda yoki ular aylanish o‘qiga parallel bo‘lgan holda bajariladi. Impuls momentining saqlanishi qonunidan ko‘rinadiki, tashqi kuchlar bo‘lmaganda sistemaning ichki kuchlari impuls momentini o‘zgartira olmaydi.

Impuls momentini saqlanishini N.E.Jukovskiyning «stuli» tajribasida ko‘rish mumkin. Platforma gorizontal bo‘lib, vertikal o‘q atrofida podshipniklarda aylanadi. Bunda yelkani o‘zgartirib tezlikni oshirish yoki kamaytirish mumkin.

III. BOB HARAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH

3.1. BIR O‘LCHOVLI HARAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH

Ixtiyoriy koordinatalar sistemasidagi harakat uchun Eyler-Lagranj tenglamasini tahlil qilish yetarlidir.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{3.1}$$

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i \tag{3.2}$$

Ushbu (3.1) ko‘rinishdagi Eyler-Lagranj tenglamasi ixtiyoriy koordinatalar sistemasida ifodalanuvchi barcha hollar uchun o‘rinli. Masalani soddalashtirish maqsadida dastlab, faqat bir o‘lchovli harakatlanuvchi moddiy nuqtaning harakat tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bir o‘lchovli sistema uchun (3.1) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3.3}$$

Bu holda Lagranj funksiyasi $L = L(x, \dot{x})$ ko‘rinishda.

Buni Nyutonning ikkinchi qonuni bilan taqqoslasak,

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = F_x; \qquad \frac{d}{dt} p_x = F_x \tag{3.4}$$

(3.3) va (3.4) tenglamani taqqoslash shuni ko‘rsatadiki, ular ayni bir moddiy nuqtaning harakat tenglamasini xarakterlashi uchun quyidagi shartlarni bajarishi kerak.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \tag{3.5}$$

$$p_x = mv_x = m\dot{x} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad L_1(\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \tag{3.7}$$

Ikkinchi tomondan kuch uchun quyidagicha ifodani olamiz.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad L_2(x) = -U(x) \qquad (3.8$$

Yuqoridagi munosabatlardan ko‘rinib turibdiki bu holda Lagranj funksiyasini uning additivlik xossasidan foydalanib quyidagi ikki hadning yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin.

$$L(x,\dot{x}) = L_1(\dot{x}) + L_2(x)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{3.9}$$

Bu munosabat bir o‘lchovli harakat holi uchun moddiy nuqtaning klassik Lagranj funksiyasidir. Demak, ixtiyoriy uch o‘lchovli harakatga qatnashuvchi moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasini uning kinetik va potensial energiyalarining ayirmasi sifatida ifodalash mumkin.

$$L = T - U \tag{3.10}$$

Lagranj funksiyasini Dekart koordinatalar sistemasi uchun quyidagicha ifodalash mumkin

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z) \tag{3.11}$$

Demak, olingan natijalardan foydalanib Eyler-Lagranj tenglamasini quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = F \tag{3.12}$$

Demak, bir o‘lchovli harakat tenglamasini integrallash uchun ya’ni, uning ixtiyoriy vaqt momentidagi koordinatasini aniqlash uchun (3.12) harakat tenglamasini yechish lozim.

Xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

1) Jismga hech qanday kuch ta’sir qilmasin. $F = m\ddot{x} = 0$ bu holda jism tezlanishi nolga teng bo‘lib $\frac{d}{dt}\dot{x} = 0$, jism tezligi o‘zgarmaydi va uning harakat tenglamasi quyidagicha. $v = \frac{dx}{dt} = const$.

$x(t) - x_0 = vt$ $\qquad$ $x(t) = x_0 + vt$

2) $m\ddot{x} = F = const$. Bu holda jismning tezlanishi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi. Boshqacha aytganda jism tekis o‘zgaruvchan harakat qiladi.

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a \qquad d\dot{x} = a\,dt \qquad v = v_0 + at$

$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Bir o‘lchovli harakat tenglamasini umumiy holda integrallash imkoni yo‘q. Chunki moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuch uning koordinatasiga, tezligiga va vaqtdan bog‘liq. Bu fikrni tushuntirish uchun quyidagi misollarni ko‘rib chiqamiz.

1.

$$F = -kx \qquad k > 0$$

$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{x} = -kx \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

bu tenglama garmonik tebranishlarni tavsiflaydi.

2.

$$F = -kx - R\dot{x} \qquad k, R > 0$$

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0$$

Berilgan kuchning ifodasidagi birinchi had qaytaruvchi, ikkinchi had qarshilik kuchi. Qarshilik kuchi moddiy nuqta bilan u harakatlanayotgan muhit orasidagi qarshilikni inobatga oladi. Qarshilik kuchi doimo tezlikka qarama-qarshi yo‘naladi. Bu tenglama so‘nuvchi tebranishlarni ifodalaydi, ya’ni vaqt o‘tishi bilan so‘nuvchi erkin tebranishlarni tavsiflaydi.

3. $F(x, \dot{x}, t) = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t$

Bu munosabatda tenglikning o‘ng tomonidagi uchinchi had davriy ravishda ta’sir etuvchi majburiy kuch ifodasidir. Bu yerda dastlabki ikki had $k = o, R = 0$ bo‘lsa jism bu kuch ta’sirida quyidagi qonuniyat bo‘yicha o‘zgaruvchi tezlanishga ega bo‘ladi:

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos\omega t$$

Shunday qilib, oxirgi holda tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F_0 \cos\omega t$$

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan uchala holda bir o‘lchovli harakat tenglamalarini aniq yechish mumkin.

Masala

Masala. Agar $E=0$ bo‘lsa, zarraning $U(x)=-Ax^4$ maydondagi harakat qonuni topilsin.

Bizga ma’lumki energiyaning saqlanish qonunini bir o‘lchovli harakat uchun quyidagicha ifodalash mumkin

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)$$

Masala shartiga ko‘ra $E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=0$ bundan $\frac{m\dot{x}^2}{2}=-U(x)$

Demak zarra $U(x)<0$ sohadagina harakatlana olar ekan.

$$\dot{x}^2=-\frac{2}{m}U(x); \qquad \dot{x}^2=\frac{2A}{m}x^4 \quad \dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2, \qquad \frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2$$

$$\frac{dx}{x^2}=\pm\sqrt{\frac{2A}{m}}dt \qquad -\frac{1}{x}=\pm\sqrt{\frac{2A}{m}}t; \qquad x=\mp\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{t}$$

Oxirgi tenglama zarraning berilgan potensial maydondagi harakat qonunini ifodalaydi.

Mustaqil ish. Quyidagi potensiallar uchun harakat qonuni topilsin.

a) $U(x)=-A\sin^2 x$ b) $U(x)=-B\cos^2 x$

v) $U(x)=-C(1+\cos x)^2$ g) $U(x)=-D(1-\sin x)^2$

3.2. AYRIM XUSUSIY HOLLARDAGI HARAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH

Bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan sistema bir o‘lchovli sistema deyiladi. Bunga $U(x)$ potensial maydondagi harakatni, yassi matematik mayatnikni misol keltirish mumkin. Bir o‘lchamli harakat tenglamasi umumiy ko‘rinishdagi to‘la yechimga ega ya’ni, tegishli harakat tenglamasini berilgan boshlang‘ich shartlarda ishlab, zarraning harakati to‘liq aniqlanishi mumkin. Buning uchun energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish maqsadga muvofiq. Bir o‘lchovli harakat uchun Lagranj funksiyasini yozamiz.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{3.13}$$

To‘liq energiyasi quyidagicha.

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \tag{3.14}$$

Bu birinchi tartibli differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajratilib integrallanadi.

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)} \tag{3.15}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)}$$

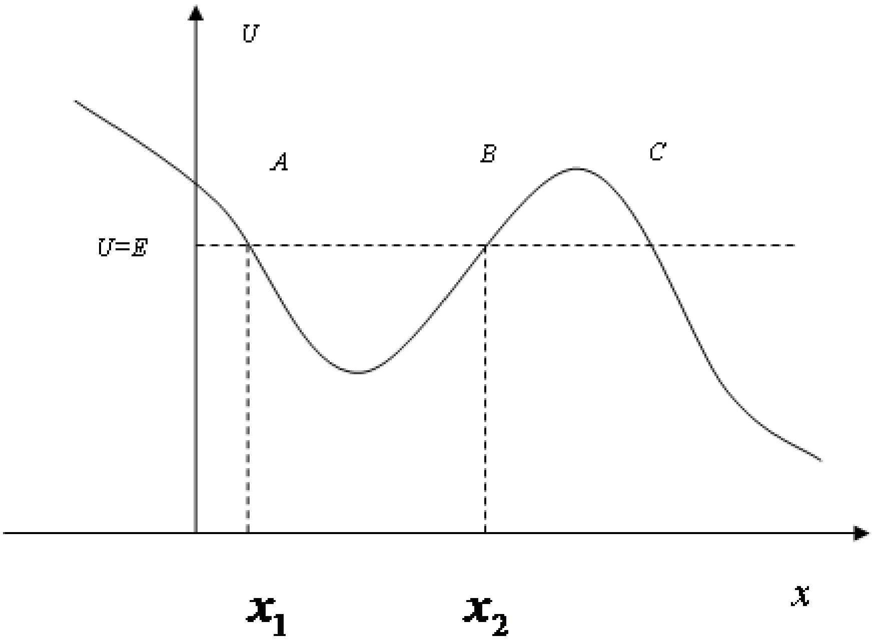
Vaqt uchun quyidagi munosabatlarni olamiz.

$$dx = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)}dt \qquad\qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}} + const = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \tag{3.16}$$

Tenglamada to‘liq energiya doimiy ixtiyoriy qiymatda bo‘lishi mumkin. Kinetik energiya har doim musbat kattalik, shuning uchun to‘liq energiya har doim potensial energiyadan katta bo‘ladi. $E > U(x)$ bo‘lganda harakat mavjud bo‘ladi.

Bizga $U(x)$ potensial energiyaning quyidagi ko‘rinishi berilgan bo‘lsin (10-rasm). To‘liq energiyaning berilgan qiymati bo‘yicha gorizontal to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Harakat rasmdagi AB sohada yoki C dan o‘ngda mavjud bo‘lishi mumkin. $U(x) = E$ tenglik harakatning chegaralarini aniqlaydi. Bu nuqtalarda tezlik nolga aylanadi, shuning uchun to‘xtash nuqtalari deyiladi. Agar harakat sohasi ikkita to‘xtash nuqtalari bilan chegaralangan bo‘lsa, bunday harakatga finit harakat deyiladi. Agar harakat sohasi chegaralanmagan yoki bir tomondan chegaralangan bo‘lsa, infinit harakat deyiladi va zarra cheksizlikka ketadi. Bir o‘lchovli finit harakat tebranma harakatdir. Zarra davriy takrorlanuvchi harakat qiladi (AB potensial o‘rada).



Rasm 10. Ixtiyoriy potensial funksiyasi.

Bunda x_1 dan x_2 gacha harakatning vaqti x_2 dan x_1 gacha bo‘lgan vaqtga teng. Demak tebranishning davri x_1 - x_2 kesmani o‘tishga ketgan vaqtning ikkilanganiga teng.

$$T = 2t = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{3.17}$$

Formuladagi x_1 va x_2 energiyaning berilgan qiymatida $U(x) = E$ tenglamaning ildizlari hisoblanadi.

Erkin tebranish ma’lumki quyidagi differensial tenglama bilan aniqlanadi.

$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tavsifiy tenglamasi tuzib ishlanganda quyidagi yechimga kelamiz.

$S^2 + \omega^2 = 0 \qquad \mathrm{S} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

$\mathrm{C}_1 = a\sin\alpha \qquad \mathrm{C}_2 = a\cos\alpha$

$x = a\sin(\omega t + \alpha)$

Berilgan chastota bilan davriy tebranma harakat qiluvchi sistemaga ossillyator deyiladi. Ampliduda va faza integrallashning ixtiyoriy doimiylari bo‘lib boshlang‘ich shartlardan topiladi.

3.3. IKKI JISM MASALASI. KELTIRILGAN MASSA.

Moddiy nuqtalar sistemasining dinamik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda umumlashtirilishi mumkin.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{3.18}$$

Bunda $\sum \vec{F}_i$ - tashqi kuchlarning, $\sum \vec{f}_i$ - esa ichki kuchlarning teng ta’sir etuvchisidir. Agar bu kuchlarni ixtiyoriy deb qaralsa (3.6) tenglamaning uch va undan ortiq moddiy nuqtalardan iborat sistemalar uchun aniq yechimlari topilmagan. Shuning uchun ikkita moddiy nuqtadan iborat sistema uchun yechimni topib va shu asosda xulosalar qilish ahamiyati kattadir. Bu yechim bitta moddiy nuqtaning dinamikasiga olib keladi. Ikki jism masalasining yechimi, koinot mexanikasida (planetalar va ularning yo‘ldoshlarining Quyosh sistemasidagi harakati), statik fizikada (zarralar to‘qnashuvi) va boshqa sohalarda ishlatiladi.

O‘zaro ta’sirlashuvchi ikkita moddiy nuqtadan iborat berk sistema harakati haqidagi masala ikki jism masalasi deyiladi. Bunda o‘zaro ta’sirlashuvchi ikkita zarradan faqat ichki kuchlar ta’siridagi harakati o‘rganiladi. Ikki jism masalasi nazariy jihatdan umumiy yechimga ega bo‘lib, amaliy jihatdan juda ko‘p qo‘llanishlarga ega. Uning yechimlari yo‘ldoshlar harakati, zarralarning to‘qnashuvi va sochilish nazariyalarida yotadi. Bu masalaning yechimlarini qaraganimizda sistema harakatini uning inersiya markazining harakati va nuqtaning shu markazga nisbatan harakatiga e’tiborimizni qaratamiz. Bizga ma’lumki, mexanik sistema harakatini ikki qismga sistemaning bir butun holdagi harakati va sistema zarralarining bir-biriga nisbatan harakatiga ajratish mumkin. Shuning uchun mexanik sistema harakatini o‘rganishda qo‘zg‘almas va qo‘zg‘aluvchan inersial sanoq sistemalarini qaraladi.

O‘zaro ta’sirlashuvchi ikkita moddiy nuqtadan iborat sistemani ko‘ramiz. Biz bilamizki inersiya markazi to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi. Nuqtalar massalari m_1 va m_2, mos ravishda radius-vektorlari $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ (11-rasm). Ular orasidagi masofa vektori $\vec{r}$. Zarralar sistemasining inersiya markaziga yo‘nalgan vektor $\vec{r}_c$.

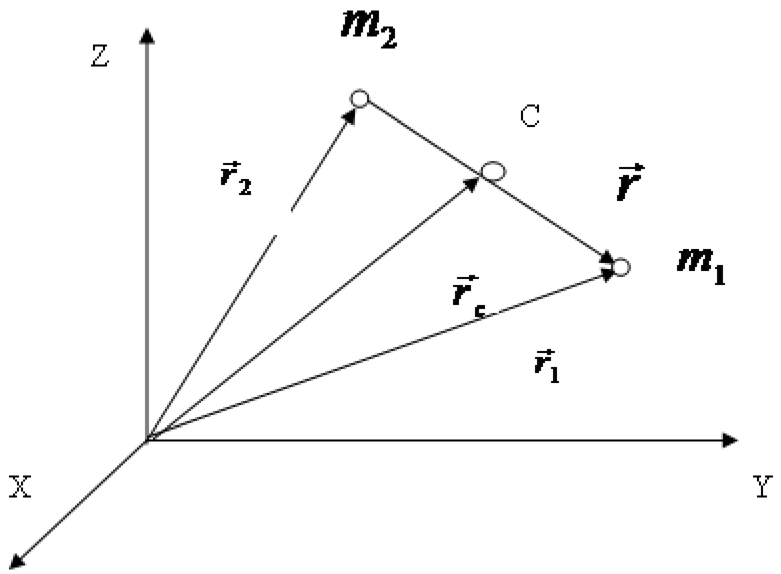
Agar koordinata boshini inersiya markaziga (massa markaziga) siljitsak massa momenti

$$\mu\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i = 0$$ bo‘ladi $i = 2$ bo‘lganligi uchun

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \tag{3.19}$$

Bundan tashqari chizmadan umumiy holda

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 \tag{3.20}$$



Rasm 11. Ikki moddiy nuqtadan iborat sistema.

Yuqoridagi (3.19) va (3.20) formulalardan $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ larni faqat $\vec{r}$ orqali ifodalarini topamiz.

$$m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2\vec{r}_2 = 0 \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{3.21}$$

Shuningdek (3.8) formuladan foydalanamiz.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{3.22}$$

Endi harakatni ifodalovchi Lagranj funksiyasini uning additivlik xususiyatidan foydalanib dekart koordinatalar sistemasida yozamiz.

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{3.23}$$

Potensial energiya zarralar orasidagi ta'sirdan iborat va ular orasidagi masofaga bog'liqdir. Yuqoridagi (3.21) va (3.22) ifodalarni (3.23) tenglamaga qo'yamiz.

$$L = \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2}\left(\frac{m_1 m_2{}^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1{}^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right) - U(\vec{r})$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) \tag{3.24}$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.25}$$

Lagranj funksiyasidagi m keltirilgan massa deyiladi. Demak ikki jism masalasi keltirilgan massa yordamida bitta moddiy nuqtaning masalasiga keltirildi. Erkin sistema uchun harakat tenglamasini yozish mumkin

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{3.26}$$

Harakat tenglamasining yechimlarida m - keltirilgan massa, $\vec{r}$ esa moddiy nuqtalar orasidagi masofa ekanligi inobatga olinadi. Shuning uchun (3.26) tenglama integrallangandan keyin haqiqiy m_1 va m_2 hamda radius-vektorlari $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ larga o'tiladi.

Ikkita nuqtadan iborat yopiq sistemaning energiyasi Lagranj funksiyasidan kelib chiqadi.

$$E = \frac{m\vartheta^2}{2} + U(\vec{r}) \tag{3.27}$$

Agar $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorlar vaqt mobaynida o‘zgarsa tezliklarni ifodalash mumkin.

$$\vec{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t) \qquad \vec{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t)$$

$$\vec{\vartheta}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\vartheta} \qquad \vec{\vartheta}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{\vartheta} \tag{3.28}$$

Xususiy holda $m_1 = m_2 = m_0$ bo‘lsa quyidagi o‘zgarishlar bo‘ladi.

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_0}{2}$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = \frac{\vec{r}}{2} \qquad \vec{\vartheta}_1 = -\vec{\vartheta}_2 = \frac{\vec{\vartheta}}{2}$$

3.4. ZARRANING MARKAZIY MAYDONDAGI HARAKATI

Markaziy maydon deb shunday maydonga aytiladiki, bunda zarrachaga ta’sir qiluvchi kuchning moduli yo‘nalishga bog‘liq emas va faqat u zarraning ushbu maydonini hosil qiluvchi markazdan uzoqlik masofasigagina bog‘liq. Bunday xususiyatga ega bo‘lgan maydonlarga gravitasion o‘zaro ta’sir va Kulon o‘zaro ta’sir potensiallarini misol keltirish mumkin. Chunki, ikkala potensial ham zarralar orasidagi masofaga teskari proporsional. Zarrachaga ta’sir qiluvchi kuch ham absolyut qiymat jihatdan $\vec{r}$ ga bog‘liq va har bir nuqtada radius - vektor bo‘ylab yo‘naladi.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Markaziy maydonda sistemaning impuls momenti saqlanadi. Bitta zarra uchun

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}] = const. \tag{3.29}$$

$\vec{M}$ va $\vec{r}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lganligi uchun $\vec{M}$ vektorning doimiyligi radius–vektorning har doim bir tekislikda qolishini anglatadi. Shuning uchun zarraning harakat trayektoriyasi markaziy maydonda to‘laligicha bir tekislikda yotadi. Bunda Lagranj funksiyasining qutb koordinatalar sistemasidagi ko‘rinishidan foydalanish qulaydir.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \qquad (3.30)$$

Ma’lumki qutb koordinatalar sistemasi uchun quyidagini yozish mumkin.

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lagranj funksiyasida φ oshkora ko‘rinishda ishtirok etmaydi. Ixtiyoriy q_i umumlashgan koordinatalar lagranj funksiyasida oshkora ko‘rinishda ishtirok etmasa ular siklli koordinatalar deyiladi.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Siklli koordinata bo‘yicha umumlashgan impuls $P_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$

$$P_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \qquad (3.31)$$

Sektorial $\dot{\vec{\sigma}}$ tezlikning aniqlanishidan ma’lumki $\vec{M}_z$ impuls momenti bilan quyidagicha bog‘lanishga ega.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\dot{\vec{\sigma}}$$

$$\vec{M}_z = 2m\dot{\vec{\sigma}} = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi} \qquad (3.32)$$

Demak φ bo‘yicha umumlashgan impuls z bo‘yicha impuls momentiga teng ekan. Impuls momentining saqlanishi sektorial tezlikning doimiyligini talab qiladi. Harakatlanuvchi nuqtaning radius –vektori teng vaqtlarda teng yuzalarni o‘tadi.

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2} \tag{3.33}$$

Endi markaziy maydondagi zarraning harakatini to‘liq yechimini energiya va impuls saqlanish qonunlaridan topish mumkin. To‘liq energiyani (3.33) formuladan foydalanib yozamiz.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{M_z^{\,2}}{m^2r^4}\right) + U(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^{\,2}}{2mr^2} + U(r) \tag{3.34}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{3.35}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const \tag{3.36}$$

Yuqoridagi (3.33) formuladan buralish burchagi uchun ifoda keltirib chiqarish mumkin.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_z}{mr^2}$$
$$d\varphi = \frac{M_z}{mr^2}dt \tag{3.37}$$

dt ning ifodasini (3.35) ifodasidan foydalanib buralish burchagini topish mumkin.

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \tag{3.38}$$

Qo‘yilgan masalani (3.36) va (3.37) formulalar to‘liq aniqlaydi. Radius va burilish burchagi orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi (3.38) formulaga trayektoriya tenglamasi deyish mumkin. Markaziy maydonda zarraning radius-vektorini vaqt bo‘yicha o‘zgarishini (3.36) formuladan aniqlash mumkin. Ta’kidlash kerakki (3.37) formuladan ko‘rinadiki φ burchak vaqt bo‘yicha monoton o‘zgaradi va $\dot{\varphi}$ ishorasini o‘zgartirmaydi.

«Effektiv» potensial energiyaga ega bo‘lgan maydonda harakatni (3.34) ifodadan bir o‘lchovli qarash mumkin bo‘ladi.

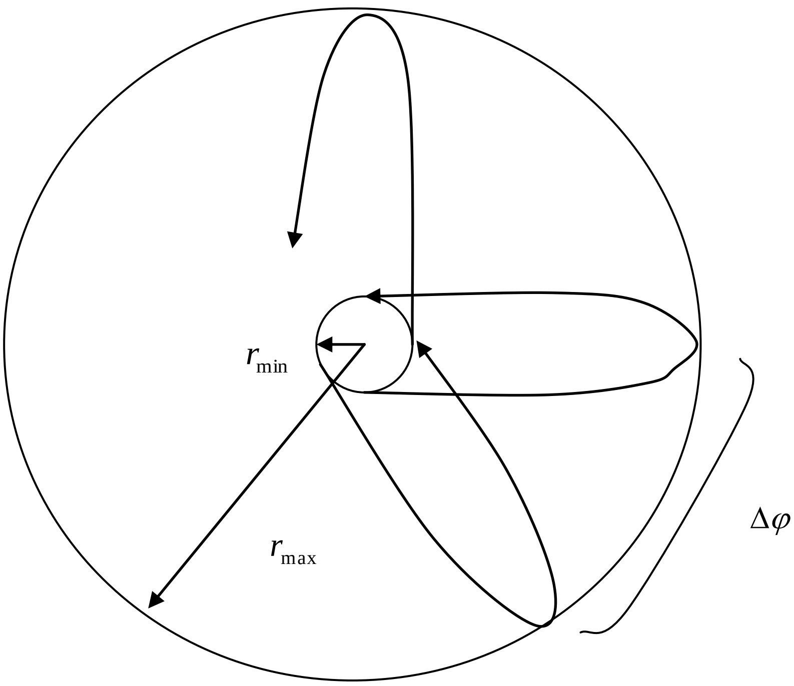
$$U_{eff} = \frac{M_z^{\,2}}{2mr^2} + U(r) \tag{3.39}$$

Birinchi hadga markazga intilma energiya deyiladi. Demak

$$E_m = \frac{M_z^{\,2}}{2mr^2} \tag{3.40}$$

Tenglamani qanoatlantiruvchi radius vektorning qiymatlari markazga nisbatan harakatlanish sohasining chegarasini aniqlaydi. Bu chegaralarda $\dot{r} = 0$ bo‘ladi, ammo undagi zarra to‘xtamaydi chunki burchak tezlik $\dot{\varphi} \neq 0$ bo‘ladi. Shuning uchun $\dot{r} = 0$ trayektoriyaning buralish nuqtalarini bildiradi.

Agar r ning ruxsat sohasi faqat $r \geq r_{\min}$ shart bilan chegaralangan bo‘lsa zarraning harakati infinit bo‘ladi va zarraning trayektoriyasi cheksizlikdan kelib cheksizlikka ketadi.



Rasm 12. Zarraning markaziy maydondagi harakat traektoriyasi.

Agar r ning o‘zgarish sohasi ikki chegara $r_{\min}$ va $r_{\max}$ ega bo‘lsa harakat finit bo‘lib trayektoriya to‘laligicha halqaning ichida yotadi (12-rasm). Trayektoriya ikkita maksimumga ega bo‘lishda $\Delta\varphi$ burchakka buriladi.

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} \tag{3.41}$$

3.5. MARKAZIY MAYDONDAGI HARAKAT TENGLAMASINI INTEGRALLASH.

Finit harakatda trayektoriyaning yopiqligi $\Delta\varphi$ burchakning 2π ning ratsional qismi bo‘lishiga bog‘liq. Ixtiyoriy $U(r)$ uchun umumiy holda finit harakatning trayektoriyasi yopiq bo‘lmaydi.

Finit harakat trayektoriyasi yopiq bo‘lgan ikki turdagi markaziy maydonlar mavjud. Bular: zarraning potensial energiyasi $\frac{1}{r}$ va r^2 ga proporsional bo‘lgan maydonlardir. Potensial energiya r ga proporsional va o‘z navbatida bu maydonda zarraga ta’sir qiluvchi kuch r^2 ga teskari proporsionaldir. Bunga Nyutonning tortishish maydoni Kulon elektrostatik maydonlari kiradi. Birinchi maydon uchun tortishish xarakterli bo‘lsa ikkinchisida ham tortishish, ham itarish maydonlari xarakterli.

Avval tortishish maydonidagi harakatni ko‘ramiz.

$$U(\vec{r}) = -\frac{\gamma}{r} \tag{3.42}$$

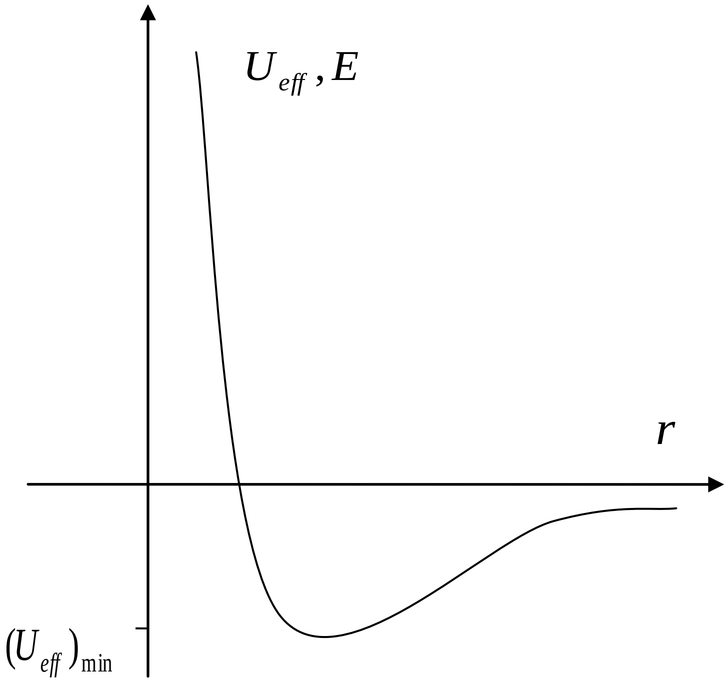
γ -musbat doimiy.

«Effektiv» potensial energiyaning ifodasidan foydalanamiz.

$$U_{eff} = \frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r} \tag{3.43}$$

Unda $r \to 0$ $U_{eff} \to +\infty$ aylanadi, $r \to \infty$ U_{eff} nolga manfiy qiymatlar tomonidan intiladi. Minimum qiymatni topish uchun potensial energiyadan radius vektor bo‘yicha hosila hisoblab nolga tenglashtiramiz va $r = \frac{M^2}{m\gamma}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

$$\left(U_{eff}\right)_{\min} = -\frac{\gamma^2 m}{2M^2} \tag{3.44}$$



Rasm 13. Markaziy maydonda energiyaning uzoqlashish masofasiga bog‘liqligi.

Rasmdan ko‘rinadiki $E \geq 0$ holda zarraning harakati infinit, $E < 0$ da harakat finit bo‘ladi. Markaziy maydonda burilish burchagining aniqlanishi potensial energiya qiymatini qo‘yamiz.

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\gamma}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{3.45}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$\eta = \frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}; \qquad \alpha^2 = 2mE + \frac{m^2\gamma^2}{M^2};$$

$$\varphi = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\eta}{\alpha} + const \tag{3.46}$$

Hisob boshini boshlang‘ich burchak uchun $const = 0$ tanlaymiz va quyidagicha belgilashlarni kiritamiz.

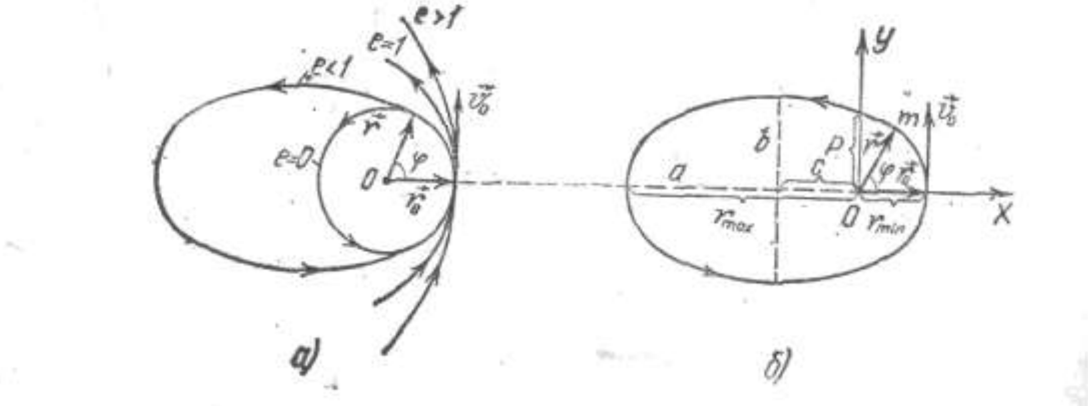
$$P = \frac{M^2}{m\gamma}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\gamma^2}} \tag{3.47}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\left(\frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}\right)\frac{M}{m\gamma}}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\gamma^2}}} = \arccos\frac{\frac{P}{r} - 1}{e}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{P}{r} - 1}{e}$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi} \tag{3.48}$$

Bu munosabat 2-tartibli egri chiziqning tenglamasi bo‘lib, konusiy kesimning fokal tenglamasi deyiladi. P -fokal parametr; e-nisbiy ekstsentrisitet.



Rasm 14. Zarraning gravitatsion maydondagi harakati.

Kiritilgan belgilashdan ko‘rinadiki (3.47) $E<0$ da ekstsentrisitet $e<1$, harakat orbitasi ellipsdan iborat (14 a-rasm) bo‘lib, harakat finit bo‘ladi.

Analitik geometriyadan ma’lumki konusiviy kesim ekstsentrisitet kattaligiga bog‘liq holda har xil giperbola $(e>1)$, parabola $e=1$ ellips $e<1$ yoki aylana $e=0$ bo‘lishi mumkin.

Ellipsning katta va kichik yarim o‘qlari uchun analitik geometriyadan quyidagilar ma’lum.

$$a=\frac{P}{1-e^2} \qquad b=\frac{P}{\sqrt{1-e^2}} \tag{3.49}$$

$$a=\frac{\gamma}{2|\mathrm{E}|} \qquad b=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{3.50}$$

$e=0$ da eng kichik energiyaga mos keladi. (3.47) formuladan topish mumkin.

$$E=-\frac{\gamma^2 m}{2M^2}=\left(U_{eff}\right)_{\min} \tag{3.51}$$

Kulon maydonidagi potensial uchun ko‘rsak, ya’ni $U=\frac{\alpha}{r}$ maydonda energiyani tahlil qilganda infinit harakatni ko‘ramiz.

$$U_{eff}=\frac{M_z{}^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r} \tag{3.52}$$

Unda $r\to\infty$ $E>0$ infinit harakat va nolga musbat qiymatlar tomonidan intiladi. Harakat trayektoriyasi giperboladan iborat bo‘lib, yadro maydonida sochilish mexanizmini tushuntirishda qo‘llaniladi. Giperbolaning fokusi sochuvchi yadro holatiga mos keladi.

$$\frac{P}{r}=1+e\cos\varphi \tag{3.53}$$

Markazgacha minimal masofa quyidagicha.

$$r_{\min}=\frac{P}{e+1}=a(e-1) \tag{3.54}$$

3.6. KEPLER MASALASI.

Gravitatsion maydon ta’siridagi osmon jismlarining harakatini o‘rganishda oldingi mavzularda olingan natijalardan foydalanamiz. Zarraning to‘liq energiyasi «effektiv» potensial energiyaga teng bo‘ladigan hollardagi radius vektori qiymatlari jismning harakat sohasi chegaralarini aniqlaydi.

$$E = U_{eff} = \frac{M_z^{\ 2}}{2mr^2} + U(r) \tag{3.55}$$

Ellips uchun $e = \frac{c}{a}$ doim musbatdir, c- ellips markazidan a katta yarim o‘qdagi fokus masofasigacha bo‘lgan masofa. Ta’kidlash lozimki ellipsning katta yarim o‘qi faqat jismning energiyasiga bog‘liq (impuls momentiga bog‘liq emas). Maydonning markazidan (ellips fokusidan) eng yaqin va uzoq masofalar quyidagi formulalardan topiladi.

$$r_{\min} = \frac{P}{1+e} = a(1-e) \qquad r_{\max} = \frac{P}{1-e} = a(1+e) \tag{3.56}$$

Kuch markazidan biror masofada bo‘lgan jismning boshlang‘ich tezligi va trayektoriya shakli orasidagi munosabatni tasvirlash uchun quyidagi jadvalni keltiramiz.

Jadval-1

e ellips ekssentrisiteti	Traektoriya shakli	Jism energiyasi, E	Boshlang‘ich tezlik v_0
$e = 0$	Aylana	$E = (U_{eff})_{\min}$	$v_0 = v_1$
$0 < e < 1$	Ellips	$(U_{eff})_{\min} < E < 0$	$v_1 < v_0 < v_2$
$e = 1$	Parabola	$E = 0$	$v_0 = v_2$
$e > 1$	Giperbola	$E > 0$	$v_0 > v_1$

Jadvaldagi v_1 va v_2 mos ravishda birinchi va ikkinchi kosmik tezliklardir. Ellipsning orbita bo‘ylab harakat vaqtini impuls momentining saqlanishidan topish qulay.

$$M = 2m\sigma = 2m\dot{S}$$

$$\int_0^T Mdt = 2m\int_0^S dS \qquad\qquad T = \frac{2mS}{M}$$

Bunda S radius vektor bo‘yagan sektorning yuzasi bo‘lib, bir davrda ellipsning yuzasiga teng bo‘ladi. Ellipsning katta va kichik yarim o‘qlari uchun (3.50) formuladan foydalanamiz.

$$a = \frac{\gamma}{2|\mathrm{E}|} \qquad\qquad b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$T = \frac{2m\pi ab}{M}$$

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\gamma}}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{m}{\gamma} \tag{3.57}$$

Markaziy maydondagi harakat formulalaridan kelib chiqib Keplerning uchta qonunini izohlashimiz mumkin.

1-qonun. Kuyosh sistemasining har bir planetasi doimiy sektorial tezlik bilan yassi harakat qiladi.

Buni impuls momentining markaziy maydonlarda saqlanishidan ko‘ramiz, ya’ni teng vaqtlarda teng yuzalar o‘tiladi.

$$M = 2m\sigma = 2m\dot{S} = const$$

2-qonun. Barcha planetalar orbitalari ellipsdan iborat bo‘lib ularning umumiy fokuslarida Quyosh joylashadi.

Buni ikkinchi tartibli egri chiziq formulasidan ko‘ramiz (3.48).

3-qonun. Planetalarning aylanish davrlarining kvadratlari elliptik orbitalarining katta yarim o‘qlarining kubiga proporsionaldir.

Buni (3.57) formuladan ko‘ramiz.

Agar sun’iy yo‘ldosh orbitaga chiqqan bo‘lsa unga atmosfera ta’sir qilmaydi, faqat tortishish kuchi ta’sirida harakatlanadi.

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Yerni bir jinsli aylanmaydigan R radiusli shar deb qaraymiz va tortishish kuchi $F = ma_n \qquad a_\tau = 0$.

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma_n \qquad\qquad GM = a_n r^2$$

Jism Yer sirtida bo‘lsa $GM = a_n r^2 = gR^2$ doimiy hisoblanadi.

$$a_n r^2 = gR^2 \qquad\qquad a_n = g\frac{R^2}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{g\frac{R^2}{r}}$$

Sun’iy yo‘ldosh Yer sirtidan uchirilsa $r = R = 6400km$ va aylana orbitaga chiqarish uchun quyidagi boshlang‘ich tezlik beriladi.

$$v_1 = \sqrt{g\frac{R^2}{r}} = \sqrt{gR} \approx 7{,}9\frac{km}{sek}$$

Jismni Yerning tortishish kuchidan ozod qilish uchun unga v tezlik berish kerak bo‘ladi. Bunda jism parabolik trayektoriya $E = 0$ bo‘ylab harakatlanishi kerak. Yerning gravitatsion maydonida potensial energiya $U = -\frac{\gamma}{r} = -\frac{GMm}{r}$ teng bo‘lib, to‘liq energiyani yozish mumkin.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0 \qquad\qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{gR^2m}{r}$$

$$v = \sqrt{2g\frac{R^2}{r}}$$

Sun’iy yo‘ldosh Yer sirtidan uchirilsa $r = R$

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{R^2}{r}} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\frac{km}{sek}$$

Potensial maydonda jismga ta’sir qiluvchi kuch $F = \frac{U}{r}$ ga teng.

Masala.

Yerning sun’iy yo‘ldoshi tortishish kuchi ta’sirida e ekssentrisitet bilan harakatlanmoqda. Yer elliptik trayektoriyaning f fokuslaridan birida yotadi. Yerga eng yaqin masofada yo‘ldoshning tezligi v_1 bo‘lsa, yo‘ldoshning eng uzoq nuqtadan o‘tish tezligi topilsin.

Yechish: (3.56) formuladan elliptik orbita uchun eng yaqin va eng uzoq masofalarni yozib olamiz.

$$r_{\min} = a(1-e) \qquad\qquad r_{\max} = a(1+e)$$

Markaziy maydonda impuls momenti saqlanadi $M = M_1 = M_2$ va chetki nuqtalar uchun momentlarni yozamiz.

$$M_1 = mv_1 r_{\min} \qquad\qquad M_2 = mv_2 r_{\max}$$

$$mv_1 r_{\min} = mv_2 r_{\max} \qquad\qquad v_1 a(1-e) = v_2 a(1+e)$$

$$v_2 = \frac{(1-e)}{(1+e)} v_1 \qquad\qquad v_2 < v_1$$

Ellips uchun $e = \frac{c}{a}$, c- ellips markazida fokusgacha bo‘lgan masofa.

IV Bob. ZARRALARNING TO‘QNASHUVI

4.1. ZARRALARNING PARCHALANISHI

Mexanik jarayonlarning ko‘pchilik hollarda energiya va impulsning saqlanish qonunlari asosida tadqiq etish mumkin. Biz zarraning «o‘z-o‘zidan» ya’ni tashqi kuchlarning ta’sirisiz parchalanish jarayonini tahlil qilamiz. Bunda dastlabki zarra parchalanishdan keyin ikkita boshqa zarrachaga parchalansin.

Eng oddiy hol bu zarracha parchalangunga qadar tinch turgan deb qaraladi. Impulsning saqlanish qonuniga ko‘ra yozamiz.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} \tag{4.1}$$

Agar dastlab zarralar tinch turgan bo‘lsa, $\vec{P}_{10} = 0, \vec{P}_{20} = 0$.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \qquad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 \qquad P_1^2 = P_2^{\ 2} = P_0^2 \tag{4.2}$$

Ya’ni bu zarralar miqdoran teng va qarama-qarshi yo‘nalgan impulslarga ega bo‘ladi.

Parchalanuvchi zarraning ichki energiyasini E_i deb belgilab energiyaning saqlanishini parchalanish uchun yozamiz.

$$E_i = E_{1i} + E_{2i} + T_1 + T_2 = E_{1i} + E_{2i} + \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2}$$

$$E_i = E_{1i} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{p_0^2}{2m_2} \tag{4.3}$$

Bu yerda m_1, m_2 hosil bo‘lgan zarralarning massalari E_{1i}, E_{2i} ularning ichki energiyalari. Zarra parchalanishi uchun parchalanuvchi va parchalangan zarralar ichki energiyalarining ayirmasi musbat bo‘lishi lozim. Odatda bu energiya farqini parchalanish energiyasi ε deb yuritiladi.

$$\begin{gathered} \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} = T_1 + T_2 = E_i - E_{1i} - E_{2i} \\ \varepsilon = E_i - E_{1i} - E_{2i} \end{gathered} \tag{4.4}$$

Demak, yuqoridagi munosabatga ko‘ra quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz.

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m} \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{4.5}$$

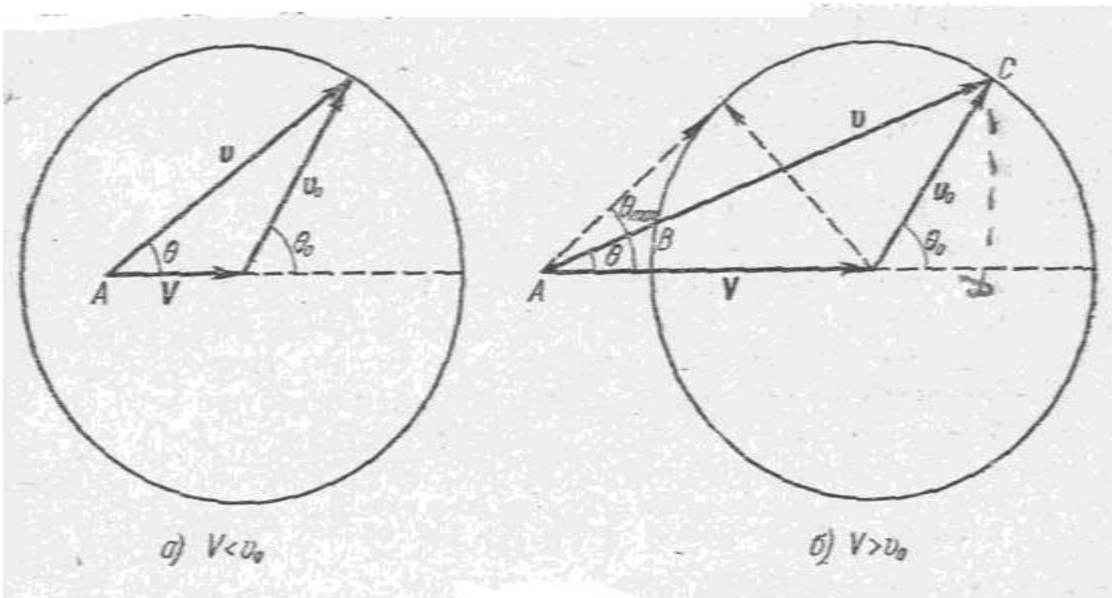
Bu yerda m-hosil bo‘lgan zarralarning keltirilgan massasi. Zarralarning tezligi esa ularning impulsi orqali aniqlanadi:

$$v_{10} = \frac{P_0}{m_1} \qquad v_{20} = \frac{P_0}{m_2} \tag{4.6}$$

Endi dastlabki zarracha parchalangunga qadar V tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq tizimiga o‘tamiz. Odatda bu sanoq tizimini laboratoriya sanoq tizimi (yoki L tizim) deb yuritiladi. Zarralarning to‘liq impulslari nolga teng bo‘lgan tizim esa inersiya markazi tizimi (yoki M tizim) deb yuritiladi. Parchalanuvchi zarralardan birining tezligi L va M tizimlarga nisbatan mos ravishda tezliklari v va v_0 bo‘lsa, u holda $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_0$ bo‘lganligi uchun quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{4.7}$$

bu yerda θ- zarrachaning V tezlik yo‘nalishiga nisbatan uchib chiqish burchagi. Bu tenglama parchalanish natijasida hosil bo‘lgan zarrachaning L tizimdagi tezligini aniqlaydi. Bu munosabatni 15-rasmda ko‘rasatilgan diagramma yordamida tasvirlash mumkin.



Rasm 15. Zarraning parchalanishi diagrammasi.

Ikki hol bo‘lishi mumkin $V < v_0, V > v_0$. Birinchi holda zarracha ixtiyoriy burchak ostida uchib chiqishi mumkin. Ikkinchi holda esa zarracha quyidagi tenglik bilan aniqlanuvchi burchakdan katta bo‘lmagan burchak ostida faqat oldinga uchib chiqishi mumkin:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{v_0}{V} \qquad (4.8)$$

L va M tizimlardagi uchib chiqish burchaklari θ va θ_0 orasidagi bog‘lanishni ham shu diagrammalar asosida topish mumkin.

$$tg\theta = \frac{\tilde{N}D}{AD} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{V + v_0\cos\theta_0} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta(V + v_0\cos\theta_0) = v_0\sin\theta_0\cos\theta \qquad V\sin\theta = v_0(\sin\theta_0\cos\theta - \sin\theta\cos\theta_0)$$

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \frac{V}{v_0}\sin\theta \qquad \theta_0 - \theta = \arcsin(\frac{V}{v_0}\sin\theta)$$

$$\theta_0 = \theta + \arcsin(\frac{V}{v_0}\sin\theta) \qquad \cos\theta_0 = \cos\left\{\theta + \arcsin(\frac{V}{v_0}\sin\theta)\right\}$$

$$\cos\theta_0 = \cos\theta\cos[\arcsin(\frac{V}{v_0}\sin\theta)] - \sin\theta\sin[\arcsin(\frac{V}{v_0}\sin\theta)] \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\theta_0 = \pm\cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta} - \frac{V}{v_0}\sin^2\theta \qquad (4.9)$$

Birinchi diagrammadan ko‘rinadiki $V < v_0$ bo‘lsa θ_0 va θ burchaklar orasidagi bog‘lanish bir qiymatlidir. Bunda ildizli ifoda oldida musbat ishora olinadi (chunki θ=0 bo‘lganda θ_0=0 bo‘lishi lozim). Agar $V > v_0$ bo‘lsa θ_0 va θ burchaklar orasidagi bog‘lanish bir qiymatli emas: ya’ni θ ning har bir qiymatiga aylana markazidan B va C nuqtalarga o‘tkazilgan ikkita θ_0 burchak mos keladi. Ularga (4.9) ifodadagi ildiz oldidagi musbat va manfiy ishoralar mos keladi.

Real fizikaviy jarayonlarda bir emas bir nechta bir xil zarralarning parchalanishi sodir bo‘ladi. Bu holda parchalanish oqibatida hosil bo‘luvchi zarralarning yo‘nalishlar yoki energiyalar bo‘yicha taqsimotini bilish muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Masalani soddalashtirish uchun dastlabki zarrachalar fazoda xaotik joylashgan deb faraz qilamiz.

M tizimda bu savolga soddagina javob berish mumkin: barcha hosil bo‘luvchi zarrachalar bir xil energiyaga ega bo‘lishadi va ularning uchib chiqish yo‘nalishlari bo‘yicha taqsimoti izotrop bo‘ladi. Bu xulosa dastlabki zarralarning xaotik taqsimotga ega ekanligi bilan bog‘liqdir. Bu shuni anglatadiki $d\Omega_0$ fazoviy burchak elementi ichida uchuvchi zarralarning ulushi unga proporsionaldir, ya’ni

$\frac{d\Omega_0}{4\pi}$ ifoda bilan aniqlanadi. $d\Omega_0 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$ ekanligini inobatga olib, zarralarning θ_0 burchaklar bo‘yicha taqsimlanishini tavsiflovchi quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 \tag{4.10}$$

L tizimdagi burchaklar bo‘yicha taqsimot esa ushbu ifodani mos almashtirishlar yordamida hosil qilinadi. Masalan, L tizimda zarralarning kinetik energiyalar bo‘yicha taqsimotini topaylik. Buning uchun

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0$$

Tenglikni kvadratga ko‘tarib diferensialini qarab quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$d\cos\theta_0 = \sin\theta_0 d\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}.$$

Endi zarraning kinetik energiyasi $T = \frac{mv_0^2}{2}$ ekanligini inobatga olib, (4.10) formuladan biz izlayotgan taqsimotni hosil qilamiz

$$\frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 = \frac{dT}{2mv_0 V} \tag{4.11}$$

Ko‘rinib turibdiki, zarralarning kinetik energiyalari $T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ dan $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$ gacha bo‘lgan qiymatlarni qabul qila oladi. Bu oraliqdagi energiya qiymatlarini qabul qiluvchi zarrachalar (4.11) ifodaga ko‘ra bir jinsli taqsimlanishgandir.

4.2. ZARRALARNING ELASTIK TO‘QNASHUVI

Modda zarralari orasidagi o‘zaro ta’sir kuchlarining tabiatini aniqlash muammosi ham “ikki jism masalasi” yordamida hal etilishi mumkin. Elastik to‘qnashuvda zarralarning ichki holati o‘zgarmaydi. SHuning uchun ikki zarradan iborat sistemaning energiyasi va impulsi saqlanadi. Qo‘yiladigan masala to‘qnashuvgacha bo‘lgan tezliklar orqali to‘qnashuvdan keyingi tezliklarni topishdir. Zarralarni M tizimini e’tiborga olgan holda yozamiz.

Agar m_1 va m_2 massali zarraning to‘qnashuvgacha L- tizimdagi tezliklari v_1 va v_2. Unda inersiya markazi tezligini topamiz.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4.12}$$

To‘qnashuvgacha inersiya markaziga nisbatan zarralarning tezliklarini v_{10} va v_{20} deb belgilaymiz. Zarralarning L- tizimdagi tezligidan inersiya markazi tezligini ayiramiz.

$$\vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_{20} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Inersiya markazi tizimida zarralar sistemasining impulsi nolga teng. To‘qnashuvdan keyin yo‘nalishlar teskari bo‘ladi. Elastik to‘qnashuvda kinetik energiya saqlanadi, shuning uchun nisbiy tezliklarning absolyut qiymatlari o‘zgarmaydi. Birinchi zarraning to‘qnashuvdan keyingi tezligi yo‘nalishida $\vec{n}$ vektor kiritamiz.

Demak to‘qnashuvdan keyingi tezliklar orqali ifoda quyidagicha.

$$\vec{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} \qquad \vec{v}_{20}' = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} \tag{4.13}$$

Endi laboratoriya tizimida to‘qnashuvdan keyingi tezliklar uchun ifoda yozish uchun (4.13) ifodalarga inersiya markazi tezligini qo‘shish kifoya.

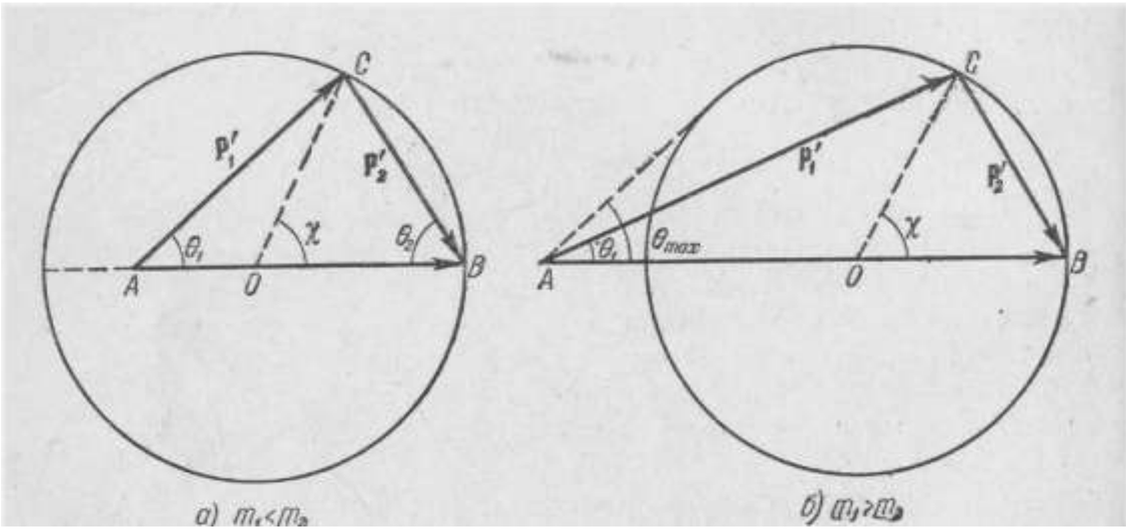
$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2' &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\vec{n}$ vektorning yo‘nalishi esa zarralarning o‘zaro ta’sir qonuniga va ularning to‘qnashuv vaqtidagi o‘zaro joylashuviga bog‘liq bo‘ladi.

Olingan natijalarni geometrik izohlash uchun (4.14) ifodalarni mos ravishda m_1 va $m_2$ga ko‘paytiramiz va impulslarga o‘tamiz. $|\vec v_1 - \vec v_2| = v$ zarralarning nisbiy tezligi.

$$\vec p_1' = mv\vec n + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec p_1 + \vec p_2), \qquad \vec p_2' = -mv\vec n + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec p_1 + \vec p_2)$$
$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad \vec p_1' + \vec p_2' = \vec p_1 + \vec p_2 \tag{4.15}$$

Radiusi mv bo‘lgan aylana chizamiz. Birlik vektor $\vec n$ $\overrightarrow{OC}$ bo‘yicha yo‘naladi. $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CB}$ mos ravishda $\vec p_1'$ va $\vec p_2'$.



Rasm 16. Zarralarning to‘qnashish diagrammasi.

Birinchi (16-rasm) rasmdan quyidagilarni yozish mumkin.

$$\overrightarrow{AO} + mv\vec n = \vec p_1' \qquad \overrightarrow{AO} = \vec p_1' - mv\vec n \qquad \vec p_1' + \vec p_2' = \vec p_1 + \vec p_2$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec p_1 + \vec p_2) \qquad \overrightarrow{AB} = \vec p_1 + \vec p_2$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec p_2' + mv\vec n \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec p_1 + \vec p_2) = mv\vec n$$

$\vec p_1 + \vec p_2$ berilishiga ko‘ra aylana radiusi va A nuqta o‘zgarmaydi. C nuqta ixtiyoriy holatni egallashi mumkin. $m_1 < m_2$ bo‘lsa A nuqta aylana ichida, $m_1 > m_2$ bo‘lsa aylana tashqarisida yotadi. Rasmdagi θ_1 va θ_2 burchaklar to‘qnashgan zarralarning $\vec p_1 + \vec p_2$ yo‘nalishga nisbatan og‘ish burchaklari bo‘lib ular dastlabki zarra impulsining yo‘nalishiga nisbatan olingan.

Rasmda tasvirlangan $\vec{n}$ birlik vektorning yo‘nalishi χ burchak orqali belgilangan bo‘lib u M tizimda birinchi zarrachaning burilish burchagini tavsiflaydi. θ_1 va θ_2 burchaklar χ burchak orqali ifodalarini topamiz.

OCB uchburchak teng yonli shuning uchun burchaklar uchun quyidagi o‘rinli.

$$\chi + 2\theta_2 = \pi \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

$$tg\theta_1 = \frac{CD}{AD} = \frac{|OC|\sin\chi}{|AO| + |OC|\cos\chi} = \frac{\sin\chi}{\frac{|AO|}{|OC|} + \cos\chi}$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi} = \frac{CD}{AD} \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (4.16)$$

Endi zarralarning to‘qnashuvdan keyingi tezliklarini χ burchak orqali ifodalari quyidagicha topiladi.

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1 + m_2}v, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}\sin\frac{\chi}{2} \qquad (4.17)$$

$\theta_1 + \theta_2$ - to‘qnashuvdan keyingi ajralish burchagidir. $m_1 < m_2$ bo‘lsa $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$, $m_1 > m_2$ bo‘lsa $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ bo‘ladi. $\chi = \pi$ bu markaziy to‘qnashishdir.

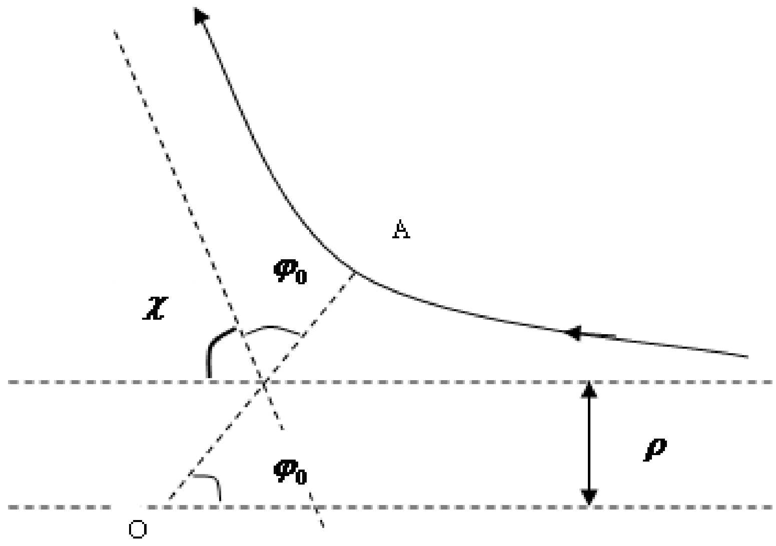
4.3. SOCHILISHNING EFFEKTIV KESIMI

Muhim fizikaviy ahamiyatga ega bo‘lgan jarayonlardan biri – zaryadlangan zarralarning Kulon maydonidagi sochilishini ko‘ramiz. Ma’lumki ikkita zarraning to‘qnashishi natijasini to‘liq aniqlash uchun (χ-burchakni topish) o‘zaro ta’sirning aniq qonuni qaralishi kerak. Buning uchun m massali zarraning $U(r)$ potensial maydonda markaziy kuchda og‘ishini ko‘ramiz.

Zarraning potensial maydonda og‘ish trayektoriyasini chizamiz. OA eng yaqin masofa (17-rasm). Ikkila asimptota bu chiziqda bir xil burchakda kesishadi.

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \qquad (4.18)$$

Markaziy maydonda zarraning og‘ish burchagi φ_0 uchun munosabat olgan edik.



Rasm 17. Zarralarning potensial maydonda sochilishi trayektoriyasi.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{4.19}$$

Infinit harakat uchun energiya va impuls momenti cheksizlikdagi tezlik va nishoniy masofa ρ orqali ifodalanadi.

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \qquad\qquad M = m\rho v_\infty \tag{4.20}$$

Unda (4.19) formulaning ko‘rinishi quyidagicha o‘zgaradi.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{m\rho v_\infty}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[\frac{mv_\infty^2}{2} - U\right] - \frac{m^2\rho^2 v_\infty^2}{r^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{mv_\infty^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \tag{4.19}$$

Sochilish jarayonida odatda zarralar dastasi ishtirok etadi. Dastaning zarralarning tezligiga v_∞ mos ravishda undagi zarralar har xil nishoniy masofalarga ega bo‘ladi. O‘z navbatida sochilish burchagi χ o‘zgacha bo‘ladi. $\chi \div \chi + d\chi$ burchaklar oralig‘iga birlik vaqtda dN ta zarraning sochilishi to‘g‘ri keladi. Yana dastaning birlik kesimidan birlik vaqtda n ta zarra o‘tsa $d\sigma$ effektiv kesim uchun quyidagi munosabat kiritiladi va bu sochilishda muhim hisoblanadi.

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{4.20}$$

χ va ρ orasida ham bog‘lanish bo‘lib, intervalga tushadigan zarralar soni n ni $\rho \div \rho + d\rho$ radiusli aylana yuzasiga ko‘paytmasiga teng.

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho$$

$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n \qquad d\rho(\chi) = \left|\frac{d\rho(\chi}{d\chi}\right| d\chi \tag{4.21}$$

Sochilish burchagiga bog‘liqligini ko‘rsak quyidagini olamiz.

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi \tag{4.22}$$

Agar sochilish burchagi konusli bo‘lsa fazoviy burchak orqali ifodalanadi.

$$d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$$
$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\Omega \tag{4.23}$$

Yaqin tezliklarda harakatlanayotgan zarralar dastasining kulon maydonida sochilishidagi effektiv kesimini aniqladik.

4.4. REZERFORD FORMULASI

Endi zarralar dastasining kulon potensiallar maydonida sochilishi yechimlarini ko‘rib chiqamiz. Oldingi mavzudagi (4.19) formulaga Kulon potensialini qo‘yamiz ($U = \frac{\gamma}{r}$ va soddalik uchun $v_\infty = v$ deb olamiz).

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2\gamma}{rmv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \tag{4.24}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritib integralni hisoblaymiz.

$$\eta = \frac{\gamma}{mv^2\rho^2} + \frac{1}{r} \qquad d\eta = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\gamma^2}{m^2(v\rho)^4} \qquad \eta^2 = \frac{\gamma^2}{m^2(v\rho)^4} + \frac{2\gamma}{mv^2\rho^2 r} + \frac{1}{r^2}$$

Belgilashlarni va differensialni integralga qo‘yib quyidagi ifodani hosil qilamiz

$$\varphi_0 = \arccos \left. \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho} + \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + (\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho})^2}} \right|_{r_{\min}}^{\infty} = \arccos \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + (\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho})^2}} + const$$

Bu yerda doimiyni koordinatani siljitib nolga to‘g‘rilansa ($const = 0$) bo‘ladi.

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + (\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho})^2}} \qquad (4.25)$$

Formulaning ikkala tomonidan kosinus hisoblasak kotanginusga keladi.

$$\cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}} \qquad\qquad ctg\varphi_0 = \frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}$$

Oxirgi ifodani kvadratga ko‘tarib tanginus orqali ifodalash mumkin.

$$\rho^2 = \frac{\gamma^2}{m^2 v_\infty^4} tg^2 \varphi_0$$

Endi oldingi mavzulardan $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$ ekanligini inobatga olsak, yuqoridagi ifoda quyidagi ko‘rinishda yozilishi mumkin.

$$\rho^2 = \frac{\gamma^2}{m^2 v_\infty^4} ctg^2 \frac{\chi}{2} \qquad (4.26)$$

Bu ifodani χ bo‘yicha differensialga keltiramiz.

$$\rho = \frac{\gamma}{mv_\infty^2} ctg \frac{\chi}{2} \qquad (4.27)$$

$$\frac{d\rho}{d\chi} = -\frac{\gamma}{2mv_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}} \qquad (4.28)$$

(4.27) va (4.28) formulalarni inobatga olib oldingi mavzudagi (4.22) va (4.23) quyidagicha yozib sochilish kesimining χ sochilish burchagiga bog‘lanishini tavsiflovchi quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi = 2\pi\frac{\gamma}{mv_\infty^2}ctg\frac{\chi}{2}\cdot\frac{\gamma}{2mv_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}}d\chi$$

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\gamma}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi \tag{4.29}$$

yoki

$$d\sigma = \left(\frac{\gamma}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \tag{4.30}$$

Bu ifoda Rezerford formulasi deb ataladi. Ko‘rinib turibdiki, sochilishning differensial kesimi γ ning ishorasiga bog‘liq emas. Yoki boshqacha qilib aytganda bu natija ham tortishuvchi ham itariluvchi Kulon maydonlari uchun o‘rinlidir.

Atomlar yadrosida uning deyarli barcha massasi jamlangan va zaryadi musbat. Atom yadrosi zaryadi $Z\cdot e$, unda Z-elementning atom nomeri e-elektron zaryadi.

Atom yadrosi maydonida α-zarraning sochilishini ko‘rsak uning zaryadi $2e$ yani geliy yadrosidan iborat. Yadro maydonida α-zarraning potensial energiyasi $U = \frac{2kZe^2}{r}$ ga teng, hamda uning to‘liq mexanik energiyasi doim $E > 0$ musbat. Demak trayektoriyasi giperbola. Bu potensialni Rezerford formulasiga qo‘yamiz va α-sochilish kesimini olamiz.

$$d\sigma = \left(\frac{kZe^2}{mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \tag{4.31}$$

Agar ikkita elementda sochilish burchagi χ bir xil bo‘lsa quyidagi proporsiyani olamiz.

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \tag{4.32}$$

Sochilish kesimlari tajribadan olinsa zaryadi ma’lum yadroga nisbatan zaryadi noma’lum bo‘lgan yadroning zaryadi topiladi.

V bob. ZARRANING BIR O‘LCHAMLI TEBRANMA HARAKAT TENGLAMALARI.

5.1. BIR O‘LCHAMLI ERKIN TEBRANISHLAR.

Tebranma harakatlar tabiatda va texnikada keng tarqalgan, mashinalar, samolyotlarning ixtiyoriy konstruksiyasi bikirlikka (elastiklikka) ega va vibratsiyalanadi.

Sistemalarning mexanik harakatlaridan keng tarqalgani kichik tebranishlardir. Bunda sistema turg‘un muvozanat holati yaqinida tebranadi. Bunday haraatlarni bir erkinlik darajaga ega sistema uchun ko‘rib chiqamiz.

Turg‘un muvozanat holatiga minimal $U(q)$potensial energiya mos keladi. Undan chetlashish sistemani qaytaruvchi $\frac{du}{dq}$ kuchni yuzaga keltiradi. Turg‘un holat uchun q_0 koordinatani kiritamiz va chetlashish $q-q_0$ bo‘yicha $u(q)-u(q_0)$ o‘zgarishning yoyilmasi

$$u(q)-u(q_0)\approx\frac{k}{2}\left(q-q_0\right)^2$$

Bunda $k=U''(q_0)$ musbat koeffitsient. $U(q_0)=0$minimal qiymatdan boshlab hisob boshlansa

$$x=q-q_0 \tag{5.1}$$

Koordinataning muvozanat qiymatdan siljishi bo‘ladi. Unda potensial energiya.

$$U(x)=\frac{kx^2}{2} \tag{5.2}$$

Umumiy holda bir erkinlik darajasi bo‘lgan sistemaning kinetik energiyasi quyidagicha

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$$

Shu yaqinlashishda $a(q)$ ni $a(q_0) = m$ ga almashtirish mumkin. Ta’kidlash kerakki m agar zarraning dekart koordinatasi faqat x bo‘lsagina massaga mos keladi.

Bir o‘lchamli kichik tebranishlar uchun (bunday sistemani ko‘pincha bir o‘lchamli ossilyator deb yuritiladi) Lagranj funksiyasi quyidagicha

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{5.3}$$

Bu funksiyaga mos keluvchi Lagranj tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5.4}$$

yoki

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.5}$$

Olingan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \tag{5.6}$$

Bu munosabatni quyidagicha ham yozish mumkin

$$c_1 = a\sin\alpha \qquad c_2 = a\cos\alpha$$

$$x = a\sin(\omega t + \alpha) \tag{5.7}$$

CHunki $x = a\sin(\omega t + \alpha)$ $\qquad v = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$

Boshlang‘ich shartlardan foydalanamiz. $t = 0, \quad x = x_0, \quad v = v_0$

$$x_0 = a\sin\alpha \qquad v_0 = a\omega\cos\alpha$$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad tg\alpha = \frac{c_1}{c_2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5.8}$$

Demak turg‘un muvozanat holati yaqinida sistema garmonik harakat qiladi. $a-$tebranish amplitudasi va kosinus argumenti uning fazasi; α esa fazaning boshlang‘ich qiymati. Siklli chastota ω nazariy fizikada chastota deyiladi.

Chastota harakatning boshlang‘ich shartlariga bog‘liq bo‘lmay tebranishning asosiy xarakteristikasi hisoblanadi. (5.5) formuladan ko‘rinadiki chastota sistemaning xossalari bilan aniqlanadi. Matematik nuqtai nazardan chastota potensial energiyaning koordinata kvadratiga bog‘liqligidan aniqlanadi.

Kichik tebranishdagi sistema energiyasi

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)$$

Bunga (5.7) formulani qo‘ysak quyidagicha bo‘ladi.

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2 \tag{5.9}$$

Tebranuvchi sistemaning koordinatasini vaqtga bog‘liqligini kompleks ifodaning haqiqiy qismi orqali berish mumkin.

$$x=\mathrm{Re}\left\{A\lambda^{-i\omega t}\right\} \tag{5.10}$$

$$A=a\lambda^{-i\alpha} \tag{5.11}$$

A-kompleks amplituda deyiladi. Uning moduli odatiy amlitudadagi argumenti esa boshlang‘ich fazaga mos keladi.

Masala 1. Tebranishning amplitudasi va boshlang‘ich fazasini koordinata va tezlikning boshlang‘ich qiymatlari, x_0 va v_0 orqali ifodalangan

$$\left.\begin{array}{l} x_0=a\cos\alpha \\ v_0=\dot{x}_0=-a\omega\sin\alpha \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=a\cos(\omega t+\alpha) \\ \dot{x}=-a\omega\sin(\omega t+\alpha) \end{array}\right\}$$

$$a^2=\sqrt{x_0^{\,2}+\frac{v_0^{\,2}}{\omega^2}} \qquad tg\alpha=-\frac{v_0}{x_0\omega}$$

Masala 2. Turli izotoplarning atomlaridan iborat ikkita ikkiatomli molukulalarning chastotalari nisbatini toping. Atomlarning massalari $m_1,\ m_2$ va m'_1, m'_2.

Yechish. Izotoplarning atomlari bir xil ta’sirlashadi va $k=k'$. m koeffitsient vazifasini molekulalarning kinetik energiyasida keltirilgan massalar o‘taydi.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \mu' = \frac{m'_1 m'_2}{m'_1 + m'_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k'}{\mu'}}$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{k'}{\mu'}\frac{\mu}{k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{(m_1 + m_2) m'_1 m'_2}}$$

Masala 3. Og‘irligi $G = 5k\Gamma$ bo‘lgan m yuk yuqori uchi qotirilgan prujinaga osilgan. Statik muvozanat holatida prujinaning uzayishi $\lambda_{cm} = 10 cм$. Prujinaning massasi va muhit qarshiligi inobatga olinmaydi. Yukning harakat qonunini toping.

Yechish: Yukni nuqtaviy qarab x o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz. Koordinata boshi prujinaning asl statik uzunligi 0 nuqtasida olinadi.

Yukga $\vec{G}$ og‘irlik kuchi va $\vec{F}$ prujinaning elastik kuchi ta’sir qiladi.

Endi prujinaning uzayishi $\lambda_{st} + x$ bo‘lib, prujinaning elastiklik kuchi $F = k(\lambda_{st} + x)$ yoki qaytaruvchi kuch.

Prujananing bikirligini (qattiqlik koeffitsienti) statik muvozanat shartidan topiladi.

$$G = F_{st} = k\lambda_{st}$$

$$k = \frac{G}{\lambda_{st}} = \frac{S}{10} = 0{,}5k\Gamma / cм \qquad F = \frac{G}{\lambda_{st}}(\lambda_{st} + x)$$

Yukni harakat tenglamasini tuzamiz.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = G - F$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = G - \frac{G}{\lambda_{st}}(\lambda_{st} + x)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g(1-1-\frac{x}{\lambda_{st}})=-g\frac{x}{\lambda_{st}}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{g}{\lambda_{st}}x=0 \qquad \omega^2=\frac{g}{\lambda_{st}}$$

$$x=a\sin(\omega t+\alpha)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{5\cdot 10^{-2}}}=\sqrt{196}=14sek^{-1}$$

Tebranish davri esa

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{6{,}28}{14}\approx 0{,}45sek$$

Boshlang‘ich shartlardan a va α topiladi.

$$t=0,\quad v_0=0,\quad x_0=-\lambda_{st}=-10sm$$

$$a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{10^2}=10 \qquad tg\alpha=\frac{\omega x_0}{v_0}=-\infty$$

Bundan $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$

$$x=10\sin\left(14t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{yoki} \quad x=-10\cos 14t\ см$$

Ilova.

$$x=a\sin(\omega t+\alpha) \qquad t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$$

$$\dot{x}=a\omega\cos(\omega t+\alpha) \qquad \begin{aligned}x_0&=a\sin\alpha\\ v_0&=a\omega\cos\alpha\end{aligned}$$

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \qquad tg\alpha=\frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$$

5.2. SO‘NUVCHI TEBRANISHLAR

Real hollarda tebranuvchi moddiy nuqta har doim qarshilikka uchraydi. Moddiy nuqtaning tebranishini so‘ndiruvchi qarshilikni quyidagi holatdan ko‘ramiz.

Moddiy nuqtaga $\vec{F}$ qaytaruvchi kuch va qaytishiga to‘sqinlik qiluvchi muhitning qarshilik kuchi $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ ta’sir qilsin. Qaytaruvchi kuch moduli $F = k|x|$, qarshilik kuchi esa nuqta tezligining birinchi darajasiga proporsional qaralsin.

Nuqtaning harakat yo‘nalishida x o‘qini qo‘yamiz, 0 nuqta M nuqtaning muvozanat holatiga mos tanlanadi.

$\vec{R}$ kuchning R_x proekiyasi har doim $\vec{v}$ tezlikning v_x proeksiyasiga qarama-qarshi yo‘naladi.

$$R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$$

Nuqtaning differensial harakat tenglamasini quyidagicha yozamiz.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt}$$

yoki

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\mu / m = 2n$ va $\frac{k}{m} = \omega^2$ deb belgilab yozamiz.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{5.12}$$

$n = \frac{\mu}{2m}$ doimiy koeffitsient muhit qarshiligini xarakterlaydi (so‘nish koeffitsienti).

$$[n] = \left[\frac{H\cdot sek}{m} : \frac{H\cdot sek^2}{m}\right] = \frac{1}{sek} = sek^{-1}$$

$$[\omega] = sek^{-1}$$

n va ω koeffitsientlarning o‘lchamliligi bir xil bo‘lganligi uchun ularni solishtirish mumkin.

Differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz.

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0$$

Bu tenglamaning yechimlari $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

Yechimni faqat kichik qarshiliklar holida ko‘ramiz, ya’ni $n < \omega$. $n \geq \omega$ da xarakterlovchi tenglama echimi haqiqiy bo‘lib, harakat tebranma bo‘lmaydi, demak echim $r_{1/2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2}$

Xarakteristik tenglamaning ildizi kompleks bo‘lganligi uchun, umumiy echim ko‘rinishi kuyidagicha qidiriladi.

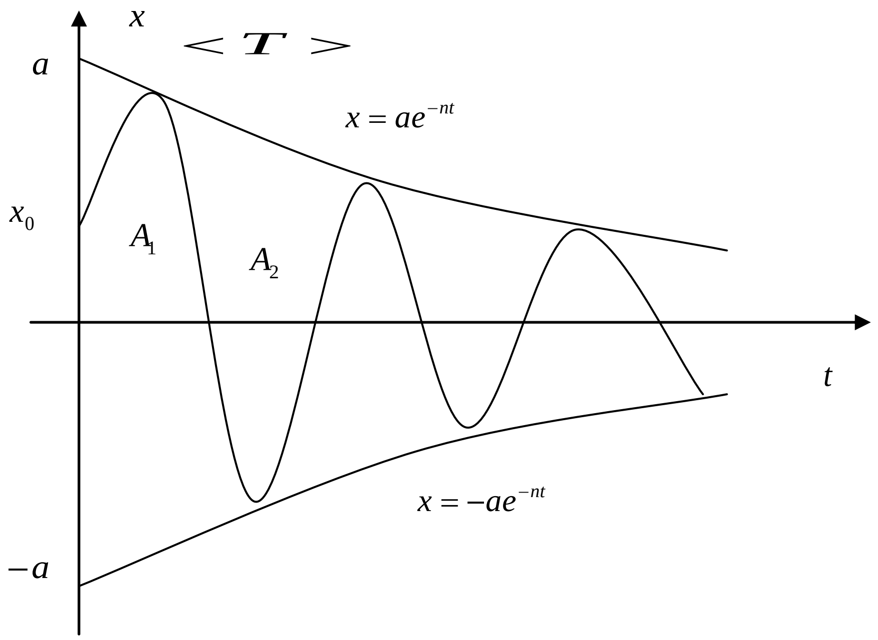
$$x = \lambda^{-nt}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot t\right)$$

$c_1 = a\sin\alpha$ va $c_2 = a\cos\alpha$ belgilashlar kiritib garmonik ko‘rinishga kelamiz.

$$x = a\lambda^{-nt} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha\right) \qquad (5.13)$$

Bu qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘luvchi tebranishlarga so‘nuvchi tebranishlar deyishadi. Amplituda $A = a\lambda^{-nt}$ vaqt o‘tishi bilan kamayib boradi.

Grafikdan ko‘rinadigan sinusoida $x = a\lambda^{-nt}$ va $x = -a\lambda^{-nt}$ simmetrik chiziqlar orasida so‘nadi (chunki $\sin$ funksiya -1 dan 1 gacha o‘zgaradi).



Rasm 18. Moddiy nuqta tebranishining so‘nishi.

So‘nuvchi tebranishning davri shu qaytaruvchi $\vec{F}$ kuch ta’siridagi erkin tebranishning davridan kattaroq bo‘ladi.

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \tag{5.14}$$

$\sqrt{\omega^2 - n^2} < \omega$ $\qquad T' > T \qquad n << \omega$ bo‘lsa $T' \approx T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\lambda^{-nT'}$ tebranish dekrementi $-nT'$ - logarifmik dekrement.

$A_0 = a_0 e^{-nt_1}$

Agar o‘zgarish T' davr bo‘yicha borsa

$$A_1 = a_0 \lambda^{-n(t_1 + T')} = a_1 \lambda^{-nt_1} \lambda^{-nT'} = A_0 \lambda^{-nT'}$$

$A_2 = A_1 \lambda^{-nT'} \qquad A_{n+1} = A_N \lambda^{-nT'} \qquad A_N = A_0 \lambda^{-NnT'}$

Masala. Moddiy nuqta to‘g‘ri chiziqli tebranadi. Qarshilik kuchi tezlikka proporsional. Tebranish davri $T = 2sek$. Ikki to‘liq tebranishdan keyin amplituda 16 marta kamaydi. Nuqtaga boshlang‘ich $v_0 = 1m/sek$ tezlik berilgan bo‘lsa harakat qonuni topilsin.

Yechish. So‘nuvchi tebranishning tenglamasini yozamiz.

$$x = a\lambda^{-nt} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha\right)$$

Endi tenglamaning barcha koeffitsientlarini topamiz.

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ sek^{-1}$$

Amplituda kamayishi $A_2 = \dfrac{1}{16} A_0$

$$A_2 = A_0 \lambda^{-nT \cdot 2}$$

$\dfrac{1}{16} a = a\lambda^{-nT \cdot 2} \qquad\qquad n = \ln 2$

Boshlang‘ich shartlardan α va a ni topamiz $\qquad t = 0 \qquad v_0 = 1m/sek$

$$t = 0 \qquad\qquad x_0 = a\sin\alpha$$

$$v = -na\lambda^{-nt}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t + \alpha\right) + a\sqrt{\omega^2 + n^2}\,\lambda^{-nt}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t + \alpha\right)$$

$t = 0$ da $v_0 = -na\sin\alpha + a\sqrt{\omega^2 - n^2}\cos\alpha$

$$v_0 = -nx_0 + a\sqrt{\omega^2 - n^2}\cos\alpha$$

$$\frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} = a\sqrt{\frac{a^2 - x_0{}^2}{a^2}}$$

$$\frac{v_0{}^2 + 2nx_0v_0 + n^2x_0{}^2}{\omega^2 - n^2} = a^2 - x_0{}^2$$

$$a = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega^2 - n^2}} = \sqrt{\frac{v_0{}^2}{\omega^2 - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - \ln^2 2}}$$

$$tg\alpha = \frac{x_0\sqrt{\omega^2 - n^2}}{v_0 + nx_0} = 0 \qquad\qquad \alpha = 0$$

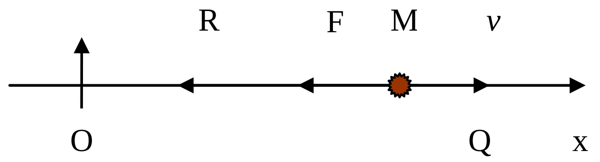
$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - \lambda n^2 2}}\lambda^{-\ln 2\cdot t}\sin(\pi t + 0) \qquad\qquad \lambda^{-\ln 2\cdot t} = \lambda^{-t}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - \ln^2 2}}2^{-t}\sin\pi t$$

Sistema impulsining o‘zgarishi va saqlanish qonuni.

5.3. MAJBURIY TEBRANISHLAR

Moddiy nuqtaning tebranma harakati davomida davriy o‘zgaruvchi kuch ta’sirida majburiy tebranishi hosil bo‘ladi. Agar majburiy kuch garmonik o‘zgargan hol amaliyotda muhim hisoblanadi. To‘g‘ri chiziqdan iborat traektoriyani ko‘ramiz. M nuqtaga $\vec{F}$ qaytaruvchi kuch, $\vec{R}$ qarshilik kuchi va $\vec{Q}$ majburlovchi kuch ta’sir qiladi.



Rasm 19 .Moddiy nuqtaning majburlovchi kuch ta’sirida harakati.

Majburlovchi kuchning x o‘qiga proeksiyasi garmonik qonun bilan o‘zgaradi.

$$Q_x = H \sin pt \tag{5.15}$$

p - aylanma chastota, H - amplituda

Bu nuqtaning differensial harakat tenglamasini yozamiz.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} + H\sin pt$$

Belgilash kiritamiz $\frac{\mu}{m} = 2n$ $\frac{k}{m} = \omega^2$ $\frac{H}{m} = h$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = h\sin pt \tag{5.16}$$

Differensial tenglamalar nazariyasiga binoan bunday tenglamaning umumiy echimi ikki qismdan iborat: bir jinsli tenglamaning x_1 umumiy echimi va berilgan nobirjinsli tenglamaning xususiy x_2 echimining yig‘indisidan iborat.

$$x = x_1 + x_2 \tag{5.17}$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2n\frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1 = 0$$

tenglamaning $n < \omega$ uchun echimini bilamiz.

$$x_1 = ae^{-nt}\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t + \alpha) \tag{5.18}$$

bir jinslibo'lmagan (5.16) tenglamaning xususiy echimini

$$x_2 = A\sin(pt-\beta) \tag{5.19}$$

ko'rinishida qidiramiz.

A va β doimiylar (5.19) echimni (5.16) tenglamaga qo'yilganda tenglik bajarilishi kerak. SHuning uchun x_2 echimning hosilalarini olamiz.

$$\frac{dx_2}{dt} = Ap\cos(pt-\beta) \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Ap^2\sin(pt-\beta) \tag{5.20}$$

Endi (5.19) va (5.20) ifodalarni (5.16) tenglamaga qo'yamiz.

$$-Ap^2\sin(pt-\beta) + 2nAp\cos(pt-\beta) + \omega^2 A\sin(pt-\beta) = h\sin pt$$

$pt-\beta=\varphi$ belgilash kiritamiz $pt=\varphi+\beta$ bo'ladi.

$$\left(\omega^2 A - A\rho^2 - h\cos\beta\right)\sin\varphi + \left(2nA\rho - h\sin\beta\right)\cos\varphi = 0 \tag{5.21}$$

Oxirgi tenglama vaqtning ixtiyoriy momentida va o'z navbatida $\varphi=\rho t-\beta$ ixtiyoriy qiymatida bajarilishi kerak.

Bu shart (5.21) tenglamada $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ oldidagi koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng bo'lganda bajariladi.

$$A(\omega^2-\rho^2) - h\cos\beta = 0 \qquad 2An\rho - h\sin\beta = 0$$

$$\cos\beta = \frac{A(\omega^2-\rho^2)}{h} \qquad \sin\beta = \frac{2An\rho}{h}$$

$$tg\beta = \frac{2An\rho}{h}\cdot\frac{h}{A(\omega^2-\rho^2)} = \frac{2n\rho}{\omega^2-\rho^2} \tag{5.22}$$

$$2An\rho - h\sqrt{1-\cos^2\beta} = 0 \qquad 2An\rho - h\sqrt{1-\frac{A^2(\omega^2-\rho^2)^2}{h^2}} = 0$$

$$4A^2n^2\rho^2 = h^2 - A^2(\omega^2-\rho^2)^2$$

$$A^2 = \frac{h^2}{\left(\omega^2-\rho^2\right)^2 + 4n^2\rho^2} \qquad A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2-\rho^2)^2+4n^2\rho^2}} \tag{5.23}$$

Endi aniqlangan (5.18) va (5.19) echimlarni (5.17) ga qo'yib, umumiy echimni yozishimiz mumkin.

$$x = a\lambda^{-ht}\sin\left(\sqrt{\omega^2-n^2}\,t+\alpha\right) + A\sin(\rho t-\beta) \tag{5.24}$$

A va β doimiylar (5.22) va (5.23) formulalardan topiladi, a va α esa M nuqta harakatining boshlang‘ich shartlaridan topiladi.

Harakat tenglamasining birinchi hadi so‘nuvchi tebranishni anglatadi va biror vaqtdan keyin uning amplitudasi nolga yaqinlashadi. Natijada birinchi had deyarli yo‘qoladi. Ikkinchi hadi esa so‘nmaydigan tebranishdir. M nuqtaning harakati shu qonun bo‘yicha o‘zgaradi.

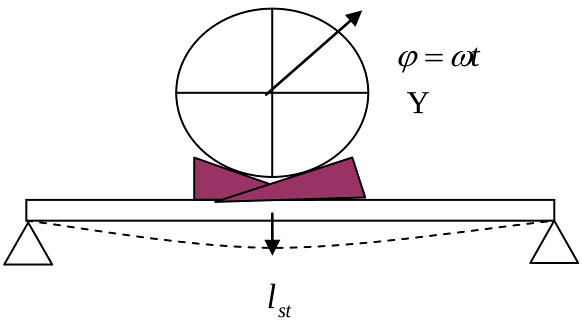
$$x = A\sin(\rho t - \beta) \tag{5.25}$$

Bu tenglama M nuqtaning majburiy tebranish tenglamasi bo‘lib xizmat qiladi. Tabiiyki $\vec{F}$, $\vec{R}$, $\vec{Q}$ kuchlar ta’sirida va $n = \dfrac{\mu}{2m} < \omega$ sharoitida.

Majburiy tebranish chastotasi (5.25) va (5.15) formulalarni solishtirishdan p ekanligini kelib chiqadi. Davri esa $T = \dfrac{2\pi}{p}$. p va T nuqtaning massasiga ham, μ ga ham bog‘liq emas bo‘ladi. YAna shu tengliklarni solishtirgandan majburiy tebranishning $\rho t - \beta$ fazasi majburlovchi kuchning ρt fazasidan β siljishga farqlanadi.

<u>Masala</u>. Og‘irligi $G = 3{,}2T$ bo‘lgan dvigatel №20 ikkita ikkitavrlik balkalar ustaga parallel qilib qo‘yilgan. Balkalar uzunligi $\lambda = 3$m. Po‘latning elastiklik moduli $E = 2 \cdot 10^6 к\Gamma / см^3$. № 20 balkaning inersiya momenti GOST 10016-39 bo‘yicha $J = 2 \cdot 2500 sm^4 = 5000 sm^4$ =5000sm^4

<u>Yechish:</u> Dvigatelning aylanuvchi qismi to‘liq muvozanatlashmaganligi sababli uning valiga markazdan qochma H kuch ta’sir qiladi. Valning aylanishida bu kuchning (majburlovchi) vertikal x o‘qiga proeksiyasi $H_x = H\sin\varphi = H\sin\omega_в t$ teng.



Rasm 20. Elektrodvigatelning majburiy tebranma harakati.

Demak balkalarga majburlovchi $H_x = H\sin\omega_в t$ garmonik o‘zgaruvchi kuch ta’sir qiladi. Bu kuchning chastotasi ρ ning o‘zgarishi valning $\omega_в$ burchak tezligiga teng. Ma’lumki rezonans erkin va majburiy tebranishlarning chastotalari mos kelganda sodir bo‘ladi.

Erkin tebranishning chastotasi $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Statik muvozanat vaqtida $G = k\lambda_{st}$ ga teng. $m = \frac{G}{g}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{G}} = \sqrt{\frac{G}{\lambda_{st}} \cdot \frac{g}{G}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}}$$

Texnikada materiallarning qarshiligi formulasidan statik uzayishi topiladi.

$$\lambda_{st} = \frac{G\lambda^3}{48EJ} = \frac{3200 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5000 sm^4} = \frac{864}{4800} = 0{,}18 sm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}} = \sqrt{\frac{980}{0{,}18}} \approx 73{,}7 \frac{1}{sek}$$

Dvigatel valining burchak tezligi $\omega_\lambda = \omega = 73{,}7 \frac{\rho ad}{sek}$ bo‘lganda rezonans kuzatiladi

$$\omega_в = 73{,}7 \frac{\rho aq}{sek} = 73{,}7 \frac{aylanish}{2\pi} \cdot \frac{60}{\min} = 704 \frac{aylanish}{\min}$$

Javob: davigatel aylanish chastotasi $704 \frac{aylan}{\min}$ dan etarlicha farqlanishi kerak.

5.4. REZONANS HODISASI.

Majburiy tebranishda muhitning qarshiligining tebranish amplitudasiga ta'sirini ko'raylik.

$$A = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2}} \tag{5.26}$$

$h = H / m, \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad n = \mu / 2m$.

So'nish koeffitsienti n ning o'sishi majburiy tebranish amplitudasini kamaytiradi.

μ - muhitning qarshiligi bo'lmaganda $n = 0$ amplituda

$$A = \frac{h}{\left|\omega^2 - p^2\right|} \tag{5.27}$$

$p = 0 \quad A_0 = \dfrac{h}{\omega^2}$ bo'ladi.

Qarshilik bo'lganda majburlovchi kuchning chastotasi p ning A ga ta'sirini ko'ramiz.

Ko'rinadiki maksimal A amplituda (5.26) formula o'ng tomoni maxrajining minimal qiymatiga mos keladi.

$$f(p) = \left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2 \tag{5.28}$$

$$f'(p) = 4p\left[p^2 - (\omega^2 - 2n^2)\right] \tag{5.29}$$

Har doim $p \geq 0$ shuning uchun

$f'(p) < 0 \qquad p < \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$

$f'(p) = 0 \qquad p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$

$f'(p) > 0 \qquad p > \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$

O'z navbatida $p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$ da $f(p)$ funksiya minimumiga erishadi, A amplituda esa maksimumga. Bunday chastota kritik chastota bo'ladi.

$$p_k = \sqrt{\omega^2 - 2n^2} \tag{5.30}$$

Uning aniqlanishini ko‘ramiz. Oxirgi (5.30) formuladan ko‘rinadiki, kritik chastota va maksimal amplituda so‘nish koeffitsientining $n < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ qiymatlaridagina mavjud bo‘lishi mumkin. Aks holda $n \geq \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ da (5.29) binoan $f'(p) \geq 0$ bo‘ladi. Bunda n ning berilgan qiymatida p ning o‘sishi (5.28)dan $f(p)$ ning o‘sishiga olib keladi. SHuningdek A $A_0 = h/\omega^2$ dan nolgacha manoton kamayadi, bunda $p = 0$

$$A_0 = \frac{H}{m} \cdot \frac{m}{k} = \frac{H}{k} \qquad F = kx$$

$H = A_0 k$ $\qquad F = A_0 k \qquad F = H$ muvozanat holati.

Kritik chastota (5.30) qiymatini (5.26) formulaga qo‘yib maksimal amplituda uchun yozamiz.

$$A_{\max} = \frac{h}{\sqrt{\left[\omega^2 - (\omega^2 - 2n^2)\right]^2 + 4n^2(\omega^2 - 2n^2)}}$$

$$A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{\omega^2 - n^2}} \tag{5.31}$$

A maksimal amplitudani $p = 0$ bo‘lgandagi A_0 amplitudaga nisbatiga dinamik koeffitsient deyiladi.

$$\eta = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\omega^2}{2n\sqrt{\omega^2 - n^2}} \tag{5.32}$$

$A_{\max} = A_0 \eta$

Majburlovchi kuch chastotasi erkin tebranish chastotasiga yaqin bo‘lganda majburiy tebranishning amplitudasining keskin oshishiga rezonans deyiladi. Qarshilik bo‘lmasa va majburlovchi kuch chastotasi erkin tebranish chastotasiga teng bo‘lsa majburiy tebranish amplitudasi cheksiz oshadi. Real holda amplituda chekli o‘sadi va konstruksiya buziladi.

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2}} \tag{5.33}$$

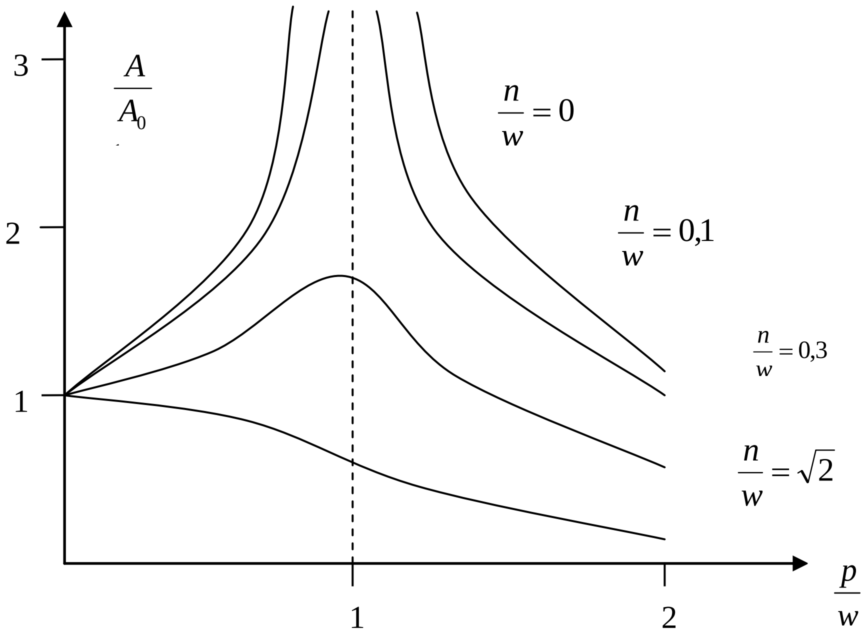
Bu ifodadan quyidagi bog‘lanish topilsa

$$\frac{A}{A_0} = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

$\frac{n}{\omega} = 0$; ; $\frac{n}{\omega} = 0{,}1$ $\frac{n}{\omega} = 0{,}3$; $\frac{n}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ qiymatlar uchun grafik chizilsa p o‘sib

1) ρ_k ga etgandan so‘ng kamayib nolga intiladi. $p_k \sim A_{max}$ 2) $n < \omega$

$p >> \omega$ yoki $p >> \omega$ hollarda qarshilikni inobatga olmasa bo‘ladi.



Rasm 21 . Majburiy tebranma harakatda rezonans hodisasi.

VI Bob. QATTIQ JISMLAR VA SUYUQLIKLAR HARAKATI

6.1. QATTIQ JISM KINEMATIKASI. QATTIQ JISMNING QO‘ZG‘ALMAS O‘Q ATROFIDA AYLANMA HARAKATI.

Mexanikada qattiq jism deganda uning moddiy nuqtalari orasidagi masofa o‘zgarmas bo‘lgan sistema ko‘zda tutiladi. Qattiq jismning fazodagi holatini aniqlaydigan erkin koordinatalar soniga jismning erkinlik darajasi deyiladi. Erkinlik darajasini i harfi bilan belgilanadi. Qattiq jismning erkinlik darajalari soni 6 ga teng. Jism N ta moddiy nuqtadan iborat bo‘lsin. Ularning erkinlik darajalari soni 3N ga teng. Shu nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy 3 tasini tanlab olinadi, ularning orasidagi masofalarning o‘zgarmaslik shartlari soni 3 ga teng. Qolgan N — 3 ta nuqtaning har bittasidan shu uchta nuqtagacha masofalarning o‘zgarmaslik shartlari 3(N — 3) ta bo‘ladi. Demak, sistemaning erkinlik darajalari soni 3N —3 —3(N — 3)=6 ga teng ekan.

Masalan i=1 bo‘lsa jism faqat bir o‘qda, i=3 bo‘lsa u 3ta o‘q bo’yicha harakatlanadi. Qattiq jism kinematikasini o‘rganish deganda, shu jism erkinlik darajasini, jismning ixtiyoriy nuqtasini harakat qonunini, tezligi va tezlanishini, harakat trayektoriyasini aniqlash masalalari tushiniladi. Qattiq jismning harakati quyidagi turlarga ajratib o‘rganiladi.

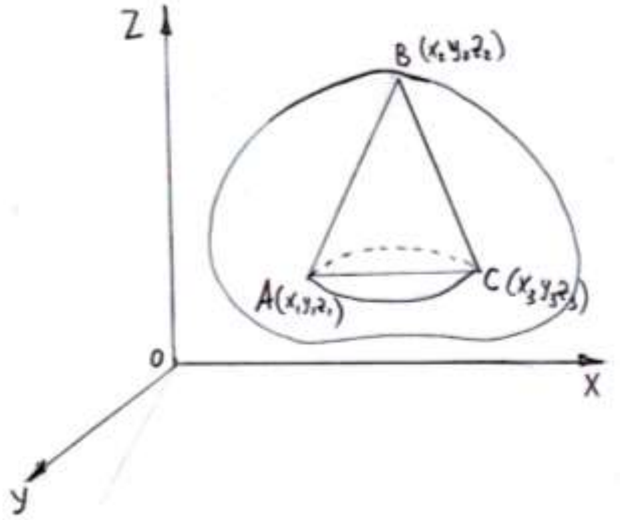
1.Qattiq jism ilgarlanma harakati

2.Qattiq jismning aylanma harakati

3.Qatti jismning yassi parallel harakati yoki tekis figuraning harakati

4.Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofida sferik harakati.

Fazoda harakati cheklanmagan jism erkin qattiq jism deb ataladi. Endi erkin jismning erkinlik darajasini topaylik. Erkin jism vaziyatini bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta nuqta orqali aniqlaylik. Bu nuqtalar A.B.C nuqtalar bo‘lsin (22- rasm).



Rasm 22. Jismning erkinlik darajasini toppish.

Har bir nuqtaning vaziyati uchta koordinata bilan aniqlanadi. Uchta nuqtaning vaziyati 9 ta koordinata bilan aniqlanadi. Lekin A B C nuqtalar bir-biriga bog‘liq. Bu bog‘lanish quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1) + (z_3 - z_2)}$$

$$AC = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)}$$

Tenglama soni uchta (uchta bog‘lanish), umumiy koordinatalar soni 9 ta. Erkinlik darajasi umumiy koordinatalar sonidan (9 dan) bog‘lanishlar soni 3 ni ayrilganiga teng. Demak erkin jismning erkinlik darajasi i=9-3=6 ga teng.

Qattiq jismning ilgarilanma harakati.

Agar qattiq jismning harakati vaqtida uning ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi chiziq o‘z-o‘ziga parallel harakat qilsa bunday harakat qattiq jismning ilgarilanma harakati deyiladi. Masalan, silindr ichidagi porshen harakati, tikish mashinasi ignasining harakati va boshqa mashina va mexanizmlarning harakati ilgarilanma harakatga misol bo‘ladi.

Ilgarilanma harakat qilayotgan jismning istalgan nuqtasining tezligi,tezlanishi va trayektoriyasi quyidagi teoremaga asosan topiladi.

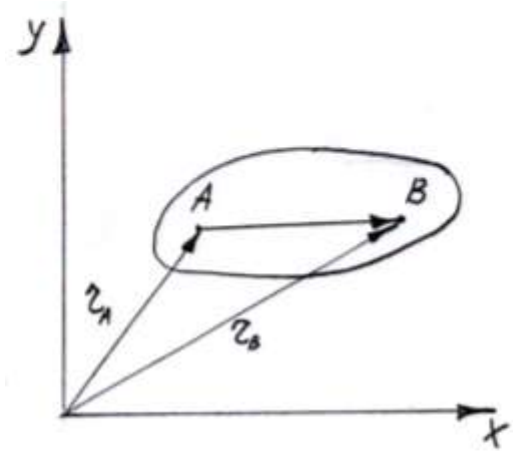
Teorema: Ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismning barcha nuqtalari bir xil trayektoriyalar chizadi (bir-biriga parallel) va har onda jism nuqtalarining tezlik va tezlanish vektorlari bir biriga teng bo‘ladi.

Teoremani isbotlash uchun jismning ixtiyoriy A va B nuqtalarini tanlab olamiz. Bu nuqtalar orasidagi AB masofa qattiq jism ta’rifiga asosan o‘zgarmasdir. Ikkinchi tomondan AB miqdorni vektor orqali quyidagicha yozish mumkin.

ΔOABdan
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \qquad (6.1)$$

B nuqtaning tezligini topamiz.

$$v_B = \frac{d}{dt}(r_A + AB) = \frac{d}{dt}(r_A + AB) = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dAB}{dt} \qquad (6.2)$$



23-rasm. Qattiq jismning harakati

AB=const bo‘lganligi uchun $\frac{dAB}{dt} = const$ (6.3) demak (6.1) dan ko‘rinadiki B nuqtaning tezligi A nuqtaning tezligiga teng. A va B nuqtalar ixtiyoriy bo‘lganligi uchun qattiq jismning hamma nuqtalarining tezlik vektori bir-biriga teng (geometrik teng) deb aytish mumkin. Endi A va B nuqtaning tezlanishini aniqlaylik.

$$a_B = \frac{dv_B}{dt}$$ (6.4) (6.3) ga asosan v_B ning o‘rniga v_A ni qo‘ysak

$$a_B = \frac{dv_B}{dt}$$ (6.5) ifoda hosil bo‘ladi.

B nuqtaning tezlanishi A nuqtaning tezlanishiga geometrik teng. A va B nuqtalar ixtiyoriy bo‘lganligi uchun qattiq jismning hamma nuqtalari bir xil tezlanishga ega degan xulosa chiqadi. Demak ilgarilanma harakat qilayotgan jismni bitta nuqta deb qarash mumkin. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning harakat qonuni, uning istalgan nuqtasining harakat qonuni, uning istalgan nuqtasining harakat qonuni singari bo‘ladi. Amalda qattiq jismning og‘irlik markazini ifodalaydigan nuqtani C bilan belgilab, shu nuqtaning harakat qonuni

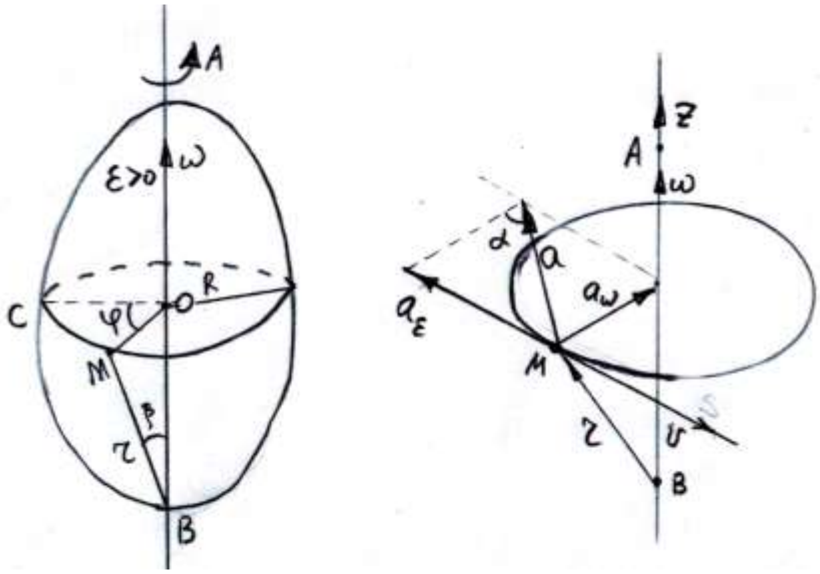
$$x = f(t) \qquad y = f(t) \qquad z = f(t)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu bog‘lanishlar qattiq jismning harakat qonunini ifodalaydi.

6.2.QATTIQ JISMNING AYLANMA HARAKATI

Agar qattiq jism harakati vaqtida uning hamma nuqtalari markazi aylanish o‘qi deb aytiladigan bir to‘g‘ri chiziqda yotgan konsentrik aylanalar chizsa, bunday harakat aylanma harakat deyiladi. Bu aylanalarning markazi aylanish o‘qida yotadi. Qattiq jismning aylanma harakatiga misol qilib Yerning o‘z o‘qi atrofida aylanishi, elektro-motorlarning harakati, mashina g‘ildiraklarining harakati kabilarni keltirish mumkin.

Faraz qilaylik AB o‘q atrofida aylanadigan qattiq jism berilgan bo‘lsin (24-rasm).



24-rasm. Qattiq jismning aylanma harakati

Jismning istalgan aylanish o‘qiga nisbatan vaziyatini burilish burchagi φ orqali quyidagicha topamiz. AB o‘qni Z o‘qi deb olaylik. Burilish burchagining ishorasini quyidagicha aniqlaymiz. Agar Z o‘qi oxiridan qaraydigan kuzatuvchi jism aylanishini soat milli yo‘nalishiga teskari yo‘nalishida ko‘rsa, burilish burchagi musbat aks holda manfiy bo‘ladi. Burchak radianlarda o‘lchanadi.
$1rad=180^0/\pi=57°\ 17^1\ 45''$. Agar φ ma’lum bo‘lsa, jism nuqtalarini sanoq sistemasiga (OC ga) nisbatan vaziyatini aniqlash mumkin. Jism bir marta aylansa φ =2π ga teng bo‘ladi. N marta aylansa φ=2πN bo‘ladi. Jismning vaziyatini aniqlash uchun φ ni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalash lozim. φ=φ(t) boglanish qattiq jism aylanma harakatini ifodalab, uni harakat qonuni deyiladi.

Aylanma harakatni xarakterlash uchun burchak tezlik va burchak tezlanish tushunchalari kiritiladi. Burchak tezlik deb birlik vaqt ichida burilish burchagi o‘zgarishiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi.

Faraz qilaylik Δt vaqt oraligida jism Δφ burchakka burilsin. Bu xolda $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ nisbat o‘rtacha burchak tezlik deyiladi.

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (6.6)$$

oniy burchakli tezlikni aniqlash uchun (6.6) dan $\Delta t \to 0$ nolga intilgandagi limitini olamiz.

Burilish burchakdan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosila burchak tezlikka bo‘ladi. Jismning aylanishi vaqtida burchak tezlik vektori o‘zgarishi mumkin. Δt vaqt ichida burchak tezlik vektori Δω ga o‘zgarsa, burchak tezlanishi yuzaga keladi.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (6.7)$$

Bu ifoda o‘rtacha burchak tezlanish deyiladi. Δt →0 vaqt cheksiz kichik bo‘lsa, burchak tezlanishni oniy qiymatini topamiz. (6.7) ning Δt →0 holdagi limiti oniy burchakli tezlanishini beradi.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad (6.8)$$

Burchak tezlik va burchak tezlanish tushunchalari faqat qattiq jism uchun ma’noga ega. Burchak tezlik va burchak tezlanish vektor kattalikdir. Ularning yo‘nalishi parma qoidasidan topiladi. Bu qoida quyidagidan iborat. Agar parmaning dastasini jismning aylanish yo‘nalishi bo‘yicha aylantirsak, parma uchini yo‘nalishi ω ning yo‘nalishini ko‘rsatadi. Agar dφ>0 bo‘lsa yuqoriga aks holda pastga qarab yo‘nalgandir. dω>0 bo‘lsa ω va ε vektori bir xil yo‘naladi. dω < 0 bo‘lganda ω va ε vektorlari qarama- qarshi yo‘nalgan bo‘ladi. dω < 0 ,bo‘lganda ε<0 bolib jism sekinlashuvchan harakat qiladi.

Shunday qilib ω va ε vektorlarining modullari

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \qquad (6.9)$$

ko‘rinishida yoziladi.

Qattiq jismning M nuqtasini chiziqli tezligini topaylik. Bu tezlik moduli.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

24-rasmdan R=OM ΔS=RΔφ bo‘lganligi uchun

$$v = R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega \qquad (6.10)$$

ga teng ga teng.

(6.10) dan ko‘rinadiki.nuqta o‘qdan qancha uzoqda joylashgan bo‘lsa tezlik shuncha katta bo‘ladi. Chiziqli tezlikni M nuqtani ifodalovchi radius vektor orqali ifodalaylik. 24-rasmdan OM=R=r sinβ (6.11)

ga teng. Bu yerda r vektori bilan ω-vektori orasidagi burchak β ga teng. (6.11) ni (6.10) ga qo‘ysak v=rsinβ ni hosil qilamiz.

Ma’lumki, v= ωrsinβ=ωR (6.12)

Chiziqli tezlik vektori v burchak tezlik vektori ω ni r radius vektorga bo‘lgan vektorial ko‘paytmasiga teng. v ning yo‘nalishi parma qoidasidan topiladi. Ma’lumki $v = \frac{dr}{dt}$ edi. Shu ifodani (6.12) ga qo‘ysak $\vec{\omega}\times\vec{r} = \frac{dr}{dt}$ (6.14)

hosil bo‘ladi. Bu (6.14) ifoda Eyler formulasi deb ataladi. Agar r-radius vektorning o‘rniga birlik vektorlar (ortalar) i, j,k ni ishlatmoqchi bo‘lsak, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\vec{\omega}\times\vec{i} = \frac{di}{dt} \qquad \vec{\omega}\times\vec{j} = \frac{dj}{dt} \qquad \vec{\omega}\times kj = \frac{dk}{dt} \qquad (6.15)$$

ifodalar Puasson formulalari deyiladi. Endi jismning chiziqli tezlanish vektorini topaylik. Tezlanish ta’rifiga asosan (6.13) dan foydalanib yozamiz.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\times r) = \frac{d\omega}{dr}\times r + \omega\frac{dr}{dt} \qquad (6.16)$$

Bu yerda $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ va $v = \frac{dr}{dt}$ ekanligini eslasak

$$a = a\times r + \omega\times v \qquad (6.17)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz (6.18)

$a_r = a\times r$, $a_\omega = \omega\times v$

Oxirgi tenglamalardagi a_ε va a_ω ni mos ravishda urinma tezlanish va markazga intiluvchi tezlanish deyiladi.

Bu a_ε tezlanish vektori tezlik vektori bo‘yicha yo‘nalib, ε ning ishorasiga qarab v bilan bir xil yo‘nalishda yoki qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘ladi. Rasmdan a_ε ning qo‘ylish nuqtasi tanlangan M nuqtada joylashgan, moduli esa $a_\varepsilon = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}\,\vec{r})$ ga teng. a_ε ning yo‘nalishi parma qoidasidan topiladi. a_ω esa o‘qqa intiluvchi yoki markazga intiluvchi tezlanish deyiladi. a_ε va a_ω vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib ularning yig‘indisi to‘liq tezlanish deyiladi.

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega \qquad (6.19)$$

uning moduli esa $a = \sqrt{a_\omega{}^2 + a_\varepsilon{}^2}$ (6.20) ga teng bo‘ladi.

To‘liq tezlanishning yo‘nalishi α burchak orqali ifodalanadi.

$$tg\alpha = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega} \qquad (6.21)$$

Endi a_ε va a_ω larni modullarnini topamiz.

$$a_\varepsilon = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}\,\vec{r}) \qquad (6.22)$$

$r\sin(\vec{\varepsilon}\,\vec{r}) = r\sin\beta = R$ chunki a_ω ning moduli esa $a_\omega = \omega v \sin(\vec{\omega}\,\vec{v})$ rasmdan $\sin(\omega v) = 1$va $a_\omega = \omega v$ bo‘ladi. $v = \omega r$ ni hisobga olsak $a_\omega = \omega^2 R$ (6.23) bo‘ladi. (6.22) va (6.23) ni (6.20) ga qo‘ysak

$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ (6.24) ga teng bo‘ladi. $tg\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ ga teng.

Shunday qilib, qattiq jism qo‘zg‘almas Z o‘qi atrofida aylanganda, yuzaga keladigan ω, v, a, vektorlarining proyeksiyalarini topish mumkin. Chiziqli tezlik vektorini burchak tezlik ω ning ω_x , ω_u ω_z va r radius vektorning proyeksiyalari xyz, orqali quyidagicha uchinchi tartibli diterminant bilan aniqlanadi

$$v = \omega r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = (y\omega_z - z\omega_y)i + (z\omega_x - x\omega_z)j + (x\omega_y - y\omega_x)k \qquad (6.25)$$

bunda i,j,k lar X,Y,Z, o‘qlarida yotadigan birlik vektorlar. (6.25) dan foydalanib qattiq jism M-nuqtasining v- tezligini, o‘qlardagi v_x, v_y, v_z proyeksiyalarini topish mumkin.

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (6.26)$$

yoki (55) ni quyidagicha yozamiz.

$$V = (y\omega_z - z\omega_y)i + (z\omega_x - x\omega_z)j + (x\omega_y - y\omega_x)k \qquad (6.27)$$

(6.27) ni (6.26) bilan solishtirsak $v_z = \omega_x y - \omega_y x$ (6.28)

bo‘ladi. (6.28) formula Eyler formulalari deyiladi.

Qattiq jismning aylanma harakatini burchakli tezlik va burchak tezlanish orqali klassifikasiyalash.

ω, a_ε, va a_ω kattaliklarning qiymatlari o‘zgarishi bilan jismning aylanma harakati xarakteri o‘zgarishini ko‘raylik. $\omega = const$ bo‘lsin. Bu holda jism tekis aylanma harakat qiladi. Burchak tezlik ta’rifiga asosan

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const \qquad (6.29)$$

(6.29) dan $$\varphi = \int_o^t \omega dt = \omega_0 t + c_1$$

bo‘ladi. Oxirgi ifodadan c_1 ni topaylik.

Boshlang‘ich shartdan t=0, $\varphi=\varphi_0=0$ bo‘lgani uchun $\varphi=\omega_0 t$ (6.30).

Bu tekis aylanma xarakat tenglamasidir. Qattiq jismning tekis aylanma harakatiga misol qilib erni o‘z o‘qi atrofida harakati, soat mili harakati kabi harakatlarni keltirish mumkin. Erning burchak tezligi

$\omega = \dfrac{2\pi}{24\cdot 3600} = 0{,}000072\dfrac{1}{c}$ ga teng

2) Jismning burchak tezlanishi $\varepsilon = const$ bo‘lgan holni ko‘raylik.

Bunda $\varepsilon \neq 0$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad (6.31) \qquad d\omega = \varepsilon dt$$

Bundan ω ni topamiz.

$$\omega = \int_o^t \varepsilon dt = \varepsilon_0 t + c_2$$

boshlangich shartni tenglamaga qo‘yamiz. t=0, $\omega=\omega_0$ da $\omega_0 = \varepsilon.0 + c_2$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t \qquad (6.32)$$

ε<0 bo‘lsa manfiy ishora bilan olinadi.

(6.32) tenglamadan burilish burchagini keltirib chiqarish mumkin.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad d\varphi=\omega dt=(\omega_0 \pm \varepsilon t)dt$$

oxirgi ifodani integrallab φ ni topamiz.

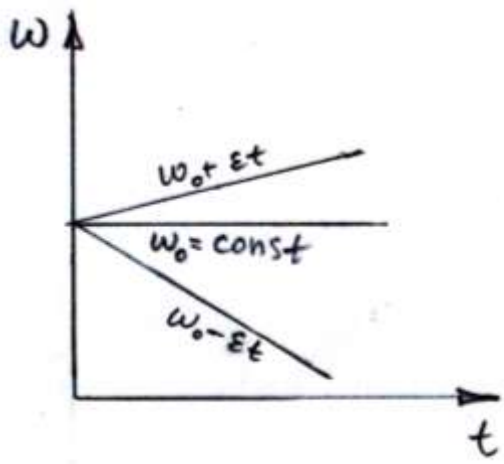
$$\varphi = \int_o^t (\omega + \varepsilon t)dt = \omega_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_3$$

Boshlang‘ich shartdan foydalanib c_3 ni topamiz. t=0, $\varphi=\varphi_0$ =0 shartlarni oxirgi tenglamaga qo‘ysak c_3 =0 bo‘ladi.

Demak $$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (6.33)$$

Bu ifoda tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi deb ataladi. + ishora tekis tezlanuvchan - ishora tekis sekinlashuvchan harakatga mos keladi.

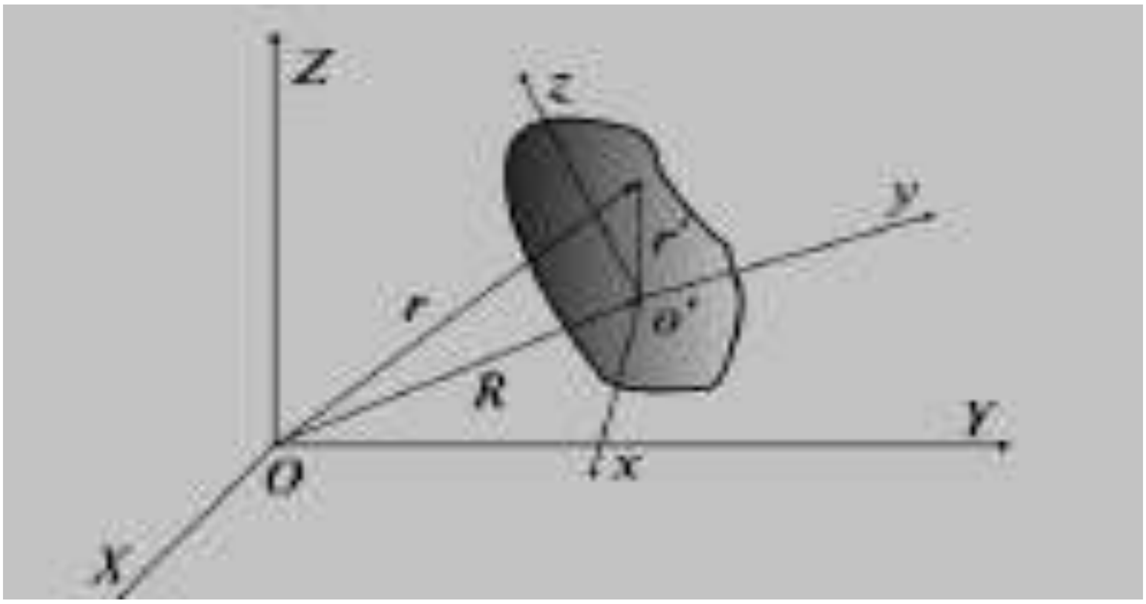
Tekis o‘zgaruvchan harakatning grafigi (25-rasm) da keltirilgan.



25-rasm. Tekis o‘zgaruvchan harakat

6.3. ILGARILLANMA VA AYLANMA HARAKATLANAYOTGAN QATTIQ JISM HARAKAT TENGLAMALARI.

Qattiq jismning harakatini o‘rganish uchun ikkita koordinat sistemalarini kiritish maqsadga muvofiqdir. Ularning biri laboratoriya sistemasi bo‘lib, uning o‘qlari katta harflar bilan belgilanadi — X, Y, Z. Ikkinchisi — shu qattiq jism bilan mahkam bog‘langan sistema, uning o‘qlarini x, y, z deb belgilanadi. Bu sistemaning boshini jismning inersiya markazida joylashtirish qulaydir.



Rasm 26. Qattiq jismning harakati

Qattiq jismning oltita erkinlik darajasi bor, shulardan uchtasi uning ilgarilanma harakati, qolgan uchtasi esa uning aylanma harakati bilan bog‘liq. Demak, qattiq jism harakat tenglamalarining soni ham oltita bo‘lishi kerak. Ilgarilanma harakat jismning impulsi bilan bog‘liq.

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \vec{f}_a \qquad (6.34)$$

Qattiq jism moddiy nuqtalarning yig‘indisi bo‘lgani uchun uning harakat tenglamasini olish uchun (6.34) ni hamma moddiy nuqtalar bo‘yicha yig‘ib chiqish kerak.

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a \qquad \vec{F} = \sum_a \vec{f}_a \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{6.35}$$

Jismning har bir nuqtasiga shu jismning boshqa nuqtalari tomonidan kuchlar ta’sir qiladi, ammo bunday kuchlarning umumiy kuch ***F*** ga qo‘shgan hissasi nolga teng.
Qattiq jismning aylanma harakati uning impuls momenti bilan bog‘langan. Impuls momentining vaqt bo‘yicha hosilasi quyidagicha:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{f}_a] = \vec{K} \qquad \vec{K} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{f}_a] \tag{6.36}$$

To‘liq kuch momentini

Ω burchak tezlik bilan aylanayotgan ixtiyoriy *A* vektorning vaqt bo‘yicha o‘zgarish qonuni:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{A}] \tag{6.37}$$

Agar tenglamaning o‘ng tomoniga shu vektorning qo‘zg‘aluvchan sistemadagi hosilasi(uni dA’/dt deb belgilaylik) qo‘shib qo‘yilsa

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{A}] \tag{6.38}$$

A vektor sifatida impuls *P* va moment *M* ni ko‘zda tutsak, quyidagi tenglamalar olinadi:

$$\frac{d\vec{P}'}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{P}] = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{M}'}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{M}] = \vec{K} \tag{6.39}$$

Bu tenglamalarning ikkinchisi qattiq jism uchun Eyler tenglamalari deyiladi
To‘liq impuls uchun $P = mV$ deb olib (m- jismning massasi) birinchi

$$m\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)=F_1 \qquad m\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)=F_2$$

$$m\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)=F_3$$

tenglamalarni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

(6.40)

Impuls momenti va inersiya momenti orasidagi $M_i= I_i\Omega_i$, i = 1 , 2 , 3 munosabatdan, Eyler tenglamalarini ham komponentalar ko’rinishida yozib olinadi:

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=K_1 \qquad I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=K_2 \qquad (6.41)$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=K_3$$

Ko‘rinib turibdiki, bu tenglamalar burchak tezliklari uchun tenglamalardir

6.4.SUYUQLIKLAR MEXANIKASI

Tutash muhitlar mexanikasi

Suyuqlik va gazlarning mexanik harakatini o‘rganganda ularni tutash muhit sifatida ko‘riladi. Jismlar mexanikasida «moddiy nuqta» tushunchasi qanday ro‘l o‘ynagan bo‘lsa gidrodinamikada «suyuqlik nuqtasi», «suyuqlik zarrachasi» tushunchalari shunday rol o‘ynaydi. Shu bilan «suyuqlik zarrachasi» ichidagi molekulalar soni uni tutash muhit deyishimizga yetarli bo‘lgan darajada katta bo‘lishi kerak. Normal sharoitda havoning 1sm3 hajmida $2{,}7\cdot10^{19}$ ta molekula bor. Suyuqliklarda bir kub santimetrning ichida yanada ko‘proq molekulalar bo‘ladi $\sim10^{22}$

Suyuqlikning mexanik harakatini o‘rganish uchun - zichlik ρ, bosim p va tezlik v - tenglamalar topish kerak .Ixtiyoriy bir hajm V ni olamiz. zichlikning ta’rifi bo‘yicha

$$m=\int_V\rho dV \qquad \frac{\partial m}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho dV \qquad (6.42)$$

Oqim zichligini - birlik vaqt ichida birlik sirtqan o‘tgan modda miqdorini - quyidagicha ta’riflaylik: oqim vektori $j = \rho v$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} \qquad (6.43)$$

Shularni hisobga olib V hajm uchun modda balansi tenglamasini yozamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} \qquad (6.44)$$

Tenglamaning o‘ng tomoniga Gauss teoremasi qo‘llanilsa

$$\int_V div\,\vec{j}\, dV = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right) dV = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (6.45)$$

Hosil bo‘lgan tenglamaning nomi uzliksizlik tenglamasi. Agar bosim gradiyentidan (Δp) tashqari kuchlar bo‘lsa ularning zichligini umumiy *f* harfi bilan belgilaymiz. Harakat tenglamasini tuzish uchun massa zichligining tezlanishga ko‘paytmasini kuch zichligiga tenglashtirish kerak:

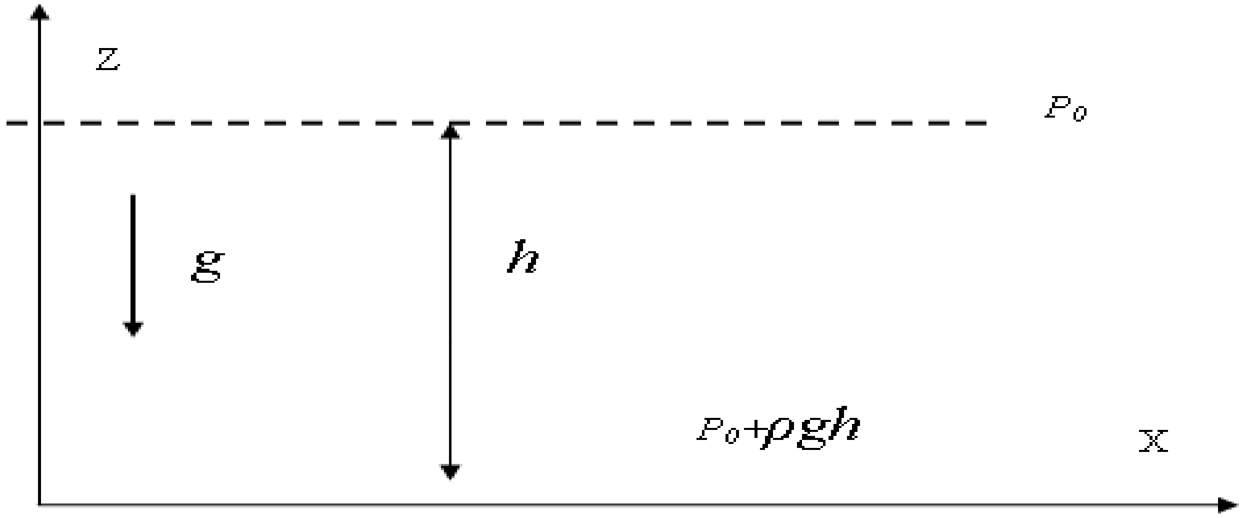
$$-Sdp = \vec{a}\rho S d\vec{r} \qquad \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \qquad (6.46)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \qquad (6.47)$$

Bu Eyler tenglamasi o‘zining sodda ko‘rinishiga qaramasdan ko‘pgina murakkab fizikaviy jarayonlarni ifodalaydi. Agar suyuqlik tashqi gravitatsion maydonda bo‘lsa f= ρg deb olish kerak:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \qquad (6.48)$$

Bosim gradiyentining oldidagi minus ishorasi suyuqlik bosim yuqori nuqtadan bosim kichikroq nuqta tomonga harakat qilishini bildiradi.



27-rasm. Suyuqlik gravitatsion maydonda

Eyler tenglamasini o‘rganishni eng sodda hol - suyuqlik gravitatsion maydonda tinch turgan bo’lsin. Bu holda tezlik nolga teng va Eyler tenglamasi keskin soddalashadi:

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0 \tag{6.49}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad va \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ya’ni, bu yo‘nalishlarda bosim o‘zgarmas bo‘ladi: p = const.

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \qquad p(z) = p_0 - \rho g z \tag{6.50}$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Ландау Л.Д., Лифщиц Э.М. Механика М.: Наука. 1973. 208 с.
2. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука. 1975.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Э.М. Назарий механика қисқа курси. II қисм. Тошкент. 1972.
4. Раҳимов А.Ў. Классик механика. Тошкент. «Ўқитувчи». 1988., 352 б.
5. Коткин Л.Г., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М.: 1977.
6. Гречко Л.Г., и др. Сборник задач по теоретической физики. М.: 1984

MUNDARIJA

ОГЛАВЛЕНИЕ

TABLE OF CONTENTS

“FAN VA TA’LIM” NASHRIYOTI

Terishga berildi 30.11.22. Bosishga ruhsat berildi 28.12.22. Bichimi 84x108 1/32.
Times New Roman garniturasida offset usulida chop etildi. Nashr bosma tabog`i
32,0. Shartli bosma tabog`i 32,0.

“FAN VA TA’LIM” Nashriyotida ro`yxatdan o`tkazildi.
“Dunyo Poligraf Plyus”x/k bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro viloyati, Buxoro shahar, Islom Karimov ko`chasi, 37/1
+998914165009