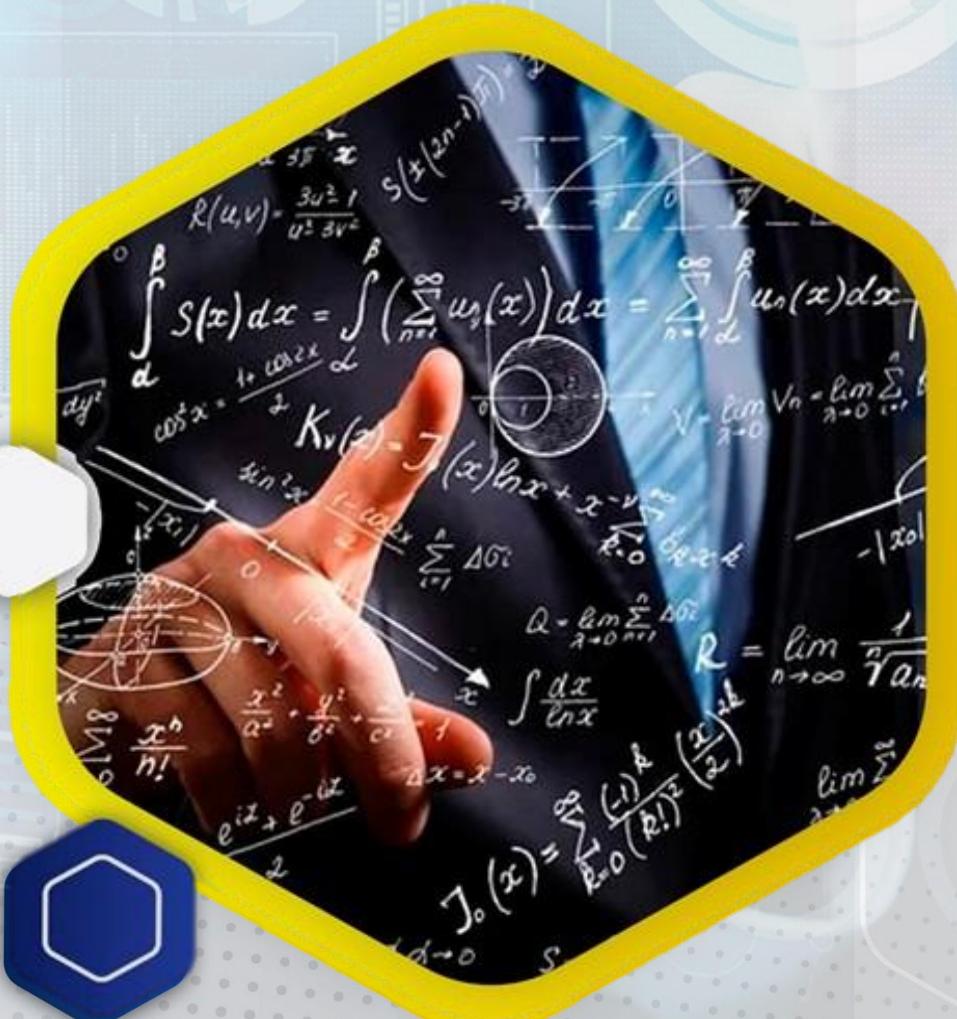


“FIZIKA, MATEMATIKA VA SUN'IY INTELLEKT TEXNOLOGIYALARINING DOLZARB MUAMMOLARI”

XALQARO ILMIY-NAZARIY ANJUMAN MATERILLARI





CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL
CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Bukhra-2025

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x-hk) \right) * \phi_0(x) \quad (4)$$

Here C_k are the coefficients of formula (1.2), $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of

the interval $(0, 1]$, δ is the Dirac's delta-function, $\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-\beta)$

Problem 1: Finding the optimal coefficients of $C_k = C_k^0$ that minimize $\|\ell\|$.

Theorem 1. The coefficients of the quadrature formula in the form (2) that minimizes the norm of the error functional are as follows:

$$C_k^0 = C = \frac{4(2-e^h - e^{-h})}{e^{-h} - e^h - 2h} \quad (5)$$

The optimal coefficient, i.e. $\frac{4(2-e^h - e^{-h})}{e^{-h} - e^h - 2h}$, tends to 0 at expression $h \rightarrow 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(2-e^h - e^{-h})}{e^{-h} - e^h - 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(-e^h + e^{-h})}{-e^h - e^{-h} - 2} = 0$$

References

1. Shadimetov M.Kh. Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space. Uzbek Math. Zh., no. 2, 1998, 76-86.
2. Maksudov Sh., Salokhiddinov M.S., Sirojiddinov S.Kh. Theory of Functions of a Complex Variable. – Tashkent, 1976, – 363 pages.
3. S.S. Azamov, H. M. Qobilov Optimal quadrature formulas in the space of periodic functions journal of International scientific journal of computing technologies and mathematical modeling
4. Hayotov A.R., Khayriev U.N, Makhkamova D. Optimal quadrature formula for approximate calculation of integrals with exponential weight and its application. Bulletin of the Institute of Mathematics, no 2, vol 4, 2021, 99-108.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Жалолов Фарход Исомидинович

Бухарский государственный университет,

f.i.jalolov@buxdu.uz

Исомидинов Бекзоджон Озоджон ўғли

Бухарский государственный университет

Нам известно, что построение квадратурных формул, основанное на методах функционального анализа, было начато в работах А.Сарда [1] и С.М.Никольского [2], для кубатурных формул С.Л.Соболева [3]. Работы многих авторов посвящена построением оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом предложенных С.Л.Соболевым [4-8].

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_{T_1} p(x)f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = p(x) \varepsilon_{(T_1)}^{(x)} - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}), \quad (2)$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_λ - узлы и коэффициенты квадратурной формулы.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом [3].

Норма определяется по формуле

$$\|f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2, \quad (3)$$

где \hat{f}_k - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{2\pi i k x} dx$.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой квадратурной формулы (1). Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов c_λ и узлов $x^{(\lambda)}$. Если

$$\left\| \ell/\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^0 = \inf_{c_\lambda(x), x_\lambda} \left\| \ell/\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|, \quad (4)$$

тогда функционал $\ell(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую квадратурную формулу назовем оптимальной квадратурной формулой.

Задача 2. Найти значения коэффициентов c_λ и узлов x_λ квадратурной формулы (1) которые удовлетворяют равенству (4).

Коэффициенты c_λ и узлы $x^{(\lambda)}$, удовлетворяющие равенству (4), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами квадратурной формулы.

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная весовая квадратурная формула используя дискретный аналог дифференциального оператора и вычислена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряженном пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ и найдена экстремальная функция для данной квадратурной формулы.

Справедлива следующая.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell/\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{p}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{p}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \quad (5)$$

где c_λ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы вида (1).

Основным результатом являются следующая.

Теорема 2. В периодическом пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (1) с экстремальной функцией

$$\psi_\ell(x) = \hat{p}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda + \frac{1}{(2\pi)^{10}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left(\hat{p}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right) e^{-2\pi i k x}}{k^{10}}, \quad (6)$$

и функционалом погрешности (2), коэффициенты которой при $m=3$ имеют следующий вид

$$c_\lambda = \frac{\hat{p}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{10}} \frac{1}{N^{10}} \sum_{k \neq 0}^{\hat{k}} \frac{\hat{p}_k}{k^{10}}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{10}} \frac{1}{N^{10}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{10}} \right)}, \quad (7)$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_λ узлы и коэффициенты квадратурной формулы $\beta = \overline{1, N}, N = 2, 3, \dots$.

Литература

1. Sard. A. Integral representations of remainders, Duke Math J. 1948. V15, 333–345
2. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.//Успехи математических наук, –1950, –Т.5, вып.2(36), – С. 165–177.
3. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М. Наука, 1974г. 808 с.
4. Kh Shadimetov, F Nuraliev. Optimization of quadrature formulas with derivatives. Problems of computational and applied mathematics, 2017, No.4, pp 61-70.
5. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.
6. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.
7. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И. О построении наилучших квадратурных формул в пространстве Соболева. Материалы международного конгресса. Алматы. 30 июнь – 4 июль. 2009.
8. Shadimetov Kh.M., Jalolov Ik.I. Algorithm for constructing a discrete analog $D_3[\beta]$ of a single operator. Problems of computational and applied mathematics, 2015, No.2, -pp. 48-53.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА $H_2^\mu(R)$.

Жалолов Икром Исомиддинович

Ташкентский государственный транспортный университет,

o_jalolov@mail.ru

Мухсинова Мехринисо Шавкатовна
докторант Бухарского государственного университета

Основной целью настоящей работы является нахождении оценка погрешности, существование и единственность оптимальной решетчатых интерполяционной формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ для непериодических функций.

В настоящей работе исследуется задача оптимальных интерполяционных формул в пространств $W_2^{(m)}(R)$.

Определение 1. Пространства $W_2^{(m)}(R)$ определяется как замыкания бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме [1,8]

$$\|f(x)| W_2^{(m)}(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1} \left[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Здесь F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье :

$$F[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i y x} dx \quad \text{и} \quad F^{-1}[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx$$

В работе [2] С. Л. Соболевым решена задача интерполяирования функций n -переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена задача 1.

Одной из основных задач теории интерполяирования является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \equiv P_f(x)$ над данным классом ошибки функций [2]. Значение этой функции в некоторой фиксированной точке z есть функционал, определенный как над функциями f :

$$\begin{aligned} <\ell, f> &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}(z) f(x^{(\lambda)}) = \\ &= \int_0^1 \left[\delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}(z) \delta(x-x^{(\lambda)}) \right] f(x) dx, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{где } P_f(z) = \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}(z) f(x^{(\lambda)}) \tag{2}$$

интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}(z) \delta(x-x^{(\lambda)}), \tag{3}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы.

$C_{\lambda}(z)$ - коэффициенты, а $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы $P_f(z)$, $x^{(\lambda)} \in [0,1]$, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака, $f(x) \in W_2^{(m)}(R)$.

Определение 2. Функция $\psi_{\ell}(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell(x)$, если для которой выполняется следующее равенство

$$|\langle \ell(x), \psi_{\ell}(x) \rangle| = \|\ell|W_2^{(m)*}(R)\| \cdot \|\psi_{\ell}|W_2^{(m)}(R)\|.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности $\ell(x)$ для интерполяционной формулы $P_f(z)$ является

$$\psi_{\ell}(x) = v_m(x-z) - \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}(z) v_m(h\lambda), \tag{4}$$

а норма функционала погрешности данной интерполяционной формулы выражается следующим равенством

$$\|\ell|W_2^{(m)*}(R)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[(1+y^2)^{-m} \cdot F[\ell(x)](y)](x) \right|^2 dx, \tag{5}$$

где $v_m(x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-m}](x)$, $C_{\lambda}(z)$ - коэффициенты интерполяционной формулы $P_f(z)$,

$h = \frac{1}{N}$ и N число узлов.

При исследовании оптимальных формул в теории интерполяирования в первую очередь возникает вопрос о существовании и единственности таких формул. Для того, чтобы доказать существование и единственность оптимальных интерполяционных формул нам необходима

имеет решение первой задачи, т.е. мы получили явный вид нормы функционала погрешности (5) интерполяционной формулы (2).

Лемма. Система $\left\{ \nu_{\frac{m}{2}}(x - x^{(\lambda)}) \right\}_{\lambda=0}^N$ является линейно независимой системой

пространстве $L_2(R)$ и линейная оболочка этой системы является $(N+1)$ -мерным подпространством в $L_2(R)$.

Равенство (5) связывает задачу построения интерполяционной формулы (2) с задачей приближения в L_2 функций $\nu_{\frac{m}{2}}(x - z)\varepsilon_{[0,1]}(x)$ линейной комбинации функции $\nu_{\frac{m}{2}}(x)$ и ее сдвигов на $x^{(\lambda)}, \lambda = 0, 1, \dots, N$ в норме пространства $L_2(R)$.

Из этой леммы и теории существования и единственности наилучшего приближения под пространством следует существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы (2).

Основной результат является

Теорема 2. В пространстве $H_2^\mu(R)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (2), коэффициенты которой определяются из системы

$$\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \nu_m(x_\alpha - x^{(\lambda)}) = \nu_m(x_\alpha - z), \quad (6)$$

где $\nu_m(x) = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k$ [см. 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.
2. Соболев С.Л. Об интерполировании функций n переменных. Докл. АН СССР, 1961, 137,-с. 778-781.
3. Лоран П.Ж Аппроксимация и оптимизация. М. Мир, 1975. 496с.
4. Шодиметов Х.М, Маматова Н.Х. Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009, №3, -С.180-186.
5. Хаётов А.Р. Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2010, №2, -С.173-179.
6. Жалолов И. И. Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, № 3/1 (50). 2023. -с. 42-53.
7. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Наука, физ-мат, М.1941.
8. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций, и теории вложения, УМН, 1965, том 20, выпуск 1, с. 3-74.

УДК 517.518.392

| | |
|--|-----|
| Akramov Ikrom Isroil o'g'li Spectral Deferred Correction Methods Collocation Formulation and Explicit Iteration | 87 |
| Б. Р. Абдуллаев Задача для псевдопараболических интегро – дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями | 88 |
| Жураев Фуркат Мухитдинович Ободной локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа, вырождающегося внутри области | 89 |
| Merajova Shahlo Berdiyevna, Merajov Nursaid Ikrom o'g'li, Sultanova Dilafro'z Xolmurzayevna Bir o'lchovli aralash parabolo-giperbolik tipdagi model tenglama uchun teskari masala | 91 |
| Subhonova Ziyoda Anvar qizi The problem of determining the kernel in the time fractional wave equation | 92 |
| Turdiyev Halim Hamroyevich, Jo'raqulova Aziza Iftixor qizi O'zgaruvchan koeffitsiyentli kasr diffuziya to'qin tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masala | 94 |
| Elmuradova Hilola Botirovna Initial and boundary problem for fractional pseudo-integro-differential equation | 95 |
| Usmonov Rustamjon Isroiljonovich Ikkita qo'zg'almas markazlarning cheklanganlik holida aktiv qismlar uchun analitik yechim | 96 |
| Rasulov Xaydar Raupovich Ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglama uchun nolokal masala haqida | 97 |
| Маликов Зиядилло, Шодиев Дилшод Сирожидинович Задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в областях типа слоя. | 98 |
| Ашурев Равшан Раджабович, Меражов Нурсайд Икром угли Постановка нелокальной обратной задачи для параболического уравнения второго порядка с дробной производной по времени | 100 |
| А.С.Солеева, И.Г.Розет, Я.Мухтаров Режимы стохастики, обострения blow-up и медленного времени в волновой динамике при самоорганизующихся или периодических возмущениях | 101 |
| Турсунов Д.А., Мамытов А.О., Орозов М.О. Разрешимость одного класса обратной задачи дробного порядка | 103 |
| Турсунов Д.А., Садиева А.С. Об одной задачи валле-пуссена с нестабильным спектром | 104 |
| Umarov Sanjar Sunnatovich Grin funksiyasi yordamida masalalar yechish | 106 |

SECTION 3: MODERN PROBLEMS OF ALGEBRA AND GEOMETRY

| | |
|---|-----|
| Ибодуллаева Нафиса Мухитдиновна Решения уравнения монжа-ампера в многосвязной области со вторым краевым условием | 111 |
| Бешимов Рузиназар Бебутович, Манасыпова Резида Замир қизи О некоторых свойствах пространства τ -замкнутых подмножеств топологического пространства | 112 |
| Parmonov Hamid Faxriddin o'g'li Gamilton vektor maydonlar orbitalari | 113 |
| Quljonov O'.N., Ostonov Q., O'rolova O. Geometriya o'qitishda o'quvchilarga zarur va yetarli shartlar tushunchalarini o'rgatish | 115 |
| Rizayev Rustam Kobilovich $P_2(x)$ fazoning fizikadagi ba'zi tatbiqlari | 117 |
| Jiemuratov Rzamurat Esbergenovich Order-preserving functionals functor with finite support and infinite degree | 118 |
| Aslonov Jasurbek, Ergashev Muxammadali Some properties of the curvature of riemannian manifolds with polynomial structure | 127 |

| | |
|--|-----|
| Гульнар Сулаймон кызы Ибрагимли, Махир Джалаал оглы Джалаалов Элементарный математический представлений у детей в дошкольных образовательных учреждениях | 128 |
| O'rolova O, Quljonov O'.N., Ostonov Q. Maktabda o'quvchilarda matematika darslarida kvantorlar va ularga bog'liq tushunchalarni shakllantirish | 130 |
| SECTION 4: COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING | |
| Babaev Samandar Samiyevich, Polvonov Sarvarbek Zafar ugli The algorithm for numerically solving the fredholm integral equation using a weighted optimal quadrature formula | 133 |
| Mirkamol Berdimuradov Comparative Analysis of Unknown Parameters of the Gamma Distribution under Right-Censoring Using MLE and Bayesian Methods | 134 |
| Rahela Abdul Rahim, Zahreddin Muminov, Javlon Karimov Upper bound limit value using non linear difference equations | 136 |
| Абдумумин Маликович Маликов Неравенство типа колмогорова и его некоторые приложения в пространстве $L_{2,\mu}$ | 141 |
| Болтаев Азиз Кузиевич, Мухаммадова Зулфия Аскар кизи Система для нахождения коэффициентов натуральных сплайнов | 142 |
| Sayfullayeva Maftuxa Zafrullayevna, Tadjibayeva Shaxzadaxan Ergashevna, Abduganiyeva Ozoda Ismagilovna Uch karrali integralni hisoblashning algoritmlari va ularning aerodinamik modellashtirishda qo'llanilishi | 144 |
| Azamov Siroj Sobirovich Finding the form of optimal coefficients in the space $W_2^{(2,1,0)}(0,1)$ | 146 |
| Жалолов Фарход Исомидинович, Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўғли Алгоритм нахождении коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ | 147 |
| Жалолов Икром Исомиддинович, Мухсинова Мехринисо Шавкатовна Оценка погрешности, существовании и единственности оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$. | 149 |
| Жалолов Озоджон Исомиддинович, Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўғли Практичные асимптотические оптимальные весовые кубатурные формулы с заданием производных в пространстве Соболева | 152 |
| Mukhiddin I. Muminov, Zafar Z. Jumaev Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined runge-kutta and piecewise constant argument method | 154 |
| Khayriyev Umedjon N., Xiromon Yunus qizi Yusufzoda Constructing a Derivative Optimal Interpolation Formula in Hilbert Space | 156 |
| Khudoyberdiev Azizjon Norjigit o'g'li Quantum stability of the SHA-3 hash function: analysis, vulnerabilities and perspectives | 157 |
| Жалолов Озоджон Исомиддинович, Махмудов Миржалол Мақсуд ўғли Оценка погрешности, существовании и единственности оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $W_2^m(R)$ | 159 |
| Iroda Boltaboyeva, Abdullayev Alisher Ms excelda chiziqli emas tenglamalarni yechish algoritmi | 161 |
| Muminov Mukhiddin Eshqobilovich, Usmonov Navruz Muzaffarovich | 162 |