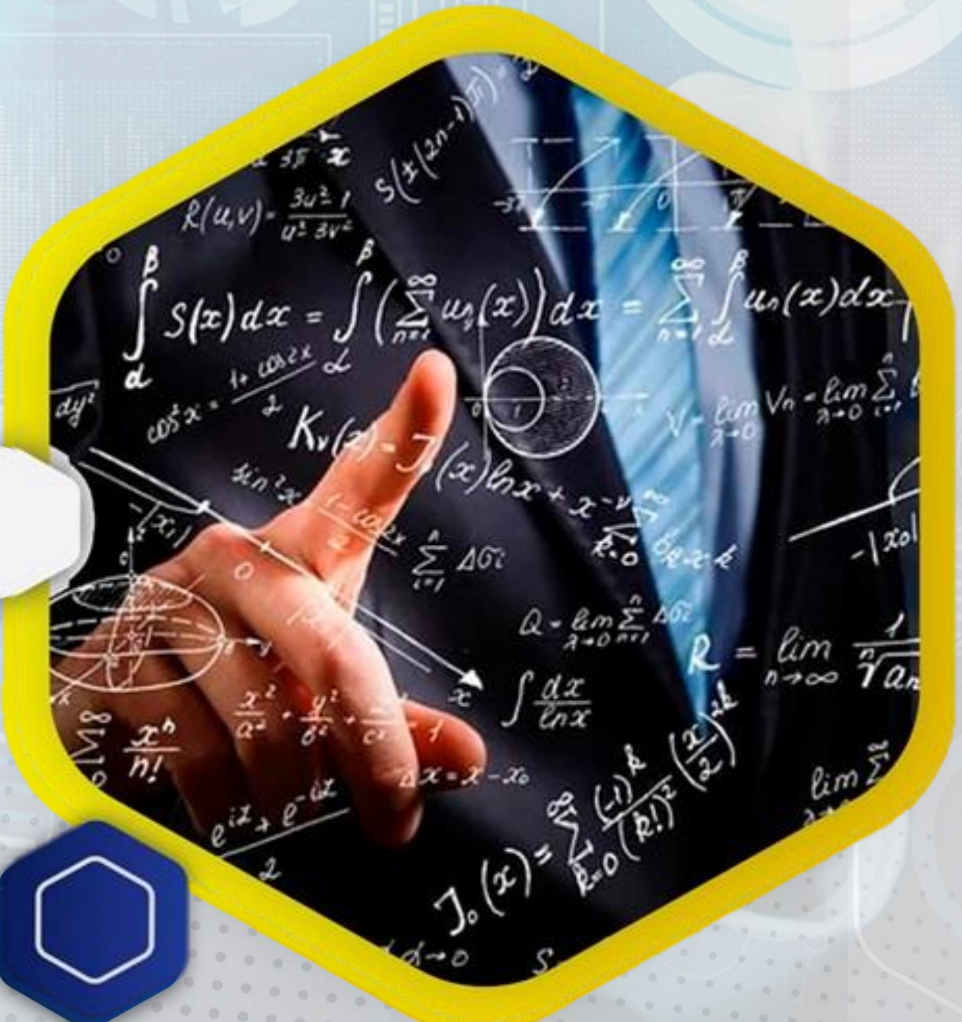
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR
VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

"FIZIKA, MATEMATIKA VA SUN'IY INTELLEKT TEXNOLOGIYALARINING DOLZARB MUAMMOLARI"

XALQARO ILMIY-NAZARIY ANJUMAN MATERILLARI



BUXORO-2025

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR
VAZIRLIGI

BUXORO
DAVLAT
1930 UNIVERSITETI

CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Bukhra-2025

$$\ell(x)=\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{k=1}^{N}C_k\delta(x-hk)\right)*\phi_0(x) \qquad (4)$$

Here C_k are the coefficients of formula (1.2), $h=\frac{1}{N}$, $N\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval (0, 1] , δ is the Dirac's delta-function, $\phi_0(x)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta)$

Problem 1: Finding the optimal coefficients of $C_k=\overset{0}{C}_k$ that minimize $\|\ell\|$.

Theorem 1. The coefficients of the quadrature formula in the form (2) that minimizes the norm of the error functional are as follows:

$$\overset{0}{C}_k=\overset{0}{C}=\frac{4(2-e^h-e^{-h})}{e^{-h}-e^h-2h} \qquad (5)$$

The optimal coefficient, i.e. $\frac{4(2-e^h-e^{-h})}{e^{-h}-e^h-2h}$, tends to 0 at expression $h\to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{4(2-e^h-e^{-h})}{e^{-h}-e^h-2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(-e^h+e^{-h})}{-e^h-e^{-h}-2}=0$$

References

1. Shadimetov M.Kh. Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space. Uzbek Math. Zh., no. 2, 1998, 76-86.
2. Maksudov Sh., Salokhiddinov M.S., Sirojiddinov S.Kh. Theory of Functions of a Complex Variable. – Tashkent, 1976, – 363 pages.
3. S.S. Azamov, H. M. Qobilov Optimal quadrature formulas in the space of periodic functions journal of International scientific journal of computing technologies and mathematical modeling
4. Hayotov A.R., Khayriev U.N, Makhkamova D. Optimal quadrature formula for approximate calculation of integrals with exponential weight and its application. Bulletin of the Institute of Mathematics, no 2, vol 4, 2021, 99-108.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Жалолов Фарход Исомидинович
Бухарский государственный университет,
f.i.jalolov@buxdu.uz
Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўгли
Бухарский государственный университет

Нам известно, что построение квадратурных формул, основанное на методах функционального анализа, было начато в работах А.Сарда [1] и С.М.Никольского [2], для кубатурных формул С.Л.Соболева [3]. Работы многих авторов посвящена построением оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом предложенных С.Л.Соболевым [4-8].

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_{T_1}p(x)f(x)dx\approx\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right), \qquad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x)=p(x)\varepsilon_{(T_1)}^{(x)}-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\delta\left(x-x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_λ - узлы и коэффициенты квадратурной формулы.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом [3].

Норма определяется по формуле

$$\left\|f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)dx\right)^2 + \sum_{k\neq0}|2\pi k|^{2m}\left|\hat{f}_k\right|^2, \tag{3}$$

где $\hat{f}_k$ - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k=\int_{T_1} f(x)e^{2\pi ikx}dx$.

Задача 1. Вычислить ному функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой квадратурной формулы (1). Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов c_λ и узлов $x^{(\lambda)}$. Если

$$\left\|\overset{0}{\ell}\,|\,\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\|=\inf_{c_\lambda(x),x_\lambda}\left\|\ell\,|\,\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\|, \tag{4}$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую квадратурную формулу назовем оптимальной квадратурной формулой.

Задача 2. Найти значения коэффициентов c_λ и узлов x_λ квадратурной формулы (1) которые удовлетворяют равенству (4).

Коэффициенты c_λ и узлы $x^{(\lambda)}$, удовлетворяющие равенству (4), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами квадратурной формулы.

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная весовая квадратурная формула используя дискретный аналог дифференциального оператора и вычислена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряженном пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ и найдена экстремальная функция для данной квадратурной формулы.

Справедлива следующая.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\|\ell/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 = \left|\hat{p}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq0}\frac{\left|\hat{p}_k-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}, \tag{5}$$

где c_λ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы вида (1).

Основным результатом являются следующая.

Теорема 2. В периодическом пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (1) с экстремальной функций

$$\psi_\ell(x)=\hat{p}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda+\frac{1}{(2\pi)^{10}}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\hat{p}_k-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)e^{-2\pi ikx}}{k^{10}}, \tag{6}$$

и функционалом погрешности (2), коэффициенты которой при $m=3$ имеют следующий вид

$$c_{\lambda}=\frac{\hat{p}_0+\frac{1}{(2\pi)^{10}}\frac{1}{N^{10}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{p}_k}{k^{10}}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^{10}}\frac{1}{N^{10}}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^{10}}\right)}, \tag{7}$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_{λ} узлы и коэффициенты квадратурной формулы $\beta=\overline{1,N}, N=2,3,\ldots$.

Литература

1. Sard. A. Integral representations of remainders, Duke Math J. 1948. V15, 333–345
2. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.//Успехи математических наук, –1950, –Т.5, вып.2(36),– С. 165–177.
3. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М. Наука,1974г. 808 с.
4. Kh Shadimetov, F Nuraliev. Optimization of quadrature formulas with derivatives. Problems of computational and applied mathematics, 2017, No.4, pp 61-70.
5. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.
6. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.
7. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И. О построении наилучших квадратурных формул в пространстве Соболева. Материалы международного конгресса. Алматы. 30 июнь – 4 июль. 2009.
8. Shadimetov Kh.M., Jalolov Ik.I. Algorithm for constructing a discrete analog $D_3[\beta]$ of a single operator. Problems of computational and applied mathematics, 2015, No.2, -pp. 48-53.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА $H_2^{\mu}(R)$.

Жалолов Икром Исомиддинович

Ташкентский государственный транспортный университет,

o_jalolov@mail.ru

Мухсинова Мехринисо Шавкатовна

докторант Бухарского государственного университета

Основной целью настоящей работы является нахождении оценка погрешности, существование и единственность **о**птимальной решетчатых интерполяционной формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ для непериодических функций.

В настоящей работе исследуется задача оптимальных интерполяционных формул в пространств $W_2^{(m)}(R)$.

Определение 1. Пространства $W_2^{(m)}(R)$ определяется как замыкания бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме [1,8]

$$\left\| f(x) \right| \ W_2^{(m)}(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Здесь F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье :

$$F[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi iyx}dx \quad \text{и} \quad F^{-1}[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iyx}dx$$

В работе [2] С. Л. Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена задача 1.

Одной из основных задач теории интерполирования является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данным классом ошибки функций $[2]$. Значение этой функции в некоторой фиксированной точке z есть функционал, определенный как над функциями *f:*

$$< \ell, f >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x)dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x^{(\lambda)}) =$$

$$= \int_0^1 \left[\delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x^{(\lambda)}) \right] f(x)dx, \tag{1}$$

где $P_f(z) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x^{(\lambda)})$ (2)

интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x^{(\lambda)}), \tag{3}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы.

$C_\lambda(z)$ - коэффициенты, а $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы $P_f(z)$, $x^{(\lambda)} \in [0,1]$, $\delta(x)$- дельта функция Дирака, $f(x) \in W_2^{(m)}(R)$.

Определение 2. Функция $\psi_\ell(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell(x)$, если для которой выполняется следующее равенство

$$\left| < \ell(x), \psi_\ell(x) > \right| = \left\| \ell \left| W_2^{(m)*}(R) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell \ \right| W_2^{(m)}(R) \right\|.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности $\ell(x)$ для интерполяционной формулы $P_f(z)$ является

$$\psi_\ell(x) = \nu_m(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\nu_m(h\lambda), \tag{4}$$

а норма функционала погрешности данной интерполяционной формулы выражается следующим равенством

$$\left\| \ell \left| W_2^{(m)*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[(1+y^2)^{-m} \cdot F[\ell(x)](y)](x) \right|^2 dx, \tag{5}$$

где $\nu_m(x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-m}](x)$, $C_\lambda(z)$- коэффициенты интерполяционной формулы $P_f(z)$, $h = \frac{1}{N}$ и N число узлов.

При исследовании оптимальных формул в теории интерполирования в первую очередь возникает вопрос о существовании и единственности таких формул. Для того, чтобы доказать существование и единственность оптимальных интерполяционных формул нам необходима имеет решение первой задачи, т.е. мы получили явный вид нормы функционала погрешности (5) интерполяционной формулы (2).

Лемма. Система $\left\{\nu_{\frac{m}{2}}(x-x^{(\lambda)})\right\}_{\lambda=0}^{N}$ является линейно независимой системой пространстве $L_2(R)$ и линейная оболочка этой системы является $(N+1)-$ мерным подпространством в $L_2(R)$.

Равенство (5) связывает задачу построения интерполяционной формулы (2) с задачей приближения в L_2 функций $\nu_{\frac{m}{2}}(x-z)\varepsilon_{[0,1]}(x)$ линейной комбинации функции $\nu_{\frac{m}{2}}(x)$ и ее сдвигов на $x^{(\lambda)}, \lambda = 0,1,...,N$ в норме пространства $L_2(R)$.

Из этой леммы и теории существования и единственности наилучшего приближения под пространством следует существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы (2).

Основной результат является

Теорема 2. В пространстве $H_2^{\mu}(R)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (2) , коэффициенты которой определяются из системы

$$\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\nu_m(x_\alpha - x^{(\lambda)}) = \nu_m(x_\alpha - z), \tag{6}$$

где $\nu_m(x) == \dfrac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!}|x|^k$ $[см.7]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.

2. Соболев С.Л. Об интерполировании функций *n* переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,-с. 778-781.

3. Лоран П.Ж Аппроксимация и оптимизация. М. Мир, 1975. 496с.

4. Шодиметов Х.М, Маматова Н.Х. Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009, №3, -С.180-186.

5. Хаётов А.Р. Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2010, №2, -С.173-179.

6. Жалолов И. И. Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, № 3/1 (50). 2023. -с. 42-53.

7. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов ипроизведений. Наука, физ-мат, М.1941.

8. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций, и теории вложения, УМН, 1965, том 20, выпуск 1, с. 3-74.

УДК 517.518.392

SECTION 3: MODERN PROBLEMS OF ALGEBRA AND GEOMETRY