ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА
АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ
хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

========= ♦ =========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА
Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

========= ♦ =========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the
AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the
participation of foreign scientists

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND
RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS
Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ

хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

======== ♦ ========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции
с участием зарубежных ученых

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

======== ♦ ========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS

Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

ANJUMAN TASHKILIY QO‘MITASI

Tashkiliy qo‘mita raisi:

Ayupov Sh.A. – O‘zFA Matematika instituti direktori, akademik

Tashkiliy qo‘mita raisining o‘rinbosarlari:

Roziqov O‘.A. – O‘zFA Matematika instituti ilm-fan bo‘yicha direktor o‘rinbosari

Botirov G‘.I. – O‘zFA Matematika instituti direktor o‘rinbosari

Durdiyev D.Q. – O‘zFA Matematika instituti Buxoro bo‘linmasi mudiri

A’zolari:

Ashurov R.R. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Hayotov A.R. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Jamilov U.U. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.

Taxirov J.O. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Adilova F.T. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Xusanboyev Y.M. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Kudaybergenov K.K. – O‘zFA Matematika instituti Qoraqalpoq bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d., professor

Rahmatullayev M.M. – O‘zFA Matematika instituti Namangan bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d.

Imomkulov S.A. – O‘zFA Matematika instituti Xorazm bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d., professor

Xolxo‘jayev A.M. – O‘zFA Matematika instituti Samarqand bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d.

Beshimov R.B. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Zikirov O.S. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Omirov B.A. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Sharipov O.SH. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Rasulov T.H. – BuxDU, f.-m.f.n., dotsent

Dasturiy qo‘mita

Hamraislar:

Azamov A.A.	–	O‘zFA Matematika instituti, akademik
Alimov Sh.A.	–	O‘zMU, akademik
Sadullayev A.S.	–	O‘zMU, akademik
Laqayev S.N.	–	SamDU, akademik
Farmonov Sh.Q.	–	O‘zFA Matematika instituti, akademik

A’zolar:

Abdullayev B.I.	–	UrDU, f.-m.f.d., professor
Aripov M.	–	O‘zMU, f.-m.f.d., professor
Arzikulov F.N.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.
Artiqboyev A.	–	O‘zMU, f.-m.f.d., professor
G‘anixodjayev N.N.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor
Ibragimov G‘.I.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor
Ikromov I.A.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor
Islomov B.	–	O‘zMU, f.-m.f.d., professor
Karimov E.T.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.
Miraxmedov Sh.A.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor
Raximov I.S.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor
Samatov B.T.	–	NamDU, f.-m.f.d., professor
Teshayev M.X.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.
O‘rinov A.K.	–	FarDU, f.-m.f.d., professor
Xakimov R.M.	–	NamDU, f.-m.f.d.
Xasanov A.B.	–	SamDU, f.-m.f.d., professor
Xudoyberdiyev A.X.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.
Shadimetov X.M.	–	TTYMI, f.-m.f.d., professor
Eshmatov F.H.	–	O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.

Kotibiyat

Bozorov Z.R., Dilmurodov E.B., Durdiyev U.D., Jalolov O.I.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель:

Аюпов Ш.А. – директор института Математики АН РУз, академик

Заместители председателя:

Розиков У.А. – заместитель директора по науке института Математики АН РУз

Ботиров Г.И. – заместитель директора института Математики АН РУз

Дурдиев Д.К. – заведующий Бухарским отделением института Математики АН РУз

Члены оргкомитета:

Ашуров Р.Р. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Хаётов А.Р. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Жамилов У.У. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Тахиров Ж.О. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Адилова Ф.Т. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Хусанбоев Ё.М. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Кудайбергенов К.К. – заведующий Каракалпакским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Рахматуллаев М.М. – заведующий Наманганским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Имомкулов С.А. – заведующий Хорезмским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Холхужаев А.М. – заведующий Самаркандским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Бешимов Р.Б. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Зикиров О.С. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Омиров Б.А. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Шарипов О.Ш. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Расулов Т.Х. – БухГУ, к.ф.-м.н., доцент

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:

Азамов А.А.	–	институт Математики АН РУз, академик
Алимов Ш.А.	–	НУУз, академик
Садуллаев А.С.	–	НУУз, академик
Лакаев С.Н.	–	СамГУ, академик
Фармонов Ш.К.	–	институт Математики АН РУз, академик

Члены программного комитета:

Абдуллаев Б.И.	–	УрГУ, д.ф.-м.н., профессор
Арипов М.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Арзикулов Ф.Н.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Артикбоев А.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Ганиходжаев Н.Н.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Ибрагимов Г.И.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Икромов И.А.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Исломов Б.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Каримов Э.Т.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Мирахмедов Ш.А.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Рахимов И.С.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Саматов Б.Т.	–	НамГУ, д.ф.-м.н., профессор
Тешаев М.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Уринов А.К.	–	ФарГУ, д.ф.-м.н., профессор
Хакимов Р.М.	–	НамГУ, д.ф.-м.н.
Хасанов А.Б.	–	СамДУ, д.ф.-м.н., профессор
Худойбердиев А.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Шадиметов Х.М.	–	ТГТУ, д.ф.-м.н., профессор
Эшматов Ф.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Секретариат конференции:

Бозоров З.Р., Дилмуродов Э.Б., Дурдиев У.Д., Жалолов О.И.

I SHO‘BA: MATEMATIK ANALIZ

СЕКЦИЯ № 1: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

SECTION No. 1: MATHEMATICAL ANALYSIS

ABOUT ESTIMATES THE BERGMAN KERNEL FOR CLASSICAL DOMAINS

Abdullayev J. Sh.[1], Khasanova K. I.[2]
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
[1]jonibek-abdullayev@mail.ru, [2]kamola_khasan@mail.ru

The Bergman space on bounded symmetric domains is a fundamental concept in the analysis. It is equipped with a natural projection, i.e. the Bergman projection, determined by the property of the reproducing nucleus. On the other hand, the weighted Bergman spaces are also important in harmonic analysis (see, for example [1-2]).

The Bergman kernel for any transitive circular domain is equal to the ratio of the volume density to the Euclidean volume of the domain. Hua Luogeng in [2] constructed Bergman kernels for four types of classical domains, being guided only by this consideration and without resorting to complete orthonormal systems, and in this book one can also find explicit expressions for the Bergman kernel, groups of automorphisms of the domain $\Re_I(m,k), \Re_{II}(m), \Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$.

Definition ([3]). *Let $\{\varphi_\nu(z), \nu = 0,1,2,...\}$ be a complete orthonormal system of holomorphic functions in $L^2(D)$. The Bergman kernel (or kernel function) $K_D(z,\bar{\zeta})$ is the sum of the series*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} = K_D(z,\bar{\zeta}),$$

which is holomorphic by z and antiholomorphic by ζ

For example (see [3], [4]), the Bergman kernel for a ball with radius R, $\mathbb{B}^n(R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, has the form

$$K_{\mathbb{B}^n(R)}(z,\bar{\zeta}) = \frac{n!R^2}{\pi^n\left(R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\bar{\zeta}_k\right)^{n+1}}.$$

The paper presents is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$, $\Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$, respectively, through the Bergman kernels in balls from the spaces $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ and $\mathbb{C}^n$.

REFERENCES

1. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables, Springer Monographs in Mathematics, Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland (2017), 429 p.
2. Hua Luogeng, Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, AMS, 1963.
3. Shabat B.V., Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables, Nauka, Fiz. Mat. Lit., M., 1985 (in Russian).
4. Fuks B. A., Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables (in Russian), Fizmatgiz, Moscow (1963).

ON ESTIMATES FOR OSCILLATORY INTEGRALS WITH PHASE HAVING E_7 TYPE SINGULARITY

Akramova D.I.[1], **Ikromova D.I.**[2]
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan.
[1]akramova.shoda@mail.ru, [2]ikromova_89@mail.ru

Let $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth hypersurface, and $\varphi \in C_6^\infty(S)$ be a smooth function with compact support. Consider the charge $d\mu(X) := \varphi(X)dS$, where dS is the induced Lebesgue measure on the hypersurface S. In particular, if φ is a non-negative function, then we are dealing with a Borel measure supported on S. The Fourier transform of the charge $d\mu$ is determined by the following integral:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int_S e^{iX\cdot\xi} d\mu(X),$$

which corresponds to the Fourier transform of a distribution given by the charge $d\mu$ (see [1]), where $x \cdot \xi$ is the inner product of vectors x and ξ.
In this paper, we consider the problem: Find the GLB (Greatest lower bound) p_S of the following set

$$\{p \in [1, \infty) : \text{ for any } \varphi \in C_0^\infty(S) \text{ the inclusion} : \widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}) - \text{holds true}\}.$$

Where $L^p(R^{n+1})$ is the space of integrable functions with degree $p(1 \leq p < \infty)$, of course if $p = \infty$, then we are dealing with a space of essentially bounded functions. The number p_S is called to be an exact exponent of integrability of the Fourier transform of the charge $d\mu$, supported on the hypersurface S.

Remark. A similar problem can be considered for smooth surfaces of codimension strictly greater than one. The Fourier transform of characteristic functions of compact domains with C^1-smooth boundary had been considered in the work [2].

In this paper, we consider the case of hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$, given in the form of the graph of a function φ which has a singularity of type E_7 at the origin $\mathbb{R}^2$, moreover the support of the function φ is a subset of a small neighborhood of zero.

Note that, the well-known uniform estimates obtained in the work by J.J.Dustermaat[5] give estimate $p_S \leq 3h(\phi)$, where $h(\phi)$ the height of the function ϕ introduced by A.N.Varchenko[4].

In the case of singularity E_7, we have: $h_7 = \frac{9}{5}$.
Note that, the estimate $p_s \leq 3h(\phi)$ is far from been sharp. It follows from the classical results that the equality $p_S = 3h(\phi)$ holds if and only if $h(\phi) = 1$, those ϕ has the non-degerate critical point at the origin.
We will show that, the equality $p_S = 3$ is valid in the cases when ϕ has a singularity of type E_7 at the origin.

In this paper we assume that the density φ is supported in sufficiently small neighborhood of the origin $\mathbb{R}^3$ and also, it is assumed that, the surface S in a sufficiently small neighborhood of the origin is given as the graph of a smooth function: $x_3 = \phi(x_1, x_2)$, satisfying the conditions: $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$ and also $h(\phi) < 2$.
In this case this function is diffeomorphic equivalent to functions having simple singularities of Arnold's type [6]. But in the problem under consideration, we need to have the form of these

functions with respect to a linear change of variables.

Proposition. Let ϕ be a smooth function satisfying the conditions:
$\phi(0,0)=0, \nabla\phi(0,0)=0$, and also $h(\phi)<2$. In addition, the Taylor development of the function ϕ has the form $\phi=(c_1x_1+c_2x_2)^3+...$ where $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ with $a^2+b^2\neq 0$ "..."means sum of monomials with degree bigger than 4. Then there is a linear coordinate system in $\mathbb{R}^2$ such that this function can be written in one of the following forms:

$$\phi(x_1,x_2)=b(x_1,x_2)(x_2-\psi(x_1))^3+x_2b_1(x_1)+b_0(x_1),$$

where b, b_1, b_0 and ψ are smooth functions, also $\psi(0)=\psi'(0)=0$ as well as $b(0,0)\neq 0$ and $b_1(x_1)=x_1^{k_1}\beta_1(x_1), b_0(x_1)=x_1^{k_0}\beta_0(x_1)$. Here β_1, β_0 are smooth functions. Moreover either:
(i) $k_0=4, k_1\geq 4$ and also $\beta_0(0)\neq 0$ (singularity of type E_6); or
(ii) $k\geq 5$, $k_1=3$ and also $\beta_1(0)\neq 0$ (Singularity of type E_7); or
(iii) $k_0=5, k_1\geq 5$ and also $\beta_0(0)=0$ (singularity of type E_8).
The main results of the work are contained in the following theorem:

Theorem. Let $S\subset R^3$ be a smooth hypersurface given as the graph of a function $x_3=\phi(x_1,x_2)$, where ϕ smooth function satisfying the following conditions:
(i) $\phi(0,0)=0, \nabla\phi(0,0)=0$;
(ii)ϕ has a singularity of the type E_7.
Then there is a neighborhood U of the origin such that for all $\varphi\in C_0^\infty(U)$ the inclusion $\widehat{d\mu}\in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$ holds true, where $L^{3+0}(\mathbb{R}^3)=\bigcap_{p>3}L^p(\mathbb{R}^3)$.

Sharpness of the main theorem follows from the following proposition:

Proposition. Let $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ be an arbitrary C^2 smooth hypersurface containing the origin, let $d\mu$ be the measure defined by

$$\hat{d\mu}(\xi):=\int_S e^{i\chi\xi}d\mu(\chi),$$

and let φ be a nonnegative continuous function concentrated in a sufficiently small neighborhood of zero such that $\varphi(0)>0$. Then $\hat{d\mu}\notin L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ for any $1\leq p\leq \frac{2(n+1)}{n}$.

REFERENCES

1. V.P.Palamodov. Generalized functions and harmonic analysis,in Comutative harmonic analysis-3. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser.Sovrem. Probl.Mat.Fund.Napr. (VINITI,Moscow,1991), Vol.72,pp.5-134.
2. V.V.Lebedev. On the Fourier transform of the characteristic functions of domains with C^1 boundary. Funct.Anal.Appl.47(1),27-37(2013).
3. A.N.Varchenko. Number of lattice points in families of homothetic domains in R. Funct.Anal.Appl. 17(2). 79-83(1983).
4. J.J.Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. Comm. Pure. Appl. Math. 27(2), 207-281 (1974).
5. V.I.Arnol'd, A.N.Varchenko and S.M.Gusein-zade. Singularities of differentiable mappings in Classification of Critical Points of Causties and Wavefronts. (Nauka, Moscow, 1982). Vol.1

[in Russian].
6. D.I.Akramova and I.A.Akramov Randol Maximal Functions and the Integrability of the Fourier Transform of Measures. Math.Notes. Vol 109, No 5. pp.661-678.(2021).

ON THE ERGODICITY OF p-ADIC (1,2)-RATIONAL DYNAMICAL SYSTEMS

Aliev E. T.

Namangan Institute of Engineering Technology, Namangan, Uzbekistan,
aliev-erkinjon@mail.ru

For (1,2)-rational functions with two fixed points on the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ (see [1]-[3]), we study ergodicity properties of the dynamical system generated by these functions.

We consider (1,2)-rational functions of the following form

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + cx + a}, \quad a \neq 0, \quad a, c, \in \mathbb{Q}_p, \tag{1}$$

where $x \neq \hat{x}_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4a}}{2}$.

In [1] the p-adic dynamical system of this function is studied on the field of p-adic complex numbers $\mathbb{C}_p$.

Here we consider the dynamical system of function (1) on the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$.

Suppose that the square root $\sqrt{c^2 - 4a}$ exists in $\mathbb{Q}_p$.

Note that, function (1) has two fixed points $x_1 = -c$ and $x_2 = 0$. x_2 is an indifferent fixed point.

Denote

$$\alpha = \min\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\} \text{ and } \beta = \max\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\}.$$

Define the following set

$$I = \{r : \ 0 < r < \alpha\}.$$

Proposition 1. *The sphere $S_r(0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = r\}$ is invariant for f if and only if $r \in I$.*

For every $x_0 \in S_r(0)$ we can construct the sequence

$$x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1),\, \dots\, ,\, x_n = f(x_{n-1}),\, \dots\, .$$

The sequence $\{x_n\}$ is said to be forward orbit or trajectory of x_0.

The following results present the properties of $\{x_n\}$ for every $x_0 \in S_r(0)$.

Theorem 1. *The following properties hold:*

1) The sequence $\{x_n\}$ diverges for every $x_0 \in S_r(0)$.

2) For every $r \in I$, $r \neq |c|_p$ there exists $\rho(r) > 0$ such that a closed ball with the radius $\rho(r)$ is a minimal invariant ball.

We are interested in the ergodicity properties (see [4] for definitions) of the dynamical system on each invariant sphere.

Let X be an arbitrary nonempty set, $\mathcal{F}$ is an algebra of subsets of X, μ is a probability measure on $\mathcal{F}$, and $T : X \to X$ is a measurable map.

Definition 1. A measurable map T is said to be measure preserving if for every $A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Definition 2. The dynamical system (X, T, μ) is called ergodic if for every invariant set V we have $\mu(V) = 0$ or $\mu(V) = 1$.

For each $r \in I$, $r \neq |c|_p$ consider a measurable space $(S_r(0), \mathcal{B})$, here $\mathcal{B}$ is the algebra generated by closed subsets of $S_r(0)$. Every element of $\mathcal{B}$ is a union of some balls $V_\rho(s)$.

A measure $\bar{\mu} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ is said to be a *Haar measure* if it is defined by $\bar{\mu}(V_\rho(s)) = \rho$. Note that $S_r(a) = V_r(a) \setminus V_{\frac{r}{p}}(a)$. So, we have $\bar{\mu}(S_r(0)) = r(1 - \frac{1}{p})$.

We consider normalized (probability) Haar measure:

$$\mu(V_\rho(s)) = \frac{\bar{\mu}(V_\rho(s))}{\bar{\mu}(S_r(0))} = \frac{p\rho}{(p-1)r}.$$

Theorem 2. *The function (1) is measure preserving with respect to the normalized Haar measure.*

Theorem 3. *Let $r \in I$ and $r \neq |c|_p$. If $p \neq 2$, then the dynamical system $(S_r(0), f, \mu)$ is not ergodic.*

Theorem 4. *Let $p = 2$ and $r \in I$. Then the dynamical system $(S_r(0), f, \mu)$ is ergodic if and only if $|c|_2 = \beta$ and $r = \frac{\alpha}{2}$.*

REFERENCES

1. Aliev E.T., Sattarov I.A. p-adic (1,2)-rational dynamical systems with two fixed points on $\mathbb{C}_p$. Uzbek Mathematical Journal. 2021. **V 65**, №2. pp.5-14.
2. Rozikov U.A., Sattarov I.A. Dynamical system of the p-adic (2,2)-rational functions with two fixed points. Results in Mathematics. 2020. **V 75:100**, pp.1-37.
3. Rozikov U.A., Sattarov I.A. p-adic dynamical systems of $(2, 2)$-rational functions with unique fixed point. Chaos, Solitons and Fractals. 2017. **V 105**, pp.260-270.
4. Walters P. An introduction to ergodic theory. Springer, Berlin. 1982.

PANJARADAGI IKKI ZARRACHALI SISTEMANING BOG'LANGAN HOLATLARI

Anvarov J.[1], **Mavlonova H.**[2]

[1]Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston
Javlondragon@gmail.com,
[2]Navoiy davlat pedagogika instituti, Navoiy, O'zbekiston
mavlanovahafiza6@gmail.com

Panjaradagi ikki zarrachali sistemaning bog'langan holatlari ko'plab mualliflar tomonidan tadqiq qilingan [1-3]. Masalan, [1] ishda ikki zarrachali klaster operatorlarining bog'langan holatlari parametrning kichik qiymatlarida o'rganilgan. Panjarada ikki bozonli sistemaning bog'langan holatlari soni [2] ishda, ikki fermionli sistema bog'langan holatlarining soni esa [3] ishda to'la kvaziimpulsiga bog'liqligi qo'zg'alishlar nazariyasi yordamida o'rganilgan. Uch o'lchamli panjarada ikki fermionli sistema Hamiltoniani tashuvchisi

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \ \ |n_1| + |n_2| \leq 1\}$$

silindrda bo'lgan potensial bilan qaralgan bo'lib [4], $H(\mathbf{k})$ operatorning invariant qism fazolari topilgan hamda bu qism fazolardagi bog'langan holatlarga mos energiyaning qiymatlari aniq hisoblangan.

Ikki zarrachali sistemaga mos energiya operatori $\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2)$ Hilbert fazosida

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $\hat{H}_0$ ikki zarrachaning kinetik energiyasiga mos operator bo‘lib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2,$$

bu yerda m_1 birinchi zarrachaning, m_2 ikkinchi zarrachaning massasi bo‘lib, ularni biz birga teng deb hisoblaymiz, ya’ni $m_1 = m_2 = 1$. $\Delta_1 = \Delta \otimes I$, va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ bo‘lib, $I - \ell_2(\mathbb{Z}^2)$ dagi birlik operator, Δ esa panjaradagi standart Laplas operatori, ya‘ni

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2} (\hat{f}(\mathbf{x}+\mathbf{e_j}) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e_j}) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

bu yerda $\mathbf{e_1} = (1,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1)$ lar $\mathbb{Z}^2$ panjaradagi birlik vektorlar.

Zarrachalarning o‘zaro ta‘sir energiyasi $\hat{V}$ esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\hat{V}\hat{\psi})(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2}) = \hat{v}(\mathbf{x_1}, -\mathbf{x_2})\hat{\psi}(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbb{Z}^2)^2).$$

Potensial $\hat{v} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ ga quyidagi shartlar qo‘yiladi:

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2) = \overline{v}(|\mathbf{n}|), \quad |\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2|, \tag{1}$$

hamda $\overline{v}(0) > \overline{v}(1) > 0$, $\bar{v}(n) = 0$, $n \geq 2$ deb faraz qilinadi.

Potensial $\hat{v}$ ga qo‘yilgan (1) shartda $\hat{H}$ operator chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi.

$\hat{H}$ operatorning koordinat tasviridan impuls tasviriga Fur‘ye almashtirishi orqali o‘tiladi. Ikki zarrachali sistema Hamiltoniani $H = H_0 - V$ va $L_2((\mathbb{T}^2)^2)$ fazolar quyidagicha to‘g‘ri integralga yoyiladi [5],

$$H = \int_{\mathbb{T}^2} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k})d\mathbf{k}, \quad L_2((\mathbb{T}^2)^2) = \int_{\mathbb{T}^2} \oplus L_2(\mathbb{F}_\mathbf{k})d\mathbf{k},$$

bu yerda

$$\mathbb{F}_\mathbf{k} = \{(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}) \in (\mathbb{T}^2)^2 : \quad \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k}\ \},\ \mathbf{k} \in \mathbb{T}^2,$$

$\mathbf{k}-$ sistemaning to‘la kvaziimpulsi.

Har bir tayinlangan $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ da $\tilde{H}(\mathbf{k}) : L_2(\mathbb{F}_\mathbf{k}) \to L_2(\mathbb{F}_\mathbf{k})$ operator $L_2(\mathbb{T}^2)$ Hilbert fazosida aniqlangan $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operatorga [2] unitar ekvivalent bo‘ladi. Bu yerda $H_0(\mathbf{k})$ operator

$$\varepsilon_\mathbf{k}(\mathbf{p}) = 4 - \cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - \cos\frac{k_2}{2}\cos p_2$$

funksiyaga ko‘paytirish operatori.

Zarrachalar o‘zaro ta‘sirini ifodalovchi operator V integral operator bo‘lib uning $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ elementga ta‘siri quyidagicha aniqlanadi:

$$(Vf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{p}-\mathbf{q})f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

Potensial $\hat{v}$ ga qoʻyilgan (1) shartda $v(\mathbf{p})$ funksiyaning koʻrinishi quyidagicha boʻladi:

$$v(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\hat{v}(\mathbf{n})e^{i(\mathbf{n},\mathbf{p})} = \frac{1}{2\pi}[\overline{v}(0) + 2\overline{v}(1)(\cos p_1 + \cos p_2)].$$

$H(\mathbf{k})$ operatorning xos vektorlari sistemaning bogʻlangan holatlari, bu xos vektorga mos xos son bog'langan holatning energiyasi deyiladi. Shunday ekan biz $H(\mathbf{k})$ operatorning xos funksiyalari va xos qiymatlari bilan qiziqamiz.

Minimaks prinspidan [5] foydalanib $H(\mathbf{k})$ operator muhim spektridan pastda yotuvchi xos qiymatlari soni uchun quyidagi tasdiqni isbotlash mumkin.

Teorema. *Agar* $\bar{v}(1) > 2\cos\frac{k_1}{2} + 2\cos\frac{k_2}{2}$ *boʻlsa, u holda* $H(\mathbf{k})$ *operator kamida uchta xos qiymatga ega.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Маматов Ш.С. Минлос Р.А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ. (1989). Т. 79, 2. С. 163-179
2. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. ТМФ. 2016. 2, С. 272-292.
3. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д., Мамуров Б.У. Бесконечностъ числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. УзМЖ, 2016 4, С. 3-16
4. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiyev. Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace. AIP Conference Procedinges. 2021. Vol 2365.
5. Reed M. and Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics Ser: Analysis of Operators 1978.

NUMERICAL RANGE OF THE FRIEDRICHS MODEL

Bahronov B.I.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
b.bahronov@mail.ru

Quadratic forms and their use in linear algebra are quite well known. A natural extension of these ideas in finite- and infinite-dimensional spaces leads us to the numerical range. When specialized to finite-dimensional spaces, the numerical range is often called the field of values. We remark that the numerical range is an important tool in the spectral analysis of bounded and unbounded linear operators in Hilbert spaces.

Let us state the definition. For a bounded linear operator T on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$, the numerical range $\mathcal{W}(T)$ is the image of the unit sphere of $\mathcal{H}$ under the quadratic form $x \to (Tx, x)$ associated with the operator, where $(\cdot,\cdot)$ is an inner product on Hilbert space $\mathcal{H}$. More precisely,

$$\mathcal{W}(T) := \{(Tx, x) : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

Thus the numerical range of an T, like the spectrum, is a subset of the complex plane whose geometrical properties should say something about that operator. This notion was first studied by O.Toeplitz in [1]; he proved that the numerical range of a matrix contains all its eigenvalues and that its boundary is a convex curve. In [2] F.Hausdorff showed that indeed the set $\mathcal{W}(T)$ is convex. In fact, it turned out that this continues to hold for general bounded linear operators and that the spectrum is contained in the closure $\overline{\mathcal{W}(T)}$ (see [3]).

Let $\mathbf{T}^3$ be the three-dimensional torus, the cube $(-\pi, \pi]^3$ with appropriately identified sides equipped with its Haar measure and $L^2(\mathbf{T}^3)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbf{T}^3$.

Let us consider the Hamiltonian (so-called the Friedrichs model) $\mathcal{A}(\mu_1, \mu_2)$ acting on the Hilbert space $L^2(\mathbf{T}^3)$

$$\mathcal{A}(\mu_1, \mu_2) := \mathcal{A}_0 - \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2, \tag{1}$$

where $\mathcal{A}_0$ is the multiplication operator by the function $u(\cdot)$:

$$(\mathcal{A}_0 f)(p) = u(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbf{T}^3);$$

and V_α, $\alpha = 1, 2$ are non-local interaction operators:

$$(V_\alpha f)(p) = v_\alpha(p) \int_{\mathbf{T}^3} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad \alpha = 1, 2, \quad f \in L^2(\mathbf{T}^3).$$

Here $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ are positive reals, $u(\cdot)$ and $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ are real-valued continuous functions on $\mathbf{T}^3$. Under these assumptions, operator $\mathcal{A}(\mu_1, \mu_2)$ defined by (1) is bounded and self-adjoint in $L^2(\mathbf{T}^3)$.

In addition, we assume that the function $u(\cdot)$ has an unique non-degenerate minimum at the point $p_1 \in \mathbf{T}^3$ and has an unique non-degenerate maximum at the point $p_2 \in \mathbf{T}^3$, and for $\alpha = 1, 2$ the function $v_\alpha(\cdot)$ has the continuous partial derivatives up to the third-order inclusive at some neighborhood of $p_\alpha \in \mathbf{T}^3$.

We set

$$m_1 := \min_{p \in \mathbf{T}^3} u(p), \quad m_2 := \max_{p \in \mathbf{T}^3} u(p),$$

$$I_\alpha(z) := \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v_\alpha^2(t) dt}{u(t) - z}, \quad z \in \mathbf{R} \setminus [m_1; m_2].$$

Since the function $I_\alpha(\cdot)$ is an increasing in the intervals $(-\infty; m_1)$ and $(m_2; +\infty)$, by the Lebesgue dominated convergence theorem the exist the following finite or infinite limits

$$I_1(m_1) = \lim_{z \to m_1 - 0} I_1(z), \quad I_2(m_2) = \lim_{z \to m_2 + 0} I_2(z).$$

The finiteness or infiniteness of the last limits are important in the investigation the presence of the eigenvalues of $\mathcal{A}(\mu_1, \mu_2)$ and the conditions under which the numerical range of $\mathcal{A}(\mu_1, \mu_2)$ is closed as a set.

In the case $|I_\alpha(m_\alpha)| < \infty$, $\alpha = 1, 2$ we denote

$$\mu_1^0 := (I_1(m_1))^{-1}, \quad \mu_2^0 := -(I_2(m_2))^{-1}.$$

We describe the numerical range $\mathcal{W}(\mathcal{A}(\mu_1^0, \mu_2^0))$ of $\mathcal{A}(\mu_1^0, \mu_2^0)$ depending on the value of the function $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$. Our investigations are based on the threshold analysis techniques.

Let $\operatorname{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ be the support of the function $v_\alpha(\cdot)$ and $\operatorname{mes}(\Omega)$ be the Lebesgue measure on $\Omega \subset \mathbf{T}^3$.

Theorem. *Let the condition*

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \operatorname{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$$

be fulfilled. If $v_\alpha(p_\alpha) = 0$ *for* $\alpha = 1, 2$, *then*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}(\mu_1^0, \mu_2^0)) = [m_1; m_2] (= \sigma(\mathcal{A}(\mu_1^0, \mu_2^0))).$$

REFERENCES

1. O.Toeplitz. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., **2**:1-2 (1918), pp. 187–197.
2. F.Hausdorff. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., **3**:1 (1919), pp. 314–316.
3. P.R.Halmosh. Hilbert space problem book. vol. 19 of Grad. Texts in Math., Springer, New York, 2nd ed., 1982.

ESTIMATES FOR THE BOUNDS OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A 2×2 OPERATOR MATRIX

Dilmurodov E.B.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Bukhara, Uzbekistan
elyor.dilmurodov@mail.ru;

We study the essential spectrum of the 2×2 operator matrix of the form

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0$$

acting in the Hilbert space

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

with $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ and $\mathcal{H}_2 := L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$. Here $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ is the d-dimensional torus, the cube $(-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ with appropriately identified sides equipped with its Haar measure and $L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ stands for the subspace of $L^2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ consisting of symmetric functions (with respect to the two variables). The matrix entries $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \le j$, $i, j = 1, 2$, are given by

$$(A_{11} f_1)(k_1) = w_1(k_1) f_1(k_1), \quad (A_{12} f_2)(k_1) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(k_1, t)dt,$$
$$(A_{22} f_2)(k_1, k_2) = w_2(k_1, k_2) f_2(k_1, k_2), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

Here $\mu > 0$ is a coupling constant, the functions $w_1(\cdot)$ and $w_2(\cdot, \cdot)$ have the form

$$w_1(k_1) := \varepsilon(k_1) + \gamma, \quad w_2(k_1, k_2) := \varepsilon(k_1) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k_1 + k_2)) + \varepsilon(k_2)$$

with $\gamma \in \mathbb{R}$ and the dispersion function $\varepsilon(\cdot)$ is defined by

$$\varepsilon(k_1) := \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} (1 - \cos k_1^{(i)}), \; k_1 = (k_1^{(1)}, \ldots, k_1^{(\mathrm{d})}) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

Let $H_0 := \mathbb{C}$. To study the spectral properties of the operator $\mathcal{A}_\mu$, we introduce the following auxiliary family of bounded self-adjoint operators (generalized Friedrichs models) $\mathcal{A}_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, which acts in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ as 2×2 operator matrices

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

with matrix elements

$$A_{00}f_0 = \gamma f_0, \quad (A_{01}f_1) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)dt,$$
$$(A_{11}(k)f_1)(k_1) = E_k(k_1)f_1(k_1), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1,$$

where the function $E_k(\cdot)$ is defined by

$$E_k(k_1) := \varepsilon(\frac{1}{2}(k + k_1)) + \varepsilon(k_1).$$

To simplify the notation we set

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} (\varepsilon(k) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k))), \quad \Sigma_\mu := [0; 6\mathrm{d}] \cup \Lambda_\mu.$$

Let

$$a_\mu^{\min} := \min \Sigma_\mu, \quad a_\mu^{\max} := \max \Sigma_\mu;$$
$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \text{ for } \gamma > 0;$$
$$\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{4\mathrm{d} - \gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \text{ for } \gamma < 4\mathrm{d}.$$

We can now state the detailed information on bounds of the essential spectrum of $\mathcal{A}_\mu$ for the case $\mathrm{d} \geq 3$ with respect to the spectral parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ and $\mu > 0$ [1]:

Case I. Let $\gamma \leq 0$. Then for any $\mu > 0$ we have

$$a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0;$$

moreover,

- $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (0; \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu > \mu_r^0(\gamma)$.

Case II. Let $\gamma \in (0; 2\mathrm{d}]$. Then

- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (-\infty; \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_l^0(\gamma); \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_r^0(\gamma); +\infty)$.

Case III. Let $\gamma \in (2\mathrm{d}; 4\mathrm{d})$. Then

- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (-\infty; \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_r^0(\gamma); \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_l^0(\gamma); +\infty)$.

Case IV. Let $\gamma \geq 4\mathrm{d}$. Then for any $\mu > 0$ we have $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$; moreover,

- $a_\mu^{\min} = 0$, if $\mu \in (0; \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$, if $\mu > \mu_l^0(\gamma)$.

All assertions mentioned above play crucial role in the study of the number of discrete eigenvalues of $\mathcal{A}_\mu$ lying outside of its essential spectrum.

REFERENCES

1. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Estimates for the bounds of the essential spectrum of a operator matrix. Contemporary Mathematics. 1:4 (2020), P. 170-182

PERIODIC GROUND STATES CORRESPONDING TO SUBGROUPS OF INDEX THREE FOR THE ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER THREE

Egamov D. O.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
dilshodbekegamov87@gmail.com

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue(see [1]). Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l = \langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y), x, y \in V$ on the Cayley tree is the shortest path from x to y.

For the fixed $x^0 \in V$ (as usual, x^0 is called a root of the tree) we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}.$$

We write $x < y$ if the path from x^0 to y goes through x and $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$.

It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i \neq e$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

At first, we give main definitions and facts about the Ising model. We consider models where the spin takes values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. For $A \subseteq V$ a spin *configuration* σ_A on A is defined as a function $x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$. Put $\Omega = \Omega_V$, $\sigma = \sigma_V$ and $-\sigma_A = \{-\sigma_A(x), x \in A\}$. Define a *periodic configuration* as a configuration $\sigma \in \Omega$ which is invariant under cosets of a subgroup $G_k^* \subset G_k$ of finite index.

The index of a subgroup is called the *period of the corresponding periodic configuration*. A configuration that is invariant with respect to all cosets is called *translation-invariant*.

Let $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ be a family of cosets, where G_k^* is a subgroup of index $r \geq 1$. We consider model which its spins take values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$.

The Ising model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y),$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ are coupling constants and $\sigma \in \Omega$.

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b.

Define the energy of a ball b for configuration σ by

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y), \quad x, y \in b,$$

where $J=(J_1,J_2)\in R^2$.

We consider periodic ground states on the Cayley tree of order three, i.e., $k=3$. Let $B_0=\{3,4\}, B_d=\{d\}, d\in\{1,2\}$, i.e., $m_i=i, i\in\{1,2\}$. Now, we consider functions $u_{B_1B_2}:\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\to\{e,a_1,a_2\}$ and $\gamma :< e,a_1,a_2 >\to \{e,a_1,a_2\}$

$$u_{\{B_1\},\{B_2\}}(x)=\begin{cases} e,\ if\,x=a_i, i=\overline{3,4}\\ a_i,\ if\ x=a_i,\ i=\overline{1,2},\end{cases}$$

$$\gamma(x)=\begin{cases} e\ if\,x=e\\ a_1\,if\,x\in\{a_1,a_2a_1\}\\ a_2\,if\,x\in\{a_2,a_1a_2\}\\ \gamma(a_ia_{3-i}...\gamma(a_ia_{3-i}))\,if\,x=a_ia_{3-i}...a_{3-i},\ l(x)\geq 3,\ i=\overline{1,2}\\ \gamma(a_ia_{3-i}...\gamma(a_{3-i}a_i))\,if\,x=a_ia_{3-i}...a_i,\ l(x)\geq 3,\ i=\overline{1,2}.\end{cases}$$

Let $H_1:=\Im^1{}_{B_1B_2}(G_3)$. Then $H_1=\{x\in G_3|\ \gamma(u_{\ B_1B_2}\ (x))=e\}$. Note that H_1 is a subgroup of index 3 (see[2]).

$$G_3/H_1=\{H_1,H_2,H_3\}$$

where

$$H_2=\{x\in G_3\,|\gamma(u_{B_1B_2}(x))=a_1\},\ \ H_3=\{x\in G_3\,|\gamma(u_{B_1B_2}(x))=a_2\}\ \ .$$

H_1-periodic configurations have the following forms

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_1\ x\in H_1,\\ \sigma_2\ x\in H_2,\\ \sigma_3\ x\in H_3,\end{cases}$$

where $\sigma_i\in\Phi, i\in\{1,2,3\}$.

Note that if $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ then this configuration is *translation-invariant* and the full details of such configuration are given (see[1]).

Theorem 1. *Let* $k=3$.

1) If $(J_1,J_2)=\{(J_1,J_2):J_2=-\frac{1}{2}J_1, J_1\leq 0\}$, *then there are six* H_1*-periodic ground states which corresponding to the following configurations*

$$\sigma(x)=\pm\begin{cases}\sigma_1 & \textit{if}\ x\in H_1,\\ \sigma_2 & \textit{if}\ x\in H_2,\\ \sigma_3 & \textit{if}\ x\in H_3,\end{cases}$$

where $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$.

2) If $(J_1,J_2)\in R^2\backslash\{(J_1,J_2):J_2=-\frac{1}{2}J_1, J_1\leq 0\}$, *there are not* H_1*-periodic (except for translation-invariant) ground states.*

REFERENCES

1. U. A. Rozikov. Gibbs measures on a Cayley tree. World Scientific Publishing, Singapore 2013.
2. U. A. Rozikov, F. H. Haydarov. Invariance property on group representations of the Cayley tree and its applications. arXiv:1910.13733.

THE CANONICAL CENTRAL EXTENSION OF RESTRICTED PSEUDO-ORTHOGONAL GROUPS

Eshkobilov O. Yu.
Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
olim_0190@mail.ru

The main aim of present work is the explicit description of a nontrivial central extension of the restricted pseudo-orthogonal group $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ of a scalar product of signature $(2,n+1)$. Our approach was inspired by the method used in [4] to construct nontrivial central extensions of the real symplectic group $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, such as the circle extension $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(2n,\mathbb{R})$ and the universal covering group $\widetilde{\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})}$ as an extension by $\mathbb{Z}$. This method, in turn, has its origin in the classical work of Bargmann [1].

For given integers p,q, $1\le p\le 2$, $p<q$, let $\mathbb{R}^{p,q}$ denote $\mathbb{R}^m$, $m=p+q$, with the nondegenerate scalar product $\langle x,y\rangle = -x^0y^0+(-1)^{p-1}x^1y^1+\sum_{j=2}^{m-1}x^jy^j = {}^t\!xGy$ of signature (p,q), where $x^0,\dots,x^{m-1}$ denote the coordinates with respect to the standard basis $e=(e_0,\dots,e_{m-1})$ of $\mathbb{R}^m$. Let $\mathrm{O}_+^\uparrow(p,q)$ denote the identity component of the pseudo-orthogonal group of defined as above.

We construct a canonical central extension $\widehat{\mathrm{O}}_+^\uparrow(2,n+1)$ of $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ using the transitive action of $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ on the irreducible bounded symmetric domain of type IV, regarded as a homogeneous space of $(n+1)\times 2$ real matrices [2,3,5]. The group manifold of the central extension is realized explicitly as an embedded submanifold of the product $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)\times\mathbb{R}$ and the group multiplication defining the Lie group structure is given by a single global formula. Moreover, the center of $\widehat{\mathrm{O}}_+^\uparrow(2,n+1)$ is computed. This is the content of Theorem. As a byproduct, an explicit realization of the universal covering group of $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ is obtained. In the construction of the canonical covering we build a nontrivial central extension $\widehat{\mathrm{O}}_+^\uparrow(2,n+1)$ of the pseudo-orthogonal group $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ and describe its center $\widehat{\mathrm{Z}}(2,n+1)$.

Let the classical domain of type IV is denoted by Ω_{IV}, which is the set of $(n+1)\times 2$ real matrices defined by $\Omega_{\mathrm{IV}} := \{\beta\in\mathbb{R}(n+1,2)\mid I_2-{}^t\beta\beta>0,\ \text{i.e., } I_2-{}^t\beta\beta \text{ is positive definite}\}$. For each $\beta=(\mathrm{u}\,\mathrm{v})\in\Omega_{\mathrm{IV}}$, where $\mathrm{u}={}^t(u^1,\dots,u^{n+1})$, $\mathrm{v}={}^t(v^1,\dots,v^{n+1})$, we let

$$\mathrm{B}_j(\beta) := {}^t(u_j,v_j,\delta_j^1,\dots,\delta_j^{n+1}),\quad j=1,\dots,n+1,$$

$$\mathbf{j}_1(\beta)={}^t(1,0,u^1,\dots,u^{n+1}),\quad \mathbf{j}_2(\beta)={}^t(0,1,v^1,\dots,v^{n+1}).$$

Consequently, by the Gram–Schmidt process, or by the Iwasawa decomposition, there is a unique smooth map $\mathfrak{T}:\Omega_{\mathrm{IV}}\to\mathrm{T}^+(n+3)$ into the group of upper triangular $(n+3)\times(n+3)$ matrices with positive entries on the main diagonal such that, for each $\beta\in\Omega_{\mathrm{IV}}$, $\mathrm{P}(\beta):=\mathrm{B}(\beta)\mathfrak{T}(\beta)$ belongs to $\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$.

The map $\mathrm{P}:\Omega_{\mathrm{IV}}\ni\beta\longmapsto\mathrm{P}(\beta)\in\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)$ is a smooth global cross section of $\pi_2^-:\mathrm{O}_+^\uparrow(2,n+1)\to\Omega_{\mathrm{IV}}$. Let $\widehat{\mathfrak{a}},\widehat{\mathfrak{b}},\widehat{\mathfrak{c}},\widehat{\mathfrak{d}}$ be the smooth maps defined by

$$\mathrm{P}(\beta)=\begin{pmatrix}\widehat{\mathfrak{a}}(\beta) & \widehat{\mathfrak{b}}(\beta)\\ \widehat{\mathfrak{c}}(\beta) & \widehat{\mathfrak{d}}(\beta)\end{pmatrix},\quad \forall\,\beta\in\Omega_{\mathrm{IV}}.$$

Moreover, for each $t\in\mathbb{R}$, let

$$\rho(t)=(\rho_1(t),\rho_2(t))=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\in\mathrm{SO}(2).$$

Let $\mathfrak{m}, \mathfrak{r}$ and $\mathfrak{R}$ be the smooth maps defined by requiring that

$$\mathrm{P}(\beta)\mathrm{P}(\beta') = \mathrm{P}(\mathfrak{m}(\beta,\beta'))\begin{pmatrix}\mathfrak{r}(\beta,\beta') & 0\\ 0 & \mathfrak{R}(\beta,\beta')\end{pmatrix}, \quad \forall\,\beta,\,\beta' \in \Omega_{\mathrm{IV}}.$$

Since Ω_{IV} is simply connected, there exists a unique map $\Theta : \Omega_{\mathrm{IV}} \times \Omega_{\mathrm{IV}} \to \mathbb{R}$, such that $\mathfrak{r}(\beta,\beta') = \rho[\Theta(\beta,\beta')]$ and $\Theta(\mathrm{O}_{\mathrm{IV}}, \mathrm{O}_{\mathrm{IV}}) = 0$.

Let ψ, Ψ and ζ be the maps defined by requiring that $\mathbf{X} = \mathrm{P}\left(\pi_2^-(\mathbf{X})\right)\begin{pmatrix}\psi(\mathbf{X}) & 0\\ 0 & \Psi(\mathbf{X})\end{pmatrix}$, $\zeta(\mathbf{X},\mathbf{X}') = \Theta\left(\pi_2^-(\mathbf{X}), \Psi(\mathbf{X})\,\pi_2^-(\mathbf{X}')\,\psi(\mathbf{X})^{-1}\right) + \eta\left(\pi_2^-(\mathbf{X}'), \psi(\mathbf{X})\right), \forall \mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathrm{O}_+^{\uparrow}(2, n+1)$

We formulate our main result.

Theorem: *The subset of* $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(2,n+1)\times\mathbb{R}$ *given by*

$$\widehat{\mathrm{O}}_+^{\uparrow}(2,n+1) = \left\{(\mathbf{X},\tau) \in \mathrm{O}_+^{\uparrow}(2,n+1)\times\mathbb{R} \mid \psi(\mathbf{X}) = \rho(\tau)\right\}$$

is a connected embedded submanifold diffeomorphic to $\Omega_{\mathrm{IV}}\times\mathbb{R}\times\mathrm{SO}(n+1)$*. The multiplication* $(\mathbf{X},\tau)\star(\mathbf{X}',\tau') = (\mathbf{X}\,\mathbf{X}', \tau+\tau'+\zeta(\mathbf{X},\mathbf{X}'))$ *gives* $\widehat{\mathrm{O}}_+^{\uparrow}(2,n+1)$ *the structure of a Lie group with neutral element* $(I_{n+3}, 0)$ *and inverse* $(\mathbf{X},\tau)^{-1} = (\mathbf{X}^{-1}, -\tau-\zeta(\mathbf{X},\mathbf{X}^{-1}))$*. Moreover, the map* $\sigma : \widehat{\mathrm{O}}_+^{\uparrow}(2,n+1) \ni (\mathbf{X},\tau) \longmapsto \mathbf{X} \in \mathrm{O}_+^{\uparrow}(2,n+1)$ *is a covering homomorphism of Lie groups. If* $\widehat{\mathrm{Z}}(2,n+1)$ *denotes the center of* $\widehat{\mathrm{O}}_+^{\uparrow}(2,n+1)$*, then*

1. $\widehat{\mathrm{Z}}(2,n+1) = \{(I, 2\pi k) \mid k\in\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$*, if* n *is even;*
2. $\widehat{\mathrm{Z}}(2,n+1) = \left\{((-1)^k I, \pi k) \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$*, if* n *is odd.*

REFERENCES

1. Bargmann. V. Group representations in Hilbert spaces of analytic funcionsю Analytical Methods in Mathematical Physics. 1970. V. 4, №9. P. 27–63.
2. Cartan. E.J. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexesю Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1935. V. 11, №1. P. 116–162.
3. McCarthy J.E. and Timoney. R.M. Non-commutative automorphisms of bounded non-commutative domainsю Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 2016. V. 146. №5 P. 1037 - 1045
4. Rawnsley. J. On the universal covering of the real symplectic groupю Journal of Geometry and Physics. 2012. V. 62, №10. P. 2044Ц2058
5. Satake. I. Algebraic Structures of Symmetric Domains. Princeton.: Princeton University Press, 1980.

INVARIANT SETS ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO WITH RESPECT TO THE OPERATOR TO STUDY K_0^*-WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES FOR ISING MODELS

Haydarov F. H.[1], Ilyasova R. A.[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
[1]haydarov_ imc@mail.ru, [2]ilyasova.risolat@mail.ru

Let $A_0 = \{4, ..., k+1\}$, $A_s = \{s\}$, $s \in \{1, 2, 3\}$, i.e., $m_i = i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Now, we consider functions $u_{\{1\}\{2\}\{3\}} : \{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \to \{e, a_1, a_2, a_3\}$ and $\gamma_1 : \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \to \{e, a_1, a_2, a_3\}$ [2]:

$$u_{\{1\},\{2\},\{3\}}(x) = \begin{cases} e, & \text{if } \ x = a_i, \ i = N_k \setminus \{1, 2, 3\}; \\ a_i, & \text{if } \ x = a_i, \ i \in \{1, 2, 3\}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} e, \text{ if } \ x = e; \\ a_1, \text{ if } \ x \in \{a_3a_1, a_2a_3\}; \\ a_2, \text{ if } \ x \in \{a_1a_3, a_3a_2\}; \\ a_3, \text{ if } \ x \in \{a_1a_2, a_2a_1\}; \\ \gamma_1(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_1(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), \text{ if} \\ x = a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x) > 2. \end{cases} \tag{2}$$

Let $K_0^* := \Im^1_{\{1\}\{2\}\{3\}}(G_k)$, i.e.,

$$K_0^* = \{x \in G_k | \ \gamma_1(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(x)) = e\}.$$

By Theorem 2 in [2], we obtain that K_0^* is a subgroup of index 4 of the group G_k . Put

$$G_2/K_0^* = \{K_0^*, K_1^*, K_2^*, K_3^*\},$$

where

$$K_1^* = \{x \in G_2 | \ \gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(x)) = a_1\},$$
$$K_2^* = \{x \in G_2 | \ \gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(x)) = a_2\},$$
$$K_3^* = \{x \in G_2 | \ \gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(x)) = a_3\}.$$

Then we have

$$q_0(K_0^*) := |\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \cap K_0^*| = |\{a_4, a_5, ..., a_{k+1}\}| = k - 2,$$

$$q_1(K_0^*) := |\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \cap K_1^*| = |\{a_1\}| = 1,$$
$$q_2(K_0^*) := |\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \cap K_2^*| = |\{a_2\}| = 1,$$
$$q_3(K_0^*) := |\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \cap K_3^*| = |\{a_3\}| = 1,$$
$$Q(K_0^*) := (q_0(K_0^*), q_1(K_0^*), q_2(K_0^*), q_3(K_0^*)) = (k - 2, 1, 1, 1).$$

Assume that $x \in K_1^*$ (the cases $x \in K_2^*$ and $x \in K_3^*$ are similar), i.e., $\gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(x)) = a_1$. Then it is easy to check that

$$\{\gamma(u_{\{1\}\{2\}}(xa_1)), \gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(xa_2)), \gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(xa_3))\} = \{e, a_2, a_3\}.$$

In addition, we have $\gamma(u_{\{1\}\{2\}\{3\}}(xa_i)) = a_1$, $i \in \{4, 5, ..., k+1\}$. Consequently,

$$q_0(x) := |\{xa_1, xa_2, ..., xa_{k+1}\} \cap K_0^*| = 1,$$

$$q_1(x) := |\{xa_1, xa_2, ..., xa_{k+1}\} \cap K_1^*| = k - 2,$$

$$q_2(x) := |\{xa_1, xa_2, ..., xa_{k+1}\} \cap K_2^*| = 1,$$
$$q_3(x) := |\{xa_1, xa_2, ..., xa_{k+1}\} \cap K_3^*| = 1.$$

Hence $Q(x) = (1, k-2, 1, 1)$. Clearly, (see detail in [1,3]) for any $x \in G_k$, there exists a permutation π_x of the coordinates of the vector $Q(K_0)$ such that

$$\pi_x Q(K_0) = Q(x). \tag{3}$$

Let $h = (h_1, h_2, ..., h_{12})$ and $h^{'} = (h_1^{'}, h_2^{'}, ..., h_{12}^{'}) \in R^{12}$ then we define the operator $W_2 : R^{12} \to R^{12}$.

$$W(h) = h^{'} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} h_1' = f(h_7, \theta) + f(h_{10}, \theta); \\ h_2' = f(h_4, \theta) + f(h_{10}, \theta); \\ h_3' = f(h_7, \theta) + f(h_4, \theta); \\ h_4' = f(h_8, \theta) + f(h_{11}, \theta); \\ h_5' = f(h_1, \theta) + f(h_{11}, \theta); \\ h_6' = f(h_1, \theta) + f(h_8, \theta); \\ h_7' = f(h_5, \theta) + f(h_{12}, \theta); \\ h_8' = f(h_2, \theta) + f(h_{12}, \theta); \\ h_9' = f(h_2, \theta) + f(h_5, \theta); \\ h_{10}' = f(h_6, \theta) + f(h_9, \theta); \\ h_{11}' = f(h_3, \theta) + f(h_9, \theta); \\ h_{12}' = f(h_3, \theta) + f(h_6, \theta). \end{cases} \tag{4}$$

Note that K_0^* is the subgroup of index 4 for the group G_k and the set of quantities $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called K_0^*-weakly periodic, if $h_x = h_{i,j}$, for any $x \in K_i^*$, $x_\downarrow \in K_j^*$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. We use the operator W to study K_0^*-weakly periodic Gibbs measures for Ising models on the Cayley tree of order two. Since $Q(x) = (1, 0, 1, 1)$, the cases $h_x = h_{i,i}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ are not occurred. Then K_0^*-weakly periodic set of h has the following form

$$h_x = \begin{cases} h_{0,1} := h_1, & x \in K_0^*,\ x_\downarrow \in K_1^*; \\ h_{0,2} := h_2, & x \in K_0^*,\ x_\downarrow \in K_2^*; \\ h_{0,3} := h_3, & x \in K_0^*,\ x_\downarrow \in K_3^*; \\ h_{1,0} := h_4, & x \in K_1^*,\ x_\downarrow \in K_0^*; \\ h_{1,2} := h_5, & x \in K_1^*,\ x_\downarrow \in K_2^*; \\ h_{1,3} := h_6, & x \in K_1^*,\ x_\downarrow \in K_3^*; \\ h_{2,0} := h_7, & x \in K_2^*,\ x_\downarrow \in K_0^*; \\ h_{2,1} := h_8, & x \in K_2^*,\ x_\downarrow \in K_1^*; \\ h_{2,3} := h_9, & x \in K_2^*,\ x_\downarrow \in K_3^*; \\ h_{3,0} := h_{10}, & x \in K_3^*,\ x_\downarrow \in K_0^*; \\ h_{3,1} := h_{11}, & x \in K_3^*,\ x_\downarrow \in K_1^*; \\ h_{3,2} := h_{12}, & x \in K_3^*,\ x_\downarrow \in K_2^*, \end{cases} \tag{5}$$

where $h = (h_1, h_2, h_3, ..., h_{12})$, in view of [1] satisfy the following equations:

$$Wh = h. \tag{6}$$

To find all solutions of the equation (6) is not so easy. That is why, we solve the equation on invariant sets on the Cayley tree of order two. It is easy to check that the following sets are invariant with respect to the operator W.

$$I_1 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8 = h_9 = h_{10} = h_{11} = h_{12}\},$$

$$I_2 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_2 = h_{11} = h_{12}; h_4 = h_6 = h_7 = h_9; h_3 = h_{10}; h_5 = h_8\},$$
$$I_3 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_3 = h_8 = h_9; h_4 = h_5 = h_{10} = h_{12}; h_2 = h_7; h_6 = h_{11}\},$$
$$I_4 = \{h \in R^{12} : h_2 = h_3 = h_5 = h_6; h_7 = h_8 = h_{10} = h_{11}; h_1 = h_4; h_9 = h_{12}\},$$
$$I_5 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_5 = h_7; h_2 = h_4 = h_8; h_3 = h_6 = h_9; h_{10} = h_{11} = h_{12}\},$$
$$I_6 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_8 = h_{11}; h_2 = h_9 = h_{10}; h_3 = h_7 = h_{12}; h_4 = h_5 = h_6\},$$
$$I_7 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_6 = h_{10}; h_2 = h_5 = h_{12}; h_3 = h_4 = h_{11}; h_7 = h_8 = h_9\},$$
$$I_8 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_2 = h_3; h_4 = h_7 = h_{10}; h_6 = h_8 = h_{12}, h_5 = h_9 = h_{11}\},$$
$$I_9 = \{h \in R^{12} : h_1 = h_2 = h_4 = h_5 = h_7 = h_8; h_3 = h_6 = h_9; h_{10} = h_{11} = h_{12}\},$$
$$I_{10} = \{h \in R^{12} : h_1 = h_{12}; h_2 = h_{11}; h_3 = h_{10}; h_4 = h_9; h_5 = h_8; h_6 = h_7\}.$$

REFERENCES

1. U.A.Rozikov. Gibbs measures on a Cayley tree. World Sci. Pub, Singapore, 2013.
2. Egamberdiyev O.I. Ilyasova R.A. On subgroups of index four for a group representation of the Cayley tree. Uzbek Mathematical Journal. 2021. Volume 65, Issue 1. C. 57–64.
3. U.A. Rozikov, F.H. Haydarov: Invariance property on group representations of the Cayley tree and its applications (arXiv:1910.13733math.FA]).

IKKI ZARRACHALI SFERIK POTENSIALLI SISTEMAGA MOS ENERGIYA OPERATORINING INVARIANT QISM FAZOLARI

Ibrohimova Yo.Sh.[1], Safarova G.[2]

[1]Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston,
yorqinoyibrohimova2@gmail.com,
[2]Navoiy davlat pedagogika instituti, Navoiy, O‘zbekiston,
safarovagulshoda70@gmail.com

Parametrning kichik qiymatlarida ikki zarrachali klaster operatorlarining bog‘langan holatlari paydo bo‘lish tabiati birinchilardan bo‘lib [1] ishda, keyinroq umumiyroq holatda [2] ishda o‘rganilgan. Panjaradagi ikki zarrachali energiya operatorining invariant qism fazolari [3-5] ishlarda qaralgan. Biz ushbu ishda energiya operatorining sferik potensial bilan qaraymiz va uning invariant qism fazolarini o‘rganamiz.

Ikki zarrachali sistemaga mos energiya operatori (Shryodinger operatori) $\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2)$ Hilbert fazosida $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $\hat{H}_0$ ikki zarrachaning kinetik energiyasiga mos operator boʻlib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0=-\frac{1}{2}\Delta\otimes I-\frac{1}{2}I\otimes\Delta,$$

bunda $I-\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ dagi birlik operator, Δ esa panjaradagi standart Laplas operatori, yaʻni

$$(\varDelta\hat{f})(x)=\sum_{j=1}^{2}(\hat{f}(x+e_j)+\hat{f}(x-e_j)-2\hat{f}(x)),\quad \hat{f}\in\ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

bu yerda $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ lar $\mathbb{Z}^2$ panjaradagi birlik vektorlar.

Zarrachalarning oʻzaro taʻsir energiyasi $\hat{V}$ esa quyidagi koʻrinishda boʻladi:

$$(\hat{V}\hat{f})(x_1,\ x_2)=\hat{v}(x_1,-x_2)\hat{f}(x_1,\ x_2),\quad \hat{f}\in\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2).$$

Potensial $\hat{v}:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ ga quyidagi shartlar qoʻyiladi:

$$\hat{v}\,(x_1,\ x_2)=\overline{v}\,(|x|)\,,\quad |x|=|x_1|+|x_2|\,,$$

$$\overline{v}\,(0)>\overline{v}\,(1)>\overline{v}\,(2)>0,\ \hat{v}\,(n)=0,\ n\geq 3. \tag{1}$$

1-taʻrif. *Agar $\hat{v}$ funksiya $S_r=\{x\in\mathbb{Z}^2:\ |x|=r\}$ sferada bitta qiymat qabul qilsa, u holda $\hat{v}$ ga sferik potensial deyiladi.*

Potensial $\hat{v}$ ga qoʻyilgan (1) shartda $\hat{H}$ operator chegaralangan va oʻz-oʻziga qoʻshma boʻladi. $\hat{H}$ operatorning impuls fazodagi tasvirini H orqali belgilaymiz. Bu operator $L_2((\mathbb{T}^2)^2)$ Hilbert fazosini oʻzini-oʻziga akslantiruvchi oʻz-oʻziga qoʻshma operator boʻladi.

Maʻlumki H operator va $L_2((\mathbb{T}^2)^2)$ fazo Fon Neymanning toʻgʻri integraliga yoyiladi, yaʻni

$$H=\int_{\mathbb{T}^2}\oplus\tilde{H}(k)dk,\quad L_2((\mathbb{T}^2)^2)=\int_{\mathbb{T}^2}\oplus L_2(\mathbb{F}_k)dk,$$

bu yerda $\mathbb{F}_k=\{(p,q)\in(\mathbb{T}^2)^2:\ p+q=k\}$, $k-$sistemaning toʻla kvaziimpulsi.

Har bir $k\in\mathbb{T}^2$ da $\tilde{H}\,(k):L_2\,(\mathbb{F}_k)\to L_2\,(\mathbb{F}_k)$ operatorlar $H\,(k):L_2\,(\mathbb{T}^2)\to L_2\,(\mathbb{T}^2)$ operatorlarga unitar ekvivalent boʻladi [4]:

$$H(k)=H_0(k)-V.$$

Bu yerda $H_0\,(k)$ va V operatorlarning $f\in L_2\,(\mathbb{T}^2)$ elementga taʻsiri quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k)f)(p)=(\varepsilon(\frac{k}{2}-p)+\varepsilon(\frac{k}{2}+p))f(p),\quad \varepsilon(p)=2-\cos p_1-\cos p_2,$$

$$(Vf)(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2}v(p-q)f(q)dq,\quad v(p)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\hat{v}(n)e^{i(n,p)}.$$

Potensial $\hat{v}$ ga qoʻyilgan (1) shartda $v(p)$ funksiyaning koʻrinishi quyidagicha boʻladi:

$$v(p)=\frac{1}{2\pi}\Big[\bar{v}(0)+2\bar{v}(2)(\cos(p_1+p_2)+\cos(p_1-p_2))+\sum_{i=1}^{2}\bar{v}(1)\cos p_i+\bar{v}(2)\cos 2p_i\Big].$$

$H_0(k)$ operatorlar chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma, V esa o‘z-o‘ziga qo‘shma, kompakt operator bo‘ladi.

Lemma. *V operator uchun $\lambda_1 = 0$ soni cheksiz karrali, $\lambda_2 = \overline{v}\,(0)$ soni bir karrali, $\lambda_3 = \overline{v}\,(1)$ soni to‘rt karrali, $\lambda_4 = \overline{v}\,(2)$ soni esa sakkiz karrali xos qiymat bo‘ladi.*

Agar biz $L_2(\mathbb{T}^2)$ dagi juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ bilan, toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ bilan belgilasak, u holda $L_2(\mathbb{T}^2)$ Hilbert fazosi quyidagi to‘g‘ri yig‘indiga yoyiladi:

$$L_2\left(\mathbb{T}^2\right) = L_2^e\left(\mathbb{T}^2\right) \oplus L_2^o\left(\mathbb{T}^2\right),$$

o‘z navbatida $L_2^e\,(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^o\,(\mathbb{T}^2)$ fazolarni quyidagicha to‘g‘ri yig‘indi ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

$$L_2^e\left(\mathbb{T}^2\right) = L_2^{++}\left(\mathbb{T}^2\right) \oplus L_2^{--}\left(\mathbb{T}^2\right), \quad L_2^o\left(\mathbb{T}^2\right) = L_2^{+-}\left(\mathbb{T}^2\right) \oplus L_2^{-+}\left(\mathbb{T}^2\right).$$

$L_2^{++}\,(\mathbb{T}^2)$ qism fazo har ikkala argument bo‘yicha juft funksiyalardan, $L_2^{+-}\,(\mathbb{T}^2)$ qism fazo esa birinchi argument bo‘yicha juft, ikkinchi argument bo‘yicha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazo.

Teorema. *$L_2^{++}\,(\mathbb{T}^2)\,,\ L_2^{--}\,(\mathbb{T}^2)\,,\ L_2^{+-}\,(\mathbb{T}^2)\,,\ L_2^{-+}\,(\mathbb{T}^2)$ qism fazolar $H\,(k)$ operatorga nisbatan invariant qism fazolar bo‘ladi.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Маматов Ш.С., Минлос Р.А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ, 79(2), (1989), С. 163-179
2. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems conserning spectra of lattice models. In Schrodinger operators: Standart and Nostandart (eds. P.Exner, P. Seba). World. Scientific. Singapoor. 1989. C. 243-257.
3. Абдуллаев Ж.И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. УзМЖ, 2009, 3, С. 3-10
4. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной ршетке. ТМФ. 2016, 2, С. 272-292.
5. Абдуллаев Ж.И., Муминов З.Э. Бесконечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Доклады АНРУз. 2007, 3, С. 14-17

ON UNIFORM ESTEMATES FOR OSCILLATORY INTEGRALS

Ikromov I.A.
Institute of mathematics named after V.I. Romanovsky Academy os Sciences of Uzbekistan, Samarkand, Uzbekistan,
i.ikromov@mathinst.uz

Introduction.

Defintion 1. An oscillatory integral is called to be the integral of the form:

$$J(t,s) := \int_{\mathbb{R}^d} a(x,s)e^{it\Phi(x,s)}dx,$$

where $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ is called to be an amplutude function, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ is a real-value smooth function called a phase function and t is a real parameter.

Defintion 2. Let $K \subset \mathbb{R}^m$ be a set. A uniform estimate for the oscillatory integral $J(t,s)$ is called to be the bound of the form:

$$|J(t,s)| \leq M(a,t),$$

where $s \in K$ and M is a function which does not depend on s.

Uniform estimates for oscillatory integrals had been considered in many papers, including paper by Van der Corpute (1923), Vinogradov I.M. (1931), Duistermaat J.J. (1974), Karpushkin V. N. (1981-1984), Phong D.H., Stein E.E., Strum D. (1999), Popov D.A. (2008). In this talk, we consider uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phases.

Uniform estimates for oscillatory integrals, called dispersive estimates have a few motivation. Dispersive estimates play a crucial role in the study of evolution equations. Proving such estimates often boils down to establishing decay estimates for the L^∞ norm of the solution at time t in terms of the l^1 norm of its initial data. It is by now well-established that the $l^1 \to L^\infty$ decay estimates give rise to a whole family of mixed space-time norm estimates, called Strichartz estimates. For the continuous Klein-Gordon equation such estimates have been established e.g. by Brenner, Pecher and Ginibre and Velo (see [1] and [2]). In this talk, we mainly pay attention to the cases $2 \leq d \leq 4$.

Discrete Klein–Gordon equation (DKG).
Consider the Cauchy problem for the DKG:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta_x u(t,x) + u(t,x) = F(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d, \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{1}$$

where Δ_x is the discrete Laplacian,

$$\Delta_x u(t,x) = \sum_{|x-y|=1} u(y,t) - 2du(t,x).$$

For the plane waves $e_\xi(x) = e^{ix\cdot\xi}$ we have $(1-\Delta_x)e_\xi(x) = \omega(\xi)^2 e_\xi(x)$, where $\omega : \mathcal{T}^d \to \mathbb{R}$ is the dispersion relation, given by

$$\omega(\xi) := \sqrt{1 + \sum_{j=1}^d 2(1-\cos(\xi_j))}.$$

We will identify the torus $\mathcal{T}^d = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})^d$ with the fundamental domain $[0,2\pi]^d$. The solution to (1) is given (for sufficiently regular data f, g, F) by Duhamel's formula,

$$\begin{aligned} u(t,x) = \cos(t\sqrt{\mathbf{1}-\Delta_x})f(x) + \frac{\sin(t\sqrt{\mathbf{1}-\Delta_x})}{\sqrt{\mathbf{1}-\Delta_x}}g(x) \\ + \int_0^t \frac{\sin((t-s)\sqrt{\mathbf{1}-\Delta_x})}{\sqrt{\mathbf{1}-\Delta_x}}F(s,x)ds. \end{aligned}$$

Decay estimates.
The solution $u(t,x)$ is thus a sum of oscillatory integrals of the form

$$I(t,x) := \int_{[0,2\pi]^d} e^{i(x\cdot\xi - t\omega(\xi))}a(\xi)d\xi, \tag{2}$$

where $a : [0, 2\pi]^d \to \mathbb{C}$ is a smooth function; in fact, $a(\xi) = 1$ or $a(\xi) = \omega(\xi)^{-1}$. We will be interested in obtaining time decay estimates on $I(t, x)$, uniformly in $x \in \mathbb{Z}^d$. In other words, we want to find (the largest possible) $\sigma > 0$ such that

$$\|I(t, \cdot)\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^d)} \leq C(1 + |t|)^{-\sigma}, \quad t \in \mathbb{R},$$

for some constant C independent of t.

The following theorem is our main result.

Theorem. For the oscillatory integrals (2) the following estimates hold for all $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|I(t, \cdot)\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^2)} &\leq C(1 + |t|)^{-\frac{3}{4}}, \\
\|I(t, \cdot)\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^3)} &\leq C(1 + |t|)^{-\frac{7}{6}}, \\
\|I(t, \cdot)\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^4)} &\leq C(1 + |t|)^{-\frac{3}{2}} \log(2 + |t|),
\end{aligned}$$

where C is a constant independent of t.

A proof of the Theorem is based on result of the monograph [3].

REFERENCES

1. P. G. Kevrekidis and A. Stefanov. Asymptotic behaviour of small solutions for the discrete nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations. *Nonlinearity*, 18(4):1841–1857, 2005.
2. I.A. Ikromov and J.C. Cuenin. Sharp time decay estimates for the discrete Klein-Gordon equation. *Nonlinearity* (to appear).
3. I.A. Ikromov and D. Müller. Fourier restriction and Newton polyhedra, Monograph series Princeton University press, 2016 (258 pages).

ON A VOLTERRA CUBIC STOCHASTIC OPERATOR

Jamilov U. U.[1], Amirov J. R.[2]

[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
uygun.jamilov@mathinst.uz;
[2]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan,
Javlonamirov01@gmail.com

Let $E = \{1, \ldots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on the set E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

the $(m-1)$-dimensional simplex.

A *cubic stochastic operator* (CSO) is a mapping $W \colon S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the form

$$W : x'_l = \sum_{i,j,k \in E} p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E, \tag{1}$$

where $p_{ijk,l}$ are the coefficients of heredity such that

$$p_{ijk,l} \geq 0, \ \sum_{l \in E} p_{ijk,l} = 1, \tag{2}$$

and the coefficients $p_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i, j and k (see [1,2]).

A Volterra CSO is defined by (1),(2) and by the additional assumption $p_{ijk,l} = 0,\ l \notin \{i, j, k\}$.

In [2] by authors constrained Volterra CSOs with additional condition $p_{ijk,k} = 1/3, \quad i \neq k, \quad j \neq k$ was investigated. A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of W if $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ and we denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}\,(W)$. We note that if $\omega\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ consists of a single point, then the trajectory converges to this point, as it is a fixed point of the operator W. Therefore the fixed points of a nonlinear operator describe a limit or long-run behaviour of the trajectories for any initial point.

Let $DW(\mathbf{x}^*) = \left(\partial W_i/\partial x_j(\mathbf{x}^*)\right)_{i,j=1}^{m}$ be the Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called *hyperbolic* if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit sphere.

A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called: (i) *attracting* if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are inside the unit ball; (ii) *repelling* if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are outside the unit ball; (iii) a *saddle* otherwise.

A CSO W is called regular if for any initial point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$, the limit $\lim\limits_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x})$ exits.

Let the set $\partial S^{m-1} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_i = 0$ for at least one $i \in E\}$ be the boundary of the simplex S^{m-1}; the set $\mathrm{int}\, S^{m-1} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_1 x_2 \cdots x_m > 0\}$ the interior of S^{m-1}; the set $M_{uv} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_u = x_v\}$, $u, v \in E$, a median of the simplex; the set $\Gamma_\tau = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_i = 0, \quad i \in \tau \subset E\}$ a face of the simplex S^{m-1} and $\mathbf{e}_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni}) \in S^{m-1},\ i = 1, \ldots, n$, the vertices of the simplex S^{m-1}, where δ_{ij} is the Kronecker delta.

Consider the following cubic stochastic operator defined on the S^2

$$W : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3) \\ x_2' = x_2(x_2^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 1.5x_1x_3) \\ x_3' = x_3(x_3^2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 + 1.5x_1x_2). \end{cases} \tag{3}$$

Note that the operator (3) is a Volterra CSO.

Theorem. For the CSO W (3) the following statements are true:

(**i**) The faces $\Gamma_{\{i\}}, \quad i = 1, 2, 3$ and $M_> = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_2 > x_3\}$, $M_< = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_2 < x_3\}$ are invariant sets and the median $M_= = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_2 = x_3\}$ is a invariant set;

(**ii**) $Fix\,(W) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{x}^*\}$, where $\mathbf{c}_1 = (0, 1/2, 1/2)$, $\mathbf{c}_2 = (1/2, 0, 1/2)$, $\mathbf{c}_3 = (1/2, 1/2, 0)$,

$\mathbf{x}^* = (1/5, 2/5, 2/5)$;

(**iii**) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ are attracting points, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ are saddle points, $\mathbf{x}^*$ is a repelling point;

(**iv**) if $x_2^{(0)} > 1/2$ (resp. $x_3^{(0)} > 1/2$) then $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_2$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_3$) for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1\}} \setminus \{\mathbf{c}_1\}$;

(**v**) if $x_1^{(0)} > 1/2$ (resp. $x_3^{(0)} > 1/2$) then $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_1$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_3$) for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2\}} \setminus \{\mathbf{c}_2\}$;

(**vi**) if $x_1^{(0)} > 1/2$ (resp. $x_2^{(0)} > 1/2$) then $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_1$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_2$) for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{3\}} \setminus \{\mathbf{c}_3\}$;

(**vii**) $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in (\mathrm{int}\, S^2 \cap M_=) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$;

(**viii**) $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_2$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in (\mathrm{int}\, S^2 \cap M_>) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$;

(**ix**) $\lim\limits_{n\to\infty} W^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_3$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in (\mathrm{int}\, S^2 \cap M_<) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$.

REFERENCES

1. Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. Ukrainian Math. J. 2004. Vol. 56, No 10. Page. 1699–1711.
2. Jamilov U.U., Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators. Jour. Diff. Eq. Appl. 2020. Vol.26, No 2. Page. 261–274.

m101.2

ON A STRICTLY NON-VOLTERRA QUADRATIC OPERATOR

Jamilov U. U.[1], Mamadova Z. I.[2]

[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
uygun.jamilov@mathinst.uz;
[2]Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan,
zuhroikromovna@gmail.com

On the two-dimensional simplex

$$S^2 = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1\right\}$$

we consider a strictly non-Volterra quadratic stochastic operator $V : S^2 \to S^2$ which is defined by formula

$$V : \begin{cases} x_1' = \alpha x_2^2 + c x_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_2' = a x_1^2 + d x_3^2 + 2x_1x_3, \\ x_3' = b x_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha, \beta, a, b, c, d \geq 0, \quad \alpha + \beta = a + b = c + d = 1$.

The trajectory $\left\{\mathbf{x}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\right\}$ of the quadratic operator V for an initial value $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) = V^{n+1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

The set of limit points of the trajectory (2) is denoted by $\omega\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$. A solution of the equation $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ is called a fixed point of V. In [1] it is proved that the operator (1) has a unique fixed point on the S^2 and $\omega\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ either a finite set or an infinite set. Note that it is proved the existence of the unique fixed point but not find its form.

Denote

$$C = \frac{17c^2 - (4\sqrt{5} - 60)c + 48}{4(1+c) + 2\sqrt{5}(c-2)}.$$

Theorem. If $\alpha = b = 0$, $c, d > 0$, $c + d = 1$ then the strictly non-Volterra quadratic stochastic operator (1) has a unique fixed point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2$, where

$$x_1^* = \frac{1}{2(4-c)} \cdot \left(C + \sqrt{C^2 + 4(1-c)(1+c+2\sqrt{5})}\right),$$

$$x_2^* = \frac{-2x_1^* - 1 + \sqrt{4\left(x_1^*\right)^2 + 5}}{2},$$

$$x_3^* = \frac{-2x_1^* - 1 + \sqrt{4c\left(x_1^*\right)^2 + 4cx_1^* - 4c + 5}}{2(1-c)}.$$

REFERENCES

1. Jamilov U.U. and Rozikov U.A. The dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on the 2-simplex // Sbornik: Mathematics. 2009. V.200, №9. P. 1339–1351.

KVADRATIK STOXASISTIK OPERATORNING UZLUKSIZ VAQTLI ANALOGI

Jo‘raqulova F.M.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston

f.m.joraqulova@mail.ru;

Kvadratik stoxastik operatorlarning traektoriyalarining holatini (ya’ni takrorlanishlar ketma-ketligini) o’rganish muammosi birinchi bo’lib S. Ulam va uning safdoshlari [1]-[2] asarlarida uchraydi. Shuningdek, bir qator ilmiy izlanishlarda kompyuter yordamida ikki o’lchovli S^2 simpleksda berilgan har xil tipdagi kvadratik stoxastik operatorlarning traek-toriyalarining sonli tahlili o’tkazilgan. Keyinchalik S. Ulam va uning xamkasblarining izlanishlari S^{n-1} simpleksidagi kvadratik stoxastik operatorlarni o’rganish uchun zarur bo’ladigan Lipshist konstantalarini baholashga bag’ishlangan.

Kvadratik stoxasistik operatorning uzluksiz vaqtli analogi quyidagi ko’rinishga ega:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) - x_0(t) \\ \dot{x}_1(t) = \frac{1}{2}x_0^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) + 2x_0(t)x_2(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{2}x_0^2(t) + \frac{1}{2}x_1^2(t) + 2x_0(t)x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

bunda $x(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t))$, $t > 0$ biror (biologik) sistemaning holati bo’lib, quyidagi tenglik bajarilsin

$$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) = 1.$$

Tasdiq. $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nuqta atrofda chiziqlashtirilgan (1) sistemaning yechimi ushbu ko’rinishda bo’ladi.

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} - (C_0 + C_1)e^{-2t} \\ x_1 = \frac{1}{3} + C_0e^{-2t} \\ x_2 = \frac{1}{3} + C_1e^{-2t} \end{cases}$$

ADABIYOTLAR

1. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. Наука, 1964, С. 168.
2. Stein P.R., Ulam S.M., Non-linear transformation studies on electronic computers. Rozpr. Mat. 39 (1964).

IKKI ZARRACHALI DISKRET SHRODINGER OPERATORI SPEKTRI HAQIDA

Jumanov J. A., Karimov S. S.

Jizzax davlat pedagogika instituti, Jizzax, O’zbekiston

Faraz qilaylik, $\mathbb{T}^3=(-\pi,\pi]^3$ uch o'lchamli tor, $L^2(\mathbb{T}^3)$- kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi hamda $L^{2,t}(\mathbb{T}^3)\subset L^2(\mathbb{T})^3$ toq funksiyalardan tuzilgan qism fazosi bo'lsin. $H_\mu(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$ ikki zarrachali diskret Shredinger operatorini $L^{2,t}(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$H_\mu(k)=H_0(k)-V_\mu,\ k\in\mathbb{T}^3.$$

H_0 operator $L^{2,t}(\mathbb{T}^3)=\{\varphi\in L^2(\mathbb{T}^3):\varphi(-q)=-\varphi(q)\}$ fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k)\varphi)(q)=\varepsilon_k(q)\varphi(q),\ \varphi\in L^{2,t}(\mathbb{T}^3),$$

bu yerda

$$\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{3}(1-\cos\frac{k^{(j)}}{2}\cos q^{(j)}),\ q=(q^{(1)},q^{(2)},q^{(3)})\in\mathbb{T}^3.$$

Qo'zg'alish operatori quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$(V_\mu\varphi)(p)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j\sin q^{(j)}\int_{\mathbb{T}^3}\sin t^{(j)}\varphi(t)\eta(dt),\ \varphi\in L^{2,t}(\mathbb{T}^3),$$

$\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^3_+$.

$H_0(k)$ operator funksiyaga ko'paytirish operatori va qo'zg'alish operatori V_μ kompakt ekanligidan muhim spektr turg'unligi haqidagi Weyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k))=\sigma_{ess}(H_0(k))=[\varepsilon_{min}(k),\varepsilon_{max}(k)]$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$\varepsilon_{min}(k)=\min_{q\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{3}(1-\cos\frac{k^{(j)}}{2});\quad \varepsilon_{max}(k)=\max_{q\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{3}(1+\cos\frac{k^{(j)}}{2}).$$

Faraz qilaylik,

$$\mu_i(k)=\left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\sin^2(q^{(i)})}{\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{min}(k)}dq\right)^{-1},\quad i=1,2,3$$

bo'lsin.

Quyidagi to'plamlarni kiritamiz:

$$G^{00}_\mu(k):=\{k\in\mathbb{T}^3:\mu_i(k)>\mu_i,\ i=1,2,3\};$$
$$G^{01}_\mu(k):=\{k\in\mathbb{T}^3:\mu_i(k)=\mu_i,\ \mu_j(k)>\mu_j,\ \mu_s(k)>\mu_s,$$
$$i,j,s=1,2,3,\ i\neq j\neq s\};$$
$$G^{02}_\mu(k):=\{k\in\mathbb{T}^3:\mu_i(k)=\mu_i,\ \mu_j(k)=\mu_j,\mu_s(k)>\mu_s,$$
$$i,j,s=1,2,3,\ i\neq j\neq s\};$$

$G_\mu^{03}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) = \mu_i,\ i, = 1,2,3\};$
$G_\mu^{10}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ \mu_j(k) > \mu_j,\ \mu_s(k) > \mu_s,$
$i,j,s = 1,2,3,\ i \neq j \neq s\};$

$G_\mu^{11}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ \mu_j(k) = \mu_j,\ \mu_s(k) > \mu_s,$
$i,j,s = 1,2,3,\ i \neq j \neq s\};$
$G_\mu^{12}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ \mu_j(k) = \mu_j,\ \mu_s(k) = \mu_s,$
$i,j,s = 1,2,3,\ i \neq j \neq s\};$

$G_\mu^{20}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ \mu_j(k) < \mu_j,\ \mu_s(k) > \mu_s,$
$i,j,s = 1,2,3,\ i \neq j \neq s\};$
$G_\mu^{21}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ \mu_j(k) < \mu_j,\ \mu_s(k) = \mu_s,$
$i,j,s = 1,2,3,\ i \neq j \neq s\};$
$G_\mu^{30}(k) := \{k \in \mathbb{T}^3 : \mu_i(k) < \mu_i,\ i = 1,2,3\}.$

$$\mathbb{T}^3 = \bigcup_{i,j=0, i+j\leq 3}^{3} G_\mu^{ij}(k),\ \forall \mu \in \mathbb{R}_+^3.$$

Teorema 1.*1. Agar $k \in G_\mu^{00}(k)$ bo'lsa, u holda $H_\mu(k)$ operator $\varepsilon_{min}(k)$dan chapda xos qiymatga ega emas.*

2. Agar $k \in G_\mu^{0j}(k),\ j = 1,2,3,$ bo'lsa, u holda $H_\mu(k)$ operator uchun $\varepsilon_{min}(k)$ -j karrali xos qiymat bo'ladi va $H_\mu(k)$ operator $\varepsilon_{min}(k)$dan chapda xos qiymatga ega emas.

3. Agar $k \in G_\mu^{ij}(k), i,j = 1,2,3,\ i+j \leq 3$ bo'lsa, u holda $H_\mu(k)$ operator uchun $\varepsilon_{min}(k)$ i karrali xos qiymat bo'ladi va $H_\mu(k)$ operator $\varepsilon_{min}(k)$dan chapda j ta xos qiymatga ega.

4. Agar $k \in G_\mu^{i0}(k),\ i = 1,2,3,$ bo'lsa, u holda $H_\mu(k)$ operator $\varepsilon_{min}(k)$dan chapda i ta xos qiymatga ega.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. Spectrum of the two-particle Schroedinger operator on a lattice. Theoret.and Math. Physics. 2008. NP« 155 (2). C. 753–764.
2. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. The number of eigenvalues of the two-particle discrete Schrodinger operator. Theoret.and Math. Physics. 2009. NP« 158 (2). C. 220–231.

DYNAMICS OF QUADRATIC OPERATORS WHICH MAP I_2 TO ITSELF

Juraev I.T.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
jurayev.ilhomjon.85@mail.ru;

We consider the simplex of idempotent measures on I_n (see [1],[2]), where

$$I_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n_{\max} : \max_{1\le i\le n} x_i = 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n_{\max} : x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n = \mathbf{1}\}$$

and consider quadratic maps of I_n to itself.

We describe quadratic operators and their dynamical systems by using formula $y_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ki,j} x_i x_j$. In this case we shall find $i-$ th element of I_n by using all elements of $i-$ th row of each matrix of the cubic matrix $P = (p_{ki,j})_{k,i,j=1}^n$.

The following theorem describes quadratic operators which map I_n to itself. For a cubic matrix $P = (p_{ki,j})_{k,i,j=1}^n$ a fixed $j \in \{1, 2, ..., n\}$ the matrix $(p_{ki,j})_{k,i,j=1}^n$ is called the j-th matrix.

Theorem 1. A quadratic operator $P = (p_{ki,j})_{k,i,j=1}^n$ with $p_{ki,j} \le 0$ maps I_n to itself with formula $y_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ki,j} x_i x_j$ if and only if it satisfies one of following conditions:

i) For each k-th ($k \le n$) row of the cubic matrix $P = (p_{ki,j})_{i,j,k=1}^n$ there exists $m_k \le n$ such that all of the elements k-th ($k \le n$) row are zero except elements $p_{km_k,j}$ and p_{kj,m_k}, where $m_k \ne m_q$ if $k \ne q$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$;

ii) Cubic matrix $P = (p_{ki,j})_{i,j,k=1}^n$ has at least one zero row, i.e. $\exists m \le n$ such that all of elements of m-th row of the cubic matrix consists of only zeroes, e.g. $p_{mi,j} = 0$, where $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Theorem 1 can be proved analogously to the Theorem 2.1 in [4].

Denote

$$P_{(n;m_1,m_2,...m_n)} = (p_{ki,j})_{i,j,k=1}^n, \tag{1}$$

where n is the order of the cubic matrix and m_k is the number mentioned in Theorem 1 which corresponds to the $k-$th row, $m_k \le n$, $m_k \ne m_q$, $k \ne q$.

In (1) we can see that there are $n!$ possible cases. It is not easy to analyze all cases, therefore, we consider particular cases. Due to (1) set:

$$A = \{k \in \{1, ..., n\} \mid m_k = k\}. \tag{2}$$

From (1) and (2) we get

if $n = 2$ then for the operator $P : I_2 \to I_2$ two cases arise:

1) $|A| = 2$ if $P_{(2;1,2)}$;

2) $|A| = 0$ if $P_{(2;2,1)}$.

Recall that *fixed points* of $P : I_n \to I_n$ are solutions to $P(x) = x$. Denote by $Fix\,(P)$ the set of all fixed point of P.

Theorem 2. Let $n = 2$. If Theorem 1 is satisfied, then $Fix\,(P)$ has the following form:

$$Fix(P) = \begin{cases} \left(\frac{1}{p_{11,1}}, \ 0\right) & \text{if } |A| = 1 \text{ and } p_{11,1} \ne 0; \\ \left(0, \ \frac{1}{p_{22,2}}\right) & \text{if } |A| = 1 \text{ and } p_{22,2} \ne 0; \\ (0, \ 0) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

When we map the non-fixed points by using quadratic operators they will change their coordinates. We should find the solution of the following limiting:

$$\lim_{m\to\infty} P^m(x) = \lim_{m\to\infty} P(P(P(...(P(x))...))). \tag{4}$$

Definition 1.(see [3]) Suppose x_0 is a fixed point for $F(x)$. Then x_0 is an *attracting fixed point* if $|F'(x_0)| < 1$. The fixed point x_0 is a *repelling fixed point* if $|F'(x_0)| > 1$. Finally, if $|F'(x_0)| = 1$, the fixed point called *neutral* or *indifferent*.

In the case $n = 2$, we get the following system for the quadratic operator $P_{(2;1,2)}$:

$$P_{(2;1,2)}(x) = x \Rightarrow \begin{cases} x_1 = p_{11,1}x_1^2 + (p_{12,1} + p_{11,2})\, x_1x_2, \\ x_2 = p_{22,2}x_2^2 + (p_{22,1} + p_{21,2})\, x_1x_2. \end{cases}$$

We know that at least one of these elements is zero. There arise following cases:

Case 1. Let $x_1 \leq 0$, $x_2 = 0$ then we get one-dimensional function $P(x_1) = p_{11,1}x_1^2$. Solving the equation $P(x) = x$, we obtain $x_1 = 0$ and $x_1 = \frac{1}{p_{11,1}}$ $(p_{11,1} \neq 0)$, hence the fixed points are $(0,\ 0)$ and $\left(\frac{1}{p_{11,1}},\ 0\right)$. Derivative of the function $P(x_1) = p_{11,1}x_1^2$ is

$$P'(x_1) = 2p_{11,1}x_1.$$

1.1) Since $|P'(x_1)| = |2 \cdot p_{11,1}x_1| = \left|2 \cdot p_{11,1} \cdot \frac{1}{p_{11,1}}\right| = 2 > 1$ the fixed point $x_1 = \frac{1}{p_{11,1}}$ $(p_{11,1} \neq 0)$ is a repelling fixed point of $P(x_1) = p_{11,1}x_1^2$.

1.2) The fixed point $x_1 = 0$ is an attracting fixed point of $P(x_1) = p_{11,1}x_1^2$ since $|P'(x_1)| = |2 \cdot p_{11,1}x_1| = |2 \cdot p_{11,1} \cdot 0| = 0 < 1$.

Case 2. Let $x_1 = 0$, $x_2 \leq 0$ then we get one-dimensional function $P(x_2) = p_{22,2}x_2^2$. We calculate this case analogical method which given in Case 1. Then we get following results:

2.1) The fixed point $x_2 = \frac{1}{p_{22,2}}$ $(p_{22,2} \neq 0)$ is a repelling fixed point of $P(x_2) = p_{22,2}x_2^2$.

2.2) The fixed point $x_2 = 0$ is an attracting fixed point of $P(x_2) = p_{22,2}x_2^2$.

REFERENCES

1. Shiryaev A.N., *Probability* (2-nd edition, Springer, 1996)
2. Akian M., "Densities of idempotent measures and large deviations", Trans. Amer. Math. Soc., **351**(4), (1999), 4515-4543.
3. Devaney R.L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems* (Perseus Books Publishing, L.L.C, 1992)
4. Juraev I.T. and Karimov M.M., "Quadratic Operators Defined on a Finite-dimensional Simplex of Idempotent Measures", Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity, **8**(3), (2019), 279-286.

EXPANSION OF EIGENVALUE OF PERTURBED BILAPLACIAN IN LATTICE

Keldiyev A.A.[1], Norquziyev J.[2]
[1]Djizak state pedagogical institute, Djizak, Uzbekistan
[2]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

In this thesis we investigate the spectral properties of the perturbed discrete biharmonic operator

$$\hat{h}_\mu := \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{v}, \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

in the two-dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$, where $\hat{\Delta}$ is the discrete Laplacian and $\hat{v}$ is of zero-range. From a mathematical point of view, a discrete bilaplacian is a discrete SchrГ¶dinger operator with a degenerate lower threshold.

The spectral properties of discrete Schrödinger operators with non-degenerate bottom, in particular with discrete Laplacian, have been extensively studied in recent years (see e.g. [1],[2]) because of their applications in the theory of ultracold atoms in optical lattices [2],[3]. In particular, it is well-known that the existence of the discrete spectrum is strongly connected to the threshold phenomenon [4],[5].

In this thesis we study the threshold phenomenon for $\hat{h}_\mu$.

Let $\mathbb{Z}^2$ be the two-dimensional lattice and $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ be the Hilbert space of square-summable functions on $\mathbb{Z}^2$. Consider the family

$$\hat{h}_\mu := \hat{h}_0 - \mu\hat{v}, \qquad \mu \geq 0,$$

of self-adjoint bounded operators in $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$. Here $\hat{h}_0 := \hat{\Delta}\hat{\Delta}$ is discrete bilaplacian, where

$$\hat{\Delta} f(x) = \frac{1}{2}\sum_{|s|=1}[f(x) - f(x+s)], \qquad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^2),$$

is the discrete Laplacian, and $\hat{v}$ is a zero-range operator

$$\hat{v}\hat{f}(x) = \hat{\delta}_{x0}\hat{f}(x),$$

where

$$\hat{\delta}_{x0} = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

is the Kronecker delta-function in $\mathbb{Z}^2$.

Let $\mathbb{T}^2$ be the two-dimensional torus equipped with the Haar measure and $L^2(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^2$.

By $\mathcal{F}$ we denote the the standard Fourier transform

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2), \qquad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi}\sum_{x\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(x)e^{ix\cdot p},$$

where

$$x \cdot p := \sum_{i=1}^{2} x_i p_i, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2.$$

Recall that $\sigma(\hat{\Delta}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\hat{\Delta}) = [0, 4]$ (see e.g. [1]). Hence, $\sigma(\hat{h}_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\hat{h}_0) = [0, 16]$, and by the compactness of $\hat{v}$ and Weyl's Theorem,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\hat{h}_\mu) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\hat{h}_0) = [0, 16]$$

for any $\mu > 0$.

Let

$$\mathfrak{e}(q) := \Big(\sum_{i=1}^{2}(1 - \cos q_i)\Big)^2.$$

Now we study the asymptotics of $e(\mu)$ as $\mu \searrow 0$.

Theorem. *For any $\mu \in (0, +\infty)$ the equality $\sigma_{\mathrm{disc}}(\hat{h}_\mu) = \{e(\mu)\}$ holds for the discrete spectrum of $\hat{h}_\mu$. Moreover, for sufficiently small positive μ the expansion*

$$(-e(\mu))^{1/2} = \pi^2\,\mu + \sum_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} c_{2,nm}\mu^{n+1}(-\mu\ln\mu)^m$$

holds, where $\{c_{2,nm}\}$ are some real coefficients.

REFERENCES

1. S. Albeverio, S. Lakaev, Z. Muminov: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. **5** (2004), 743–772.
2. S. Albeverio, S. Lakaev, K. Makarov, Z. Muminov: The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys. **262** (2006), 91–115.
3. M. Lewenstein, A. Sanpera, A. Ahufinger: Ultracold Atoms in Optical Lattices. Simulating Quantum Many-Body Systems. Oxford University Press, Oxford, 2012.
4. S. Lakaev, A. Khalkhuzhaev, Sh. Lakaev: Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theoret. Math. Phys. **171** (2012), 800–811.
5. S. Lakaev, Sh. Kholmatov: Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011).

CHAOTIC BEHAVIOR OF THE p-ADIC POTTS-BETHE MAPPING

Khakimov O. N.
Institute of Mathematics named after V.I.Romanovski, Tashkent,
Uzbekistan,
hakimovo@mail.ru;

The present paper is a continuation of [3], where we have started to investigate chaotic behavior of the Potts-Bethe mapping over the p-adic field ($\mathbb{Q}_p$). Note that the mapping is governed by

$$f_{\theta,q,k}(x) = \left(\frac{\theta x + q - 1}{x + \theta + q - 2}\right)^k, \tag{1}$$

where $k, q \in \mathbb{N}$ and $|\theta - 1|_p < 1$. In [3] we have considered the case when q is not divisible by p, i.e. $|q|_p = 1$. In that setting, under some conditions we were able to prove that $f_{\theta,q,k}$ is conjugate to the full shift on κ_p symbols (here κ_p is the greatest common factor of k and $p-1$). In the current paper, we are going to study the same Potts-Bethe mapping when q is divisible by p, i.e. $|q|_p < 1$. It is known that the thermodynamic behavior of the central site of the Potts model with nearest-neighbor interactions on a Cayley tree is reduced to the recursive system which is given by (1).

It is easy to notice that the function (1) is defined on $\mathbb{Q}_p \setminus \{x^{(\infty)}\}$, where $x^{(\infty)} = 2 - q - \theta$. For the sake of convenience, we write $Dom(f_{\theta,q,k}) := \mathbb{Q}_p \setminus \{x^{(\infty)}\}$. Let us denote

$$\mathcal{P}_{x^{(\infty)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_{\theta,q,k}^{-n}(x^{(\infty)}).$$

One can see that the set $\mathcal{P}_{x^{(\infty)}}$ is at most countable, and could be empty for some k, q and θ. If it is not empty, then for any $x_0 \in \mathcal{P}_{x^{(\infty)}}$ there exists an $n \geq 1$ such that after n-times we will "lost" that point.

For a given mapping f on $\mathbb{Q}_p$ we denote by $Fix(f)$ the set of all fixed points of f, i.e.

$$Fix(f) = \{x \in \mathbb{Q}_p : f(x) = x\}.$$

Let f be an analytic function and $x^{(0)} \in Fix(f)$. We define

$$\lambda = \frac{d}{dx} f(x^{(0)}).$$

The fixed point $x^{(0)}$ is called *attractive* if $0 < |\lambda|_p < 1$, *indifferent* if $|\lambda|_p = 1$, and *repelling* if $|\lambda|_p > 1$.

For an attractive fixed point $x^{(0)}$ of f, its basin of attraction is defined by

$$A(x^{(0)}) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^{(0)}\}$$

where $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

The main result of the present paper is given in the following theorem.

Theorem. Let $p \geq 3$, $k \geq 2$, $|q|_p < 1$, $|\theta - 1|_p < 1$ and $x_0^* = 1$. Then the dynamical structure of the system $(\mathbb{Q}_p, f_{\theta,q,k})$ is described as follows:
(A). If $|k|_p \leq |q + \theta - 1|_p$ then $Fix(f_{\theta,q,k}) = \{x_0^*\}$ and

$$A(x_0^*) = Dom(f_{\theta,q,k}).$$

(B). Assume that $|k|_p > |q + \theta - 1|_p$ and $|\theta - 1|_p < |q|_p^2$. Then there exists a non empty set $J_{f_{\theta,q,k}} \subset Dom(f_{\theta,q,k}) \setminus \mathcal{P}_{x^{(\infty)}}$ which is invariant with respect to $f_{\theta,q,k}$ and

$$A(x_0^*) = Dom(f_{\theta,q,k}) \setminus \left(\mathcal{P}_{x^{(\infty)}} \cup J_{f_{\theta,q,k}}\right).$$

Moreover, if κ_p is the GCF (greatest common factor) of k and $p-1$, then the followings hold:

$(B1)$. if $\kappa_p = 1$ then there exists $x_* \in Fix(f_{\theta,q,k})$ such that $x_* \neq x_0^*$ and $J_{f_{\theta,q,k}} = \{x_*\}$;

$(B2)$. if $\kappa_p \geq 2$ then $(J_{f_{\theta,q,k}}, f_{\theta,q,k}, |\cdot|_p)$ is topologically conjugate to the full shift dynamics on κ_p symbols.

It is worth pointing out that, in the present paper, the condition $|\theta - 1|_p < |q|_p^2$ is assumed to get essential estimations and calculations to prove the main result. The results of a recent paper [1] show that such condition could be loosen to $|\theta - 1|_p < |q|_p$, but only for the case $k = 3$ where explicit expressions of the fixed points of the function $f_{\theta,q,k}$ have essentially been used to get more exact estimations. However, in this paper, we are able to prove the chaoticity of the Potts-Bethe mapping for arbitrary values of k, (under the condition $|\theta - 1|_p < |q|_p^2$) and moreover, we are not even using the existence of the fixed points. Once we have proved that the Potts-Bethe mapping is conjugate to a full shift, then one concludes the existence of the fixed points. Roughly speaking, we are constructing (explicitly) a Markov partition of the mapping (1) which allows us to prove the main result of the current paper. On the other hand, the results of [3] indicate that the choaticity of the function (1) could be obtained even in the case of $|q|^2 \leq |\theta - 1|_p < |q|_p$, but it will a topic for another work. Here, it is better to emphasize that the results are valid when $p \geq 3$. The case $p = 2$ is considered pathological in the p-adic analysis (see for example [2]). Indeed, in [1] it was established that when $p = 2$ and $k = 3$ the function (1) does not have chaotic behavior. For general values of k, due to huge calculations, and a lots of technical issues, this case could be investigated elsewhere.

REFERENCES

1. Ahmad M.A.Kh., Liao L.M. Saburov M. Periodic p-adic Gibbs measures of q-state Potts model on Cayley tree: the chaos implies the vastness of p-adic Gibbs measures. J. Stat. Phys., 2018. V.171, pp.1000-1034.
2. Fan S., Liao L.M. Rational map $ax + 1/x$ on the projective line over $\mathbb{Q}_2$. Sci. China Math. 2016, V.61, pp.2221-2236.
3. Mukhamedov F., Khakimov O. Chaotic behavior of the p-adic Potts-Behte mapping//Disc. and Cont. Dyn. Syst. 2018. V.38, pp.231–245.

DYNAMICS OF $I + B_{\mathbf{b}}$ ON $c_0(\mathbb{N})$

Khakimov O. N.
Institute of Mathematics named after V.I.Romanovski, Tashkent,
Uzbekistan,
hakimovo@mail.ru;

Let X and Y be topological vector spaces over non-Archimedean valued field $\mathbb{K}$. By $L(X,Y)$ we denote the set of all continuous linear operators from X to Y. If $X = Y$ then $L(X,Y)$ is denoted by $L(X)$. In what follows, we use the following terminology: T is a linear continuous operator on X means that $T \in L(X)$. The T-*orbit* of a vector $\mathbf{x} \in X$, for some operator $T \in L(X)$, is the set

$$O(\mathbf{x}, T) := \{T^n(\mathbf{x}); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

An operator $T \in L(X)$ is called *hypercyclic* if there exists some vector $\mathbf{x} \in X$ such that its T-orbit is dense in X. The corresponding vector $\mathbf{x}$ is called T-*hypercyclic*, and the set of all T-hypercyclic vectors is denoted by $HC(T)$. Similarly, T is called *supercyclic* if there exists a vector $\mathbf{x} \in X$ such that whose projective orbit

$$\mathbb{K} \cdot O(\mathbf{x}, T) := \{\lambda T^n(\mathbf{x}); n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

is dense in X. The set of all T-supercyclic vectors is denoted by $SC(T)$. Finally, we recall that T is called *cyclic* if there exists $\mathbf{x} \in X$ such that

$$\mathbb{K}[T]\mathbf{x} := \mathrm{span} O(\mathbf{x}, T) = \{P(T)\mathbf{x}; P \text{ polynomial}\}$$

is dense in X. The set of all T-cyclic vectors is denoted by $CC(T)$.

We stress that the notion of hypercyclicity makes sense only if the space X is separable. Note that one has

$$HC(T) \subset SC(T) \subset CC(T).$$

Defination 1. Let X be a topological vector space, and let $T \in L(X)$. It is said that T satisfies the **Hypercyclicity Criterion** if there exist an increasing sequence of integers (n_k), two dense sets $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset X$ and a sequence of maps $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ such that:

(1) $T^{n_k}(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ for any $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1$;

(2) $S_{n_k}(\mathbf{y}) \to \mathbf{0}$ for any $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_2$;

(3) $T^{n_k} S_{n_k}(\mathbf{y}) \to \mathbf{y}$ for any $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_2$.

Note that in the above definition the maps S_{n_k} are not assumed to be continuous or linear. We will sometimes say that T satisfies the Hypercyclicity Criterion with respect to the sequence (n_k). When it is possible to take $n_k = k$ and $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, it is usually said that T satisfies *Kitai's Criterion* [1].

Now let us consider weighted backward shifts on $c_0(\mathbb{N})$. Recall that an operator defined as $B_{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_1) = 0$ and $B_{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_n) = b_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}$ if $n \geq 2$, is called *weighted backward shift*. Here $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is taken to be a bounded sequence on $\mathbb{K}$. The operator $B_{\mathbf{b}}$ is called *backward shift* if $b_n = 1$ for all $n \geq 1$ such shift is denoted by B. We recall that $B_{\mathbf{b}}$ has been studied in [2]. In many areas of mathematics, an operator $I + T$ appears, where I is an identity and T is a given operator. In this paper, we consider a weighted operator $B_{\mathbf{b}}$ instead of T. For a given $\mathbf{b} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ we denote $T_{\mathbf{b}} := I + B_{\mathbf{b}}$.

Theorem 6. Let $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of non-zero numbers. Assume that there exists an integer $n_0 \geq 1$ such that $b_n = \mu$ for all $n \geq n_0$. Then the following statements are equivalent:

A. $T_{\mathbf{b}}$ is hypercyclic;

B. $T_{\mathbf{b}}$ satisfies Hypercyclic Criterion;

C. $|\mu| > 1$;

D. $T_{\mathbf{b}}$ is supercyclic;

E. $T_{\mathbf{b}}$ satisfies Supercyclic Criterion;

F. $T_{\mathbf{b}}$ is cyclic.

We would like to stress that the following problems remains open for $T_{\mathbf{b}}$.

Problem 1. Does there exist $\mathbf{b} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ such that $T_{\mathbf{b}}$ is hypercyclic under condition

$$\liminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} |b_j| < \infty.$$

Problem 2. Does there exist a supercyclic operator $T_{\mathbf{b}}$ if

$$\liminf_{n\to\infty} \prod_{j=2}^{n} |b_j| < \infty.$$

Problem 3. Does there exist $\mathbf{b} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ such that $T_{\mathbf{b}}$ is hypercyclic and $T_{\mathbf{b}}^2$ is not cyclic?

REFERENCES

1. Kitai C. Invariant closed sets for linear operators. Thesis, University of Toronto, 1982.
2. Mukhamedov F., Khakimov O. Dynamics of linear operators on non-Archimedean vector spaces. Bull. Belg. Math. Soc. 2018, V.25, pp.85–105.

IKKI PARAMETRLI KUBIK STOXASTIK OPERATORNING CHEKLI O'LCHAMLI SIMPLEKSDAGI TRAYEKTORIYASI

Khamrayev A. Yu., Nurmatova Sh. Z.*
Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O'zbekiston
shaxzoda0404@inbox.ru*

Bizga

$$S^{n-1} = \{x \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, i = \overline{1,n}\}$$

(n-1) o'lchovli simpleks berilgan bo'lsin. Quyidagicha $W : S^{n-1} \to S^{n-1}$:

$$W : x_l^{'} = \sum_{i,j,k=1}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k \qquad (1)$$

akslantirishni qaraymiz. Bu yerda

$$P_{ijk,l} = P_{ikj,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} = P_{kij,l} = P_{kji,l} \geq 0, \sum_{l=1}^{n} P_{ijk,l} = 1 \qquad (2)$$

(1), (2) ga kubik stoxastik operator deb ataladi.

Biz quyidagi

$$S^2 = \{(x; y; z) \in R^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$$

to'plamni o'zini oziga akslantiruvchi $W : S^2 \to S^2$

$$W : \begin{cases} x^{'} = x(x^2 + 3xy + 3xz) \\ y^{'} = y(y^2 + 3xy + 3yz + axz) \\ z^{'} = z(z^2 + 3xz + 3yz + bxy) \end{cases} \quad (3)$$

$$a \geq 0, b \geq 0, a + b = 6, a \neq 3, b \neq 3$$

operatorni qaraymiz. (3) operator ikki parametrga bog'liq kubik stoxastik operator deb ataladi. Bu operatorning trayektoriya holatini simpleksning chegarasida o'rganamiz.

Ta'rif: $W(\lambda) = \lambda, \lambda = (x, y, z)$ *tenglamaning yechimiga operatorning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.*

Ushbu $Fix(W) = \{\lambda \in S^2 : W(\lambda) = \lambda\}$ to'plam bilan (3) operatorning qo'zg'almas nuqtalar to'plamini belgilaymiz.

Lemma 1: *(3) operatorning qozg'almas nuqtalari*

$$Fix(W) = \{M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, C\}, a \in (2; 4)$$

dan iboratdir, bu yerda

$$M_1 = (1; 0; 0), M_2 = (0; 1; 0), M_3 = (0; 0; 1), N_1 = (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}),$$

$$N_2 = (\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}), N_3 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0), C = (\frac{1}{2}; \frac{4-a}{4}; \frac{a-2}{4}).$$

Lemma 2: $a \in [0; 2] \cup [4; 6]$ *da qo'zgalmas nuqtalar* $Fix(W) = \{M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$ *dan iboratdir va:*
1) $a \in [0; 2]$ *bo'lsa,* N_3 *nuqta itaruvchi,* N_2 *egar tipli;*
2) $a \in [4; 6]$ *bo'lsa,* N_2 *nuqta itaruvchi,* N_3 *egar tipli bo'ladi.*

Lemma 3: C *nuqta* $a \in (2; 4)$ *da itaruvchi,* N_2 *va* N_3 *nuqtalar esa egar nuqtalar bo'ladi. Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:*

$$A_1 = \{\lambda \in S^2, x > \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}, z = 0\}, A_2 = \{\lambda \in S^2, x > \frac{1}{2}, y = 0, z < \frac{1}{2}\},$$

$$A_3 = \{\lambda \in S^2, x = 0, y > \frac{1}{2}, z < \frac{1}{2}\}, A_4 = \{\lambda \in S^2, x < \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}, z = 0\},$$

$$A_5 = \{\lambda \in S^2, x = 0, y < \frac{1}{2}, z > \frac{1}{2}\}, A_6 = \{\lambda \in S^2, x < \frac{1}{2}, y = 0, z > \frac{1}{2}\},$$

$$\partial S^2 = S^2 \setminus \{intS^2\}$$

Teorema 1: $\forall\lambda \in \partial S^2$ *uchun*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\lambda) \begin{cases} M_1, \lambda \in A_1 \cup A_2 \\ M_2, \lambda \in A_3 \cup A_4 \\ M_3, \lambda \in A_5 \cup A_6 \end{cases}$$

o'rinli bo'ladi va ichki qo'zg'almas nuqta hech qachon tortuvchi bo'lmaydi.

Teorema 2: $\forall\lambda \in intS^2 \cap \{\lambda \in S^2, x > \frac{1}{2}\}$ *uchun*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\lambda) = M_1$$

bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.Davronov R. R., Jamilov (Zhamilov) U. U., Ladra M. Conditional cubic stochastic operator. J. Difference Equ. Appl.-2015.-V. 21, є 12.-P.1163-1170.
2. Ganikhodjaev N. N., Ganikhodjaev R. N., Jamilov U. U. Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics. Ergod.Th.and Dynam.Sys.-2015, vol. 35, no. , pp. 1443-1473.
3. Хамраев А. Ю., Турсунова А. Х. Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора. Проблемы вычислительной и прикладной математики.-2020.-Т. 2, є 26.-С. 32-38.
4. Rozikov U. A., Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. Ukrainian Math. J.-2004.-V. 56, є 10.-P. 1699-1711.
5. Hamrayev A. Yu., Nurmatova Sh. Z. Ikki parametrli kubik stoxastik operatorlarning qo'zg'almas nuqtalari va tipi. Globallashuv davrida matematika va amaliy matematikaning dolzarb masalalari. Respublika miqyosidagi tezis materiallari. -2021.-Toshkent.-P.163-165.

THE DOUBLE DEGREE SERIES AND THEIR DOMAIN OF CONVERGENCE

Khayitova Kh.G.
Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan
hilola.hayitova@mail.ru;

This research considers two traditional important questions, which are interesting, at least to most mathematicians. The first question arises in the theory of the degree series of variable of the complex numbers, which concerns the relationship, if any, and their the domains of convergence. The second question arises in the theory of the degree series of several variables of the complex numbers. In this research we introduce double series and we give the definition of their convergence and divergence. We discuss the geometrical structure of following double degree series

$$\sum_{n+m=0}^{\infty} a_{nm}x^n y^m \tag{1}$$

Abel's theorem. If double degree series has absolute converges in point

$$(x_0, y_0)x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$$

then, in direct rectangle,

$$T = \{(x, y) : |x| < |x_0|, |y| < |y_0|\}$$

it will have absolute and uniformly converges. Abel theorem needs convergence of the degree series of several variables for $x_0 \neq 0$ points. In other words its enough that point has conditional convergence. But not for the double degree series.

We have some examples of the degree series which hasn't any converges except of $(1, 1)$ and $(0, 0)$ points. It we need the convergence at line in $(x_0, 0)$ or $(0, y_0)$ points, we'll have the convergence of (1) line in $|x| < |x_0|$ or $|y| < |y_0|$ on direct line.

Counting on Abel theorem we'll have following theorem:

The domain of convergence of the double degree series will be symmetric to the OX and OY axle. Following examples show the variety of convergence of the double series. For example,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^2 + y^2)^n$$

the domain of convergence of this degree series consist of

$$B = \{(a, y) : |x^2 + y^2| < 1.\}$$

And the domain of convergence of this degree series:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^2 - y^2)^n$$

consists of

$$G = \{(a, y) : |x^2 - y^2| < 1.\}$$

This domain of convergence $x^2 - y^2 = 1$ and $y^2 - x^2 < 1$ limited by hyperboloid.

All symmetric domains to OX or OY axles have converges with some degree series, in other words there is always some degree series which has converges only in requested domain and has no converges out of this domain. The purpose of this dissertation is to define and study a class of convergent double series and which will be of use in accelerating their convergence.

REFERENCES

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4, Анализ операторов. М., Мир, 1982, стр 426.
2. Birman M.S, Salomjak M.Z. Spectral theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: D. Reidl P.C., 313 P. (1987).

SOME PROPERTIES OF $(A, b)-$ANALYTIC FUNCTIONS IN SPECIAL CASES

Khursanov Sh.Y.[1], Baxriddinova X.U.[2]

National University of Uzbeksitan, Tashkent, Uzbekistan,
[1]shohruhmath@mail.ru, [2]bahriddinovahilola@gmail.com

Let $A, b-$be antianalytic, i.e.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

in the domain $D \subset \mathbb{C}$ such that $|A(z)| \leq C < 1, \forall z \in D$. We put

$$\bar{D}_{A,b} f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z} - b(z) f(z).$$

A function $f \in C^1(D)$ is called (A, b) −analytic in D, if it satisfies the following differential equation:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z} = b(z) f(z). \tag{1}$$

Then, according to (1), the class of (A, b) −analytic functions $f \in O_{A,b}(D)$ is characterized by $\bar{D}_{A,b} f = 0$. Let us now study the properties of (A, b) −analytic functions in the following special case:

$$A(z) \equiv const,\ b(z) \equiv const.$$

Theorem. The set of all generalized solutions of equation (1) is exhausted by the formula

$$f(z) = F(z + A\bar{z})\, e^{\frac{z}{A} + b\bar{z}},$$

where F is a holomorphic function in the domain $(z + A\bar{z})^{-1}(D)$.

Theorem (Analogue of Cauchy's theorem). If f is (A, b) −analitic in D, where $D \subset \mathbb{C}$ is a domain with a rectifiable boundary ∂D, then

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, e^{-b\bar{z}}\, (dz + A\, d\bar{z}) = 0.$$

Theorem (Analogue of Cauchy's integral formula). Let $D \subset \mathbb{C}$ is an arbitrary domain with piecewise smooth boundary ∂D. Then for any function $f \in O_{A,b}(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$ the following formula holds

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{e^{b\left(\bar{z} - \bar{\xi}\right)} f(\xi)}{\xi - z + A\left(\bar{\xi} - \bar{z}\right)} \left(d\xi + A\, d\bar{\xi}\right), \quad \forall z \in D.$$

REFERENCES

1. Sadullaev A., Zhabborov N.M. On a class of A-analitic functions, Sibirian Federal University, Maths and Physics, 2016 ,Vol 9 (3), p. 374-383.
2. Vekua I.N. Generalized analytical functions, M., "Science 1988, 512 pp.
3. Zhabborov N.M., Otaboev T.U., Sh.Ya. Khursanov, Schwartz Inequality and Schwartz Formula for A-analytical Functions, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2018, Vol. 64, No.4 p. 637-649.

SOLVABILITY OF PARTIAL INTEGRAL EQUATION OF SECOND TYPE WITH DEGENERATE KERNEL

Kucharov R. R.[1], Mirzayeva T. M.[2]

National university of Uzbekistan, Tashkent;
[1]ramz3364647@yahoo.com, [2]mirzayevatilloxon@gmail.com

Various problems of quantum mechanics, quantum field theory, partial differential equations, mathematical physics, and a number of other problems are reduced to special cases of the integral equation

$$f(x,y)=\int_{\Omega_1}k_1(x,s,y)f(s,y)d\mu_1(s)+\int_{\Omega_2}k_2(x,t,y)f(x,t)d\mu_2(t)+$$
$$+\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}k(x,s;y,t)f(s,t)d\mu_1(s)d\mu_2(t)+g(x,y). \tag{1}$$

where Ω_1 and Ω_2 are sets with a finite Lebesgue measure in $\mathbb{R}^{\nu_1}$ and $\mathbb{R}^{\nu_2}$, respectively, $k_1:\Omega_1^2\times\Omega_2\to\mathbb{C}$, $k_2:\Omega_1\times\Omega_2^2\to\mathbb{C}$, $k:\Omega_1^2\times\Omega_2^2\to\mathbb{C}$, $g:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{C}$ are given measurable functions and $\mu_1(\cdot),\mu_2(\cdot)$ are Lebesgue measures on $\sigma-$ algebras of subsets Ω_1 and Ω_2, respectively.

In 1975, Likhtarnikov and Vitova [1] studied spectral properties of partial integral operators . In [1], the following restrictions were imposed: $k_1(x,s)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_1)$, $k_2(y,t)\in L_2(\Omega_2\times\Omega_2)$ and $T_0=K=0$. In [2], spectral properties of PIO with positive kernels were studied (under restriction $T_0=K=0$)). In Kalitvin and Zabrejko [3] spectral properties of PIO with kernels of two variables in $L_p, p\geq 1$ are studied. In [4], [5] for more general PIO's with continuous kernels or kernels in $C(L_1)$ spectral properties of the PIO and solvability of partial integral equations in the space $C([a,b]\times[c,d])$ were studied.

Let $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2\in L_\infty\left[L_2(\Omega_1),\Omega_2\right]$ and

$$k_1(x,s,y)=\varphi_1(x,y)\psi_1(s,y)+\varphi_2(x,y)\psi_2(s,y),\quad (x,s,y)\in\Omega_1^2\times\Omega_2.$$

Then the partial integral operator (PIO) T_1 :

$$T_1f(x,y)=\int_{\Omega_1}k_1(x,s,y)f(s,y)d\mu_1(s)$$

is bounded linear operator on the $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$.

In this paper we study the solvability of the partial integral equation

$$f-T_1f=g, \tag{2}$$

in space $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$, where $g=g(x,y)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ is a given function.

At the $g(x,y)\neq\theta$ the partial integral equation (2) is called the nonhomogeneous Fredholm partial integral equation (NPIE) of second type with degenerate kernel. The homogeneous partial integral equation (HPIE) corresponding the NPIE (2) has the following form

$$h-T_1h=\theta. \tag{3}$$

On Ω_2 we define measurable functions $\tau_{11},\tau_{12},\tau_{21},\tau_{22}$:

$$\begin{cases}\tau_{11}(\omega)=\int_{\Omega_1}\psi_1(s,\omega)\varphi_1(s,\omega)d\mu_1(s),\\ \tau_{12}(\omega)=\int_{\Omega_1}\psi_1(s,\omega)\varphi_2(s,\omega)d\mu_1(s),\\ \tau_{21}(\omega)=\int_{\Omega_1}\psi_2(s,\omega)\varphi_1(s,\omega)d\mu_1(s),\\ \tau_{22}(\omega)=\int_{\Omega_1}\psi_2(s,\omega)\varphi_2(s,\omega)d\mu_1(s)\end{cases}$$

It's easy to see that $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22} \in L_\infty(\Omega_2)$.

Let $\mathbf{e}$ is an identity element of the algebra $L_\infty(\Omega_2)$, i.e. $\mathbf{e}(\omega) = 1$ for almost all $\omega \in \Omega_2$.

We define 2×2 matrix $\mathbb{T}$ and $\mathbb{I}$ with the elements of the $L_0(\Omega_2)$:

$$T = T(\omega) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(\omega) & \tau_{12}(\omega) \\ \tau_{21}(\omega) & \tau_{22}(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{I}(\omega) = \begin{pmatrix} e(\omega) & \theta(\omega) \\ \theta(\omega) & e(\omega) \end{pmatrix}$$

We define a measurable function $\mathbb{D}_1(\omega)$ on Ω_2 :

$$\mathbb{D}_1(\omega) = \det(\mathbb{T}(\omega) - \mathbb{I}(\omega)), \quad \omega \in \Omega_2.$$

Clearly, $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_1(\omega) \in L_\infty(\Omega_2)$. The function $\mathbb{D}_1$ is called a determinant Fredholm of the PIE (2).

Let $\phi \in L_0(\Omega)$. We define support for ϕ by the equality $s(\phi) = s_\phi = [\chi_{\Omega(\phi \neq 0)}]$, where $L_0[L_2(\Omega_1), \Omega_2]$.

Theorem. If $s(\mathbb{D}_1) = \mathbf{e}$ (i.e. $\mathbb{D}_1(\omega) \neq 0$ for almost all $\omega \in \Omega_2$), then the HPIE (3) has in the $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ trivial solution and the NPIE (2) in $L_0[L_2(\Omega_1)]$ a has unique solution.

REFERENCES

1. Likhtarnikov L.M., Vitova L.Z. About spectrum of integral operator with partial integrals. Litov.mat.Sat. - 1975, volume XV, P. 41-47.
2. Kalitvin A.S. On the spectrum of linear operators with factors integrals and positive kernels. Mezhv. Saturday. scientific. Tr.: Operators and their applications. - Leningrad, 1988, P. 43-50.
3. Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. On the theory of Partial Integral Operators. J. Int. Eq. and Appl. - 1991, №3 (3). - P. 351-382.
4. Zabrejko P.P., Kalitvin A.S., Frolova E.V. Integral equations with partial integrals in the space of continuous functions. Diff. equations. - 2002, №4 (38). - P. 538-546.
5. Eshkabilov Yu. Kh. Spectra of partial integral operators with a kernel of three variables. Centr. Eur. J. of Math. - 2008, №1 (6). - P. 149-157.

FRIDRIXS MODELIDAGI OPERATORNING DISKRET SPEKTRI

Kucharov R. R.[1], Xushvaqtov N. X.[2]

O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston

[1]ramz3364647@yahoo.com, [2]nuriddinh@gmail.com

Aytaylik $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ – bo'sh bo'lmagan kompakt to'plam va bu to'plamda $u(x)$ uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo'lsin. $L_2(\Omega)$ fazoda $k(x,s)$ yadroli K kompakt integral operatorni qaraylik. $L_2(\Omega)$ fazoda H operator quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

$$H = U - K \tag{1}$$

bu yerda

$$(Uf)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2(\Omega).$$

Statistik fizika va kvant mexanikasining ayrim masalalari H operatorning spektrini o'rganishga olib kelinadi. Kompakt operator qo'zg'alishi haqidagi Viell teoremasiga ko'ra

$$\sigma(U) = \sigma_{ess}(U) = [u_{\min}, u_{\max}], \quad u_{\min} = \inf_{x \in \Omega} u(x), \quad u_{\max} = \sup_{x \in \Omega} u(x).$$

Dastlab H operator muhim spektr qo‘zg‘alish nazariyasi 1938 yilda K.O.Fridrixs tomonidan o‘rganilgan. Odatda (1) tenglik bilan aniqlangan operator Fridrixs modeli deb ataladi. Agar $u(x) = x \in [0,1]$ va $K : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ kompakt integral operator yadrosi, ko‘rsatkichli Gyoldr yadrosi bo‘lsa, u holda H operator muhim spektrining tashqarisida chekli xos qiymatga ega bo‘lishi [1], [2] da o‘rganilgan.

Bir o‘lchamli Fridrixs modeli Eshkobilov Yu.X.[2], Minlos R.A., Sinay Ya.G.[3] ishlarida qaralgan. Agar $u(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada haqiqiy qiymatli bo‘lsa, u holda H operator diskret spektri chekli bo‘lishi Lakaev S.N.[4], Yakovlev S.I.[5] ishlarida isbotlangan.

Bizga $\Omega = [a,\ b]^{\nu}$, $(\nu \in \mathbb{N})$ da $u(x) = u(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_{\nu})$ uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo‘lsin. Mos ravishda $U : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ va $K : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Uf)(x) = u(x)f(x),\ \ (Kf)(x) = \int_{\Omega} k(x,s)f(s)ds,\ \ f \in L_2(\Omega),\ \ x,\ s \in \Omega.$$

Aytaylik $\Omega = [0,1]$ kesmada

$$k(x,s) = \alpha_1\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \alpha_2\varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)} + \alpha_3\varphi_3(x)\overline{\varphi_3(s)}$$

funksiyani aniqlaymiz, bunda $\alpha_1 > 0,\ \ \alpha_2 > 0,\ \ \alpha_3 > 0,\ \ \varphi_i \in L_2[0,1],\ \ (\varphi_i,\varphi_j) = 0,\ \ i \neq j,$ $i,j = 1,2,3,\ \ \|\varphi_i\| = 1,\ \ i = 1,2,3.$

$D(\lambda) = 1 - (\alpha_1\Phi_1(\lambda) + \alpha_2\Phi_2(\lambda) + \alpha_3\Phi_3(\lambda)) + \alpha_1\alpha_2(\Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda) - \Gamma_{12}^2(\lambda)) +$ $+\alpha_1\alpha_3(\Phi_1(\lambda)\Phi_3(\lambda) - \Gamma_{13}^2(\lambda)) + \alpha_2\alpha_3(\Phi_2(\lambda)\Phi_3(\lambda) - \Gamma_{23}^2(\lambda)),\ \lambda \in (-\infty,0)$ funksiyani qaraymiz, bu yerda

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_1^2(s)}{u(s)-\lambda}ds,\ \Phi_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_2^2(s)}{u(s)-\lambda}ds,\ \Phi_3(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_3^2(s)}{u(s)-\lambda}ds,$$

$$\Gamma_{12}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)}{u(s)-\lambda}ds,\ \Gamma_{13}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_1(s)\varphi_3(s)}{u(s)-\lambda}ds,\ \Gamma_{23}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi_2(s)\varphi_3(s)}{u(s)-\lambda}ds.$$

Tasdiq. $D(\lambda)$ funksiya $K_\lambda - E$ operatorning $k(x,s)$ yadro uchun Fredgolm determinanti bo‘ladi.

Qulaylik uchun quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\lim_{\lambda\to 0-0}\Phi_1(\lambda) = M_1,\ \ \lim_{\lambda\to 0-0}\Phi_2(\lambda) = M_2,\ \ \lim_{\lambda\to 0-0}\Phi_3(\lambda) = M_3,$$

$$\lim_{\lambda\to 0-0}\Gamma_{12}(\lambda) = M_{12},\ \ \lim_{\lambda\to 0-0}\Gamma_{13}(\lambda) = M_{13},\ \ \lim_{\lambda\to 0-0}\Gamma_{23}(\lambda) = M_{23}.$$

Teorema. Faraz qilaylik $\lim\limits_{\lambda\to 0-0}\Phi_1(\lambda) = M_1 < \infty,$ $\lim\limits_{\lambda\to 0-0}\Phi_2(\lambda) = M_2 < \infty,$ $\lim\limits_{\lambda\to 0-0}\Phi_3(\lambda) = M_3 < \infty$, bo‘lsin. Agar $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 < 1$ tengsizlik bajarilsa, u holda H operator manfiy xos qiymatga ega bo‘lmaydi.

ADABIYOTLAR

1. Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д. К теории возмущений непрерывного спектра. Докл. АН СССР. 1962. Т.145, №2. С. 301-304.
2. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности числа отрицательных собственных значений модели

Фридрихса. Наносистемы: физика, химия, математика, 2012, 3(6), С. 16-24.
3. Минлос Р.А., Синай Я.Г. Исследование спектров стохаетических операторов, возникающих в решет частых моделях газа. ТМФ. 1970. Т.2. №2. С. 230-243.
4. Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса. Докл. АН УзССР. 1979. №4. С.9-10.
5. Яковлев С.И. Теорема единственности и сингулярный спектр в модели Фридрихса около особой точки. Алгебра и анализ. 2003. Т.15. №1. С. 215-239.
6. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса. Мат.труды. 2011. Т.14. №1. С. 195-211.

ON ESTIMATES FOR NORM OF AN INTEGRAL OPERATOR WITH OINAROV KERNEL

Kuliev K.[1], Kulieva G[2], Eshimova M.[3]
[1] Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
kulievkomil@gmail.com;
[2] Samarkand branch of TUIT, Samarkand, Uzbekistan
kulievag@mail.ru;
[3] Samarkand state Architectural and Civil Engineering Institute, Samarkand, Uzbekistan,
eshimova_ math@mail.ru.

Let $(a, b) \subset R$ and u, v be weight functions in (a, b), i.e., positive measurable functions defined a.e. in (a, b). Let $p, q > 1$ and introduce weighted Lebesgue spaces

$$L_{p,v} = \{f : \|f\|_{p,v}^p := \int_a^b |f(t)|^p v(t)dt < \infty\}$$

and similarly $L_{q,u}$. In this paper we consider the integral operator

$$H : L_{p,v} \to L_{q,u},\ (Hf)(x) := \int_a^x k(x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

where $k(x, t)$ is called kernel of the operator, which is nonnegative measurable function defined a.e. in $(a, b) \times (a, b)$.

The problem of boundedness of this operator in Lebesgue spaces began to be studied in the last decades of the last century. Let us now give some scientific conclusions concerning operators of this type. For example, F.J. Martin-Reyes and E. Sawyer [2] and V.D. Stepanov [3] considered the Riemann-Liouville fractional integral operator, i.e., (1) of the kernel $k(x,t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha \geq 1$ and $\Gamma(\alpha)$ is the Gamma function. S.Bloom and R.Kerman [4] and R.Oinarov [5,6] gave equivalent conditions for boundedness of (1) for kernels $k(x, t)$ is a continuous nonnegative function increasing in the first argument, decreasing in the second argument and satisfying the condition: there exists a number $h \geq 1$ such that

$$k(x, s) \leq h(k(x, t) + k(t, s))$$

for all $a < s \leq t \leq x < b$. Functions $k(x, t)$ satisfying the above conditions are also called *Oinarov's kernel.* In the works on this topic, the main focus was on finding equivalent conditions for the boundedness of the operator in (1), where estimates for the operator norm are very rare. In the theory of differential equations it is very important to obtain the exact estimates.

Let denote

$$B_0 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b k^q(t,x)u(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$B_1 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_a^x k^{p'}(x,t)v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{p'}} v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

where $p' = \frac{p}{p-1}, q' = \frac{q}{q-1}$ and $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Theorem 1. Let $1 < q < p < \infty$. Then the norm of the integral operator in (1) satisfies

$$A \leq \|H\| \leq C,$$

where C is a positive solution of the equation

$$C^{q'} - hq^{\frac{1}{q-1}}(p')^{\frac{1}{p'(q-1)}}(q')^{\frac{1}{p(q-1)}}B^{\frac{1}{q-1}}C = hq^{\frac{1}{q-1}}p'(q-1)^{\frac{1}{p}}B^{q'} \tag{2}$$

and $B = max\{B_0, B_1\}$.

Remark. Equation (2) has a unique positive solution, since

$$h(x) = \frac{x^{q'}}{q^{\frac{1}{q-1}}p'(q-1)^{\frac{1}{p}}B^{q'} + q^{\frac{1}{q-1}}(p')^{\frac{1}{p'(q-1)}}(q')^{\frac{1}{p(q-1)}}B^{\frac{1}{q-1}}x}$$

is continuous and monotone increasing function of x in $(0, \infty)$, $h(0) = 0$ and $h(\infty) = \infty$.

Example. Let $q = 2$ and $h \geq 1$. Then Equation (2) and it's positive solution take the forms

$$C^2 - 2^{\frac{p+1}{p}}h(p')^{\frac{1}{p'}}BC = 2hp'B^2$$

and

$$C = \left(2^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}h + \sqrt{2^{\frac{2}{p}}(p')^{\frac{2}{p'}}h^2 + 2hp'} \right) B,$$

respectively.

Theorem 2. Let $1 < q < p < \infty$. Then the norm of the integral operator in (1) satisfies

$$B \leq \|H\| \leq 2^{\frac{1}{q'}}qh^{q-1}(p')^{\frac{1}{p'}}(q')^{\frac{1}{p}}B.$$

REFERENCES

1. A.Kufner, L.Maligranda, L.-E. Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen, 2007.
2. F. J. Martin-Reyes and E. Sawyer, Weighted Inequalities for Riemann-Liouville Fractional Integrals of Order One and Greater. Proc. Amer. Math. Soc. 106, 3(1989), pp. 727-733.
3. V.D. Stepanov. Weighted inequalities for a class of Volterra convolution operators. J. London Math. Soc. 45 (1992), No.2, 232-242.
4. S.Bloom, R.Kerman, Weighted norm inequalities for operators of Hardy type, Proc. Amer. Math. Soc.113 (1991) (1), pp. 135-141.
5. R.Oinarov, Weighted inequalities for a class of integral operators (Russian). Dokl. Akad.

Nauk..SSSR 319 (1991) (5), 1076-1078; translation in Soviet Math. Dokl. 44 (1992) (1), 291-298.
6. R.Oinarov, Two-sided estimates for the norm of some classes of integral operators (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov 204 (1993), 240-250; translation in Proc. Steklou Inst. Moth. 204 (1994) (3)

THE EXISTENCE OF EIGENVALUE OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL UNDER RANK THREE PERTURBATION

Kurbanov Sh. H.[1], **Eshmurodov O. A.**[2]
Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
[1]kurbanov-shaxzod@mail.ru, [2]eshmurodovodil@mail.ru

Let $\mathbb{T}^3=(-\pi,\pi]^3$ be the three dimensional torus (Brillion zone) and let $L^2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$. We consider the Generalized Friedrichs model associated to a sistem of two identical quantum particles as follows:

$$H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p)=H_0(p)-V,\quad V=\mu_1V_1+\mu_2V_2+\mu_3V_3,\quad \mu_1,\mu_2,\mu_3>0. \tag{1}$$

here $H_0(p)$, $p\in\mathbb{T}^3$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot):=w(p,\cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q)=w_p(q)f(q),\quad f\in L^2(\mathbb{T}^3).$$

and $V_i, i=1,2,3$ are integral operators i.e.

$$(V_if)(q)=\varphi_i(q_i)\int\limits_{\mathbb{T}^3}\varphi_i(s_i)f(s)ds,\quad i=1,2,3$$

Hypothesis 1. (i) The functions $\varphi_i(\cdot), i=1,2,3$ are real valued and belong to $C^{(1)}(\mathbb{T}^1)$

(ii) The function $w(\cdot,\cdot)$ is real analytic in $(\mathbb{T}^3)^2=\mathbb{T}^3\times\mathbb{T}^3$ and has a unique non-degenerate minimum at $(0,0)\in(\mathbb{T}^3)^2$.

The perturbation V is positive operator of rank three. So, by the well-known Weyl theorem [1] the essential spectrum of the operator $H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p)$ coincides with the spectrum of $H_0(p)$ and fills the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p))=\sigma_{ess}(H_0(p))=\sigma(H_0(p))=[m(p),\,M(p)],$$

here

$$m(p)=\min_{q\in\mathbb{T}^3}w_p(q),\quad M(p)=\max_{q\in\mathbb{T}^3}w_p(q).$$

Hypothesis 2. For each $z<m(p)$ the following relations are true

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi_i(s_i)\varphi_j(s_j)}{w_p(s)-z}ds=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,3.$$

Observe that by Hypothesis 1 there exist such δ-neighborhood $U_\delta(0)\subset\mathbb{T}^3$ of the point $p=0\in\mathbb{T}^3$ and analytic function $q_0:U_\delta(0)\to\mathbb{T}^3$ that for any $p\in U_\delta(0)$ the point $q_0(p)=(q_0^{(1)}(p),q_0^{(2)}(p),q_0^{(3)}(p))\in\mathbb{T}^3$ is a unique non degenerated minimum of the function $w_p(\cdot)$ as well as the following integrals exist:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_i^2(s_i)ds}{w_p(s)-m(p)}, \quad i=1,2,3.$$

We set

$$\mu_i(p) = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_i^2(s_i)ds}{w_p(s)-m(p)} \right)^{-1} > 0, \quad i=1,2,3.$$

The main result is the following theorem

Theorem. The operator $H_{\mu_1,\mu_2,\mu_2}(p)$ has unique eigevalue $E_i(\mu_i,p)$ below $m(p)$ if and only if $\mu_i > \mu_i(p)$, $0 < \mu_j < \mu_j(p)$, $0 < \mu_k < \mu_k(p)$, $i,j,k = 1,2,3$, $i \neq j, i \neq k$. The function $E_i(\mu_i,p)$ is monotonously decreasing in $(\mu_i(p),+\infty)$ by μ_i and real analytic on $U_\delta(0)$ by p. Associated eigenfunction has of the form

$$\Psi_i(\mu_i,p,\cdot,E_i(\mu_i,p)) = \frac{C_i\mu_i\varphi_i(q_i)}{w_p(q)-E_i(\mu_i,p)}$$

Generalized Friedrichs model has been considered also in [2,3].

REFERENCES

1.M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators.// Academic Press, N.Y., 1978.

2. Lakaev S., Ibrahim A., Kurbanov Sh.: Threshold Effects for the Generalized Friedrichs model with the perturbation of rank one, // Abstract and Applied Analysis 2012(2012)

3. Lakaev S., Darus M. and Kurbanov Sh.: Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one// J. Phys. A: Math. Theor. 46(2013)

THE EIGENVALUE ASYMPTOTICS OF THE ONE-DIMENSIONAL DISCRETE SCHÖDINGER OPERATOR

Madatova F. A.[1], Axralov H. Z.[2], Qurbonov O. I.[3]

[1] National Universitety of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
fotimamadatova2@gmail.com;

[2,3]Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan
[2]axralovh@mail.ru; [3]oybekqurbonov1994@gmail.com

The spectral properties of grid operators have aroused great interest among mathematicians. Graph and Schenker (1997), D.S.Mattis (1976), A.I.Mogilner (1991), Yafaev (2000) in models of solid state physics and at the same time on the fields theory of lattice one-particle and multi-particle discrete Schrödinger operators with analogues of Schrödinger operators are considered. Therefore, understanding spectrum of such operators is a topic of central importance in physics.

Let $\mathbb{Z}$ be the one-dimensional lattice, $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = (-\pi;\pi]$ be the one-dimensional torus, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ be real parameters.

The Discrete Laplacian operator in the momentum representation. The one-particle Schrödinger operator H in the momentum representation is of the form defined by

$$H = \mathcal{F}^*\hat{H}_\mu\mathcal{F}, \quad H = H_0 - V,$$

where

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\triangle)\mathcal{F}, \quad V = \mathcal{F}^*\hat{V}\mathcal{F}$$

and $\mathcal{F}$ stands for the standard Fourier transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ and $\mathcal{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ is its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T})$ as multiplication operator by the function $\varepsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad p \in \mathbb{T},$$

where

$$\varepsilon(p) = (1 - \cos p) + \beta(1 - \cos 2p), \quad p \in \mathbb{T}, \quad \beta \geq 0. \tag{1}$$

In the physical literature, the function $\varepsilon(\cdot)$, being a real valued-function on $\mathbb{T}$, is called the dispersion relation of the Laplacian operator $-\Delta$.

The potensial operator

$$(Vf)(p) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

The essential spectrum.

H_0 is a multiplication operator by a function, the perturbation V is the one-dimensional operator and, therefore, in accordance to the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum the equality $\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma_{ess}(H_0)$ holds, and the essential spectrum of the operator H_μ consists of the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\lambda\mu}) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}],$$

where

$$\varepsilon_{\min} = 0, \quad \varepsilon_{\max} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{(1+4\beta)^2}{8\beta}, & \beta > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Fredholm determinant of the operator H_μ.

For any $\mu \in \mathbb{R}$, we define the Fredholm determinant associated with the operator H_μ as a regular function in $z \in \mathbb{R} \setminus [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ as

$$D(\mu, z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{dp}{\varepsilon(p) - z}.$$

Lemma a) If $\mu > 0$, the operator H_μ has a unique eigenvalue $z(\mu)$ in the interval $(-\infty, 0)$ and has no eigenvalue to the right of the essential spectrum.

b) If $\mu < 0$, the operator H_μ has a unique eigenvalue $z(\mu)$ in the interval $(\varepsilon_{max}, \infty)$ and has no eigenvalue to the left of the essential spectrum.

The main result of our work is as follows:

Theorem. *$z(\mu)$ satisfies the asymptotics*

$$z(\mu) = -\mu + (1 + \beta) - \left(\frac{1 + \beta^2}{2!}\right)\frac{1}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \qquad as \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.I.
2. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.4. Analysis of operators. (1982)
3. Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marinus A. Kaashoek. Basic Classes of Linear Operators. Birkh*ä*user Verlag 2003.
4. F. Hiroshima, Z. Muminov, U. Kuljanov. Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on n dimensional lattice. ISSN: 0308 -1087 (Print) 1563-5139 (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/gma20.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

SILJISHLI FUNKSIONAL OPERATORLARNING BIR TOMONLAMA TESKARILANUVCHANLIK SHARTLARI

Mardiyev R., Xaydarova G.
Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston.
g.mamirovna@mail.ru

Γ-sodda silliq kontur, $\alpha-\Gamma$ konturni o‘z-o‘ziga o‘tkazuvchi diffeomorfizm (siljish) bo‘lib, Γ konturning yo‘nalishini o‘zgartiruvchi bo‘lsin. Ma’lumki ([1], C. 24-29) yo‘nalishni o‘zgartiruvchi siljish albatta ikkita z_1 va z_2 qo‘zg‘almas nuqtalarga ega bo‘ladi. Bu ishda $L_p(\Gamma)$, $1\le p\le\infty$ fazosida

$$A=\alpha(t)I-b(t)W$$

ko‘rinishdagi siljishli funksional operatorlarning bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlari o‘rganilgan. Bu yerda $\alpha(t)$, $b(t)\in C(\Gamma)$, I-birlik operator, $W-$ siljish operatori:

$$(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)],\ \ t\in\Gamma.$$

$\alpha-$ siljishning qo‘zg‘almas nuqtalari to‘plamini $\Im=\{z_1,z_2\}$ orqali, γ_1 orqali esa Γ konturning musbat yo‘nalishida z_1 va z_2 nuqtalarni (z_1 dan z_2 nuqtaga qarab olingan) tutashtiruvchi yoyini belgilaylik. $\gamma_2=\Gamma\backslash\gamma_1$ bo‘lsin

Siljish yo‘nalishni o‘zgartiruvchi bo‘lgan holda A operatorning bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlarini o‘rganish, yo‘nalishni saqlovchi $\alpha_2(t)=\alpha(\alpha(t))$, $t\in\Gamma$ siljishli funksional operatorlarni o‘rganishga keltirilgan.

Ma’lumki α_2 siljishning qo‘zg‘almas nuqtalari to‘plami bo‘sh emas, α_2 siljishning qo‘zg‘almas nuqtalari to‘plami chekli yoki cheksiz bo‘lsin.

$\phi=supp[\tau-\alpha_m(\tau)]$ orqali $\alpha_m(\tau)\neq\tau$ shartni qanoatlantiruvchi Γ konturning barcha nuqtalari to‘plamining yopig‘ini belgilaylik. $U(t)$, $\alpha(t)$, $b(t)\in C(\Gamma)$ funksiyalar uchun

$$U_\pm=\lim_{n\to\pm\infty}U(\alpha_n(t))U(\alpha_{n+1}(t)),h_\pm=|a_\pm(t)|-|\alpha'_\pm(t)|^{-1/p}|b_\pm(t)|,$$

$$\Gamma_1=\Gamma\backslash\phi,\ \Gamma_2=\{t\in\phi:h_\pm(t)>0\},\ \Gamma_3=\{t\in\phi:h_\pm(t)<0\},$$

$$\Gamma_4=\{t\in\phi:h_+(t)<0<h_-(t)\},\ \Gamma_5=\{t\in\phi:h_+(t)>0>h_-(t)\}.$$

$$\nu_A(t)=\begin{cases}\alpha(t)\alpha(\alpha(t))-b(t)b(\alpha(t)), & t\in\Gamma_1\\ \alpha(t)\alpha(\alpha(t)), & t\in\Gamma_2,\\ b(t)b(\alpha(t)), & t\in\Gamma_3\\ 0, & t\in\Gamma\backslash\sum_{i=1}^{3}\Gamma_i\end{cases}$$

belgilashlarni kiritamiz.

$\alpha-$ siljish yo'nalishni o'zgartuvchi bo'lganda quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema: $A-$ operator o'ngdan (chapdan) teskarilanuvchi bo'lishi uchun

$$\nu_A(t) \neq 0, \ \ \forall t \in \Gamma \backslash \Gamma_4 (\forall t \in \Gamma \backslash \Gamma_5)$$

va

$$(\forall t \in \Gamma \backslash \Gamma_4), \ \ (\exists k_0 \in \mathbb{Z}) \forall k \geq k_0, \ \ b(\alpha_k(t)) \neq 0, \ \ \forall k < k_0, \ \alpha(\alpha_k(t)) \neq 0,$$

(Mos ravishda $(\forall t \in \Gamma_5)$, $(\exists k_0 \in \mathbb{Z})$, $\forall k < k_0$, $b(\alpha_k(t)) \neq 0$, $\forall k > k_0$, $\alpha(\alpha_k(t)) \neq 0)$.

ADABIYOTLAR

1. Литвупчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. Наука, 1977 г. 448 с.

ASYMPTOTICA FOR THE EIGENVALUE OF THE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE TWO-DIMESIONAL LATTICE

Muminov Z. E.[1], Madatova F. A.[2]

National Universitety of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,

[1]zimuminov@gmail.com, [2]fotimamadatova2@gmail.com

The spectral properties of lattice operators have aroused great interest among mathematicians. Graph and Schenker (1997), D.S.Mattis (1976), A.I.Mogilner (1991), Yafayev (2000) in models of solid state physics and at the same time on the fields theory of lattice one-particle and multi-particle discrete Schrödinger operators with analogues of Schrödinger operators are considered. Therefore, understanding spectrum of such operators is a topic of central importance in physics.

Let $\mathbb{Z}^2$ be the two-dimensional lattice, $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 = (-\pi; \pi]^2$ be the two-dimensional torus, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ be real parameters.

The one-particle Schrödinger operator H in the momentum representation is of the form defined by

$$H = \mathcal{F}^* \widehat{H}_\mu \mathcal{F}, \quad H = H_0 - V,$$

where

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\triangle)\mathcal{F}, \quad V = \mathcal{F}^* \widehat{V} \mathcal{F}$$

and $\mathcal{F}$ stands for the standard Fourier transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}^2) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ and $\mathcal{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ is its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T}^2)$ as multiplication operator by the function $\varepsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^2), \quad p \in \mathbb{T}^2,$$

where

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{2} ((1 - \cos p_j) + \beta(1 - \cos 2p_j)), \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \beta \geq 0.$$

In the physical literature, the function $\varepsilon(\cdot)$, being a real valued-function on $\mathbb{T}^2$, is called the dispersion relation of the Laplacian operator $-\triangle$.

The potensial operator

$$(Vf)(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^2).$$

H_0 is a multiplication operator by a function, the perturbation V is the one-dimensional operator and, therefore, in accordance to the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum the equality $\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma_{ess}(H_0)$ holds, and the essential spectrum of the operator H_μ consists of the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\lambda\mu}) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}],$$

where

$$\varepsilon_{\min} = 0, \quad \varepsilon_{\max} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{(1+4\beta)^2}{4\beta}, & \beta > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

For any $\mu \in \mathbb{R}$, we define the Fredholm determinant associated with the operator H_μ as a regular function in $z \in \mathbb{R} \setminus [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ as

$$D(\mu, z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{dp}{\varepsilon(p) - z}$$

Theorem. *$z(\mu)$ satisfies the asymptotics*

$$z(\mu) = -\mu + 2(1+\beta) - \left(1+\beta^2\right) \frac{1}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.1. Functional analysis, 1977
2. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.4. Analysis of operators, 1982.
3. Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marinus A. Kaashoek. Basic Classes of Linear Operators, Birkh*ä*user Verlag, 2003.
4. F. Hiroshima, Z. Muminov, U. Kuljanov. Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on n dimensional lattice. ISSN: 0308 -1087 (Print) 1563-5139 (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/gma20.
5. М.В.Федорюк. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987

RANGI BIR QO'ZG'ALISHLI DISKRET SCHRÖDINGER OPERATORLARI

Qurbonov O. I.[1], Axralov H. Z.[2], Madatova F. A.[3]

[1,2]Tashkent state technical university, Tashkent, Uzbekistan

[3]National universitety of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[1]oybekqurbonov1994@gmail.com,[2]axralovh@mail.ru,[3]fotimamadatova2@gmail.com.

Kvant mexanikasi, matematik fizika, matematik analiz va ularga bog'liq sohalardagi Schrödinger opertorlarining spektral xossalari, shu jumladan panjaradagi Schrödinger operatorlari va ularning qattiq jismlar fizikasidagi tatbiqlari ahamiyatli hisoblanadi.

$L^2(\mathbb{T}^d), d-$ o'lchamli panjara ($\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$) da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi.

Lokal bo'lmagan diskret Schrödinger operatorining kvazi impuls tasviri $L^2(\mathbb{T}^d)$- Hilbert fazosida quyidagicha ta'sir etadi:

$$h_\mu = h_0 - \mu V,$$

bunda h_0 operator $\Psi(e(\cdot))$ uzluksiz funksiyaga ko'paytirish operatori; μ -parametr; V-integral operator.

$$(h_0 f)(p) = \Psi(e(p))f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

bunda $e(p) = \sum_{i=1}^d (1-\cos p_i)$, $p \in \mathbb{T}^d$. $\Psi \in C(0;\infty)$ - uzluksiz monoton kamayuvchi funksiya.

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(q)dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Har qanday $\mu \in \mathbb{R}$ uchun h_μ operatorning Fredgolm determinantini $z \in \mathbb{C} \setminus [\Psi_{\min}; \Psi_{\max}]$ ning funksiyasi sifatida quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta(\mu, z) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\Psi(e(q)) - z}.$$

bunda $\Psi_{\min} = \Psi(e(0))$ va $\Psi_{\max} = \Psi(e(2d))$.

1-lemma. *$z \in \mathbb{C} \setminus [\Psi_{\min}; \Psi_{\max}]$ soni h_μ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun*

$$\Delta(\mu, z) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Shart 1. Birorta $0 < \alpha \leq 1, 0 < C_1 < C_2$ uchun

$$C_1|x - e(0)|^\alpha \leq |\Psi(x) - \Psi(e(0))| \leq C_2|x - e(0)|^\alpha$$

bo'lsin, bunda

$$C_1 = \liminf_{x \to e(0)} \frac{\Psi(e(x)) - \Psi(0)}{|x|^\alpha}, \quad C_2 = \limsup_{x \to e(0)} \frac{\Psi(e(x)) - \Psi(0)}{|x|^\alpha}.$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\mu_0 = (2\pi)^d \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\Psi(e(q)) - \Psi(e(0))} \right)^{-1}.$$

2-lemma. *(a) Agar $\alpha \geq d/2$ bo'lsa, u holda $\mu_0 = 0$ bo'ladi.*

(b) Agar $\alpha < d/2$ bo'lsa, u holda $\mu_0 > 0$ bo'ladi.

3-lemma. *(a) $\mu > \mu_0 > 0$ bo'lsa, h_μ operatorning $(-\infty; \Psi(e(0)))$ intervalda yagona $z(\mu)$ bir karrali xos qiymati mavjud bo'ladi.*

(b) $\mu_0 = 0$ bo'lsa, ya'ni $2\alpha \geq d$ bo'lsa, h_μ operatorning $(-\infty; \Psi(e(0)))$ intervalda yagona $z(\mu)$ bir karrali xos qiymati mavjud bo'ladi. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$f_0(p) = \frac{1}{\Psi(e(p)) - \Psi(e(0))}$$

4-lemma. *(a) Agar $\alpha < d/4$ bo'lsa, u holda $f_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ munosabat o'rinli bo'ladi.*

(b) Agar $d/4 \leq \alpha < d/2$ bo'lsa, u holda $f_0 \in L^1(\mathbb{T}^d)/L^2(\mathbb{T}^d)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

(c) Agar $\alpha \geq d/2$ bo'lsa, shunday $\varepsilon\,(0 < \epsilon < 1)$ topilib $f_0 \in L^\epsilon(\mathbb{T}^d)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Teorema. *(a) Agar $\alpha < d/4$ bo'lsa, $\Psi(e(0))$ soni h_μ operatorning bo'sag'a xos qiymati bo'ladi.*

(b) Agar $d/4 \leq \alpha < d/2$ bo'lsa, $\Psi(e(0))$ soni h_μ operatorning bo'sag'a rezonansi bo'ladi.

(c) Agar $\alpha \geq d/2$ bo'lsa, $\Psi(e(0))$ soni h_μ operator uchun regulyar nuqta bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. M.: Mir.1977
2. Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. T.4. Analiz operatorov. M.: Mir. 1982
3. Kholmatov Sh., Pardabayev M. On spectrum of the Discrete Bilaplacian with Zero-range Perturbation. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No 6, P. 1286-1293.

PERIODIC GROUND STATES FOR THE ISING MODEL WITH A PERIODIC EXTERNAL FIELD ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Rahmatullayev M. M.[1],Asqarov J. N.[2]

[1]Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
mrahmatullaev@rambler.ru;
[2]Namangan state university, Namangan, Uzbekistan,
askarjavokhir02@gmail.com

Let $\tau^k = (V, L)$ be a Cayley tree of order k, i.e, an infinite tree such that exactly $k+1$ edges are incident to each vertex. Here V is the set of vertices and L is the set of edges of τ^k.[1]

Let G_k denote the free product of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$ of order 2 with generators $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, i.e., let $a_i^2 = e$.

There exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order k and the group G_k.[1]

For each $x \in G_k$, let $S_1(x)$ denote the set of all neighbors of x, i.e., $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$, where $\langle x, y\rangle$ means that the vertices x and y are nearest neighbors.

Assume that spin takes its values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. By a configuration σ on V we mean a function taking $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \Phi^V$.

Consider the quotient group $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$, where G_k^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$.

Definition 1. A configuration $\sigma(x)$ is called to be G_k^*-periodic if $\sigma(x) = \sigma_i$ for all $x \in G_k$ with $x \in H_i$. A G_k-periodic configuration is called to be translation invariant.

By *period* of a periodic configuration we mean the index of the corresponding normal subgroup. Ising model with $G_k^{(2)}-$periodic external field is defined according to the following Hamiltonian:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V;\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{x\in V} \alpha_x \sigma(x), \qquad (1)$$

where $J_1, J_2, \alpha_x \in \mathbb{R}$ and

$$\alpha_x = \begin{cases} \alpha_0, \text{ if } \ x \in G_k^{(2)}, \\ \alpha_1, \text{ if } \ x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

where $\alpha_0 \neq \alpha_1$ and $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \ \text{ is even}\}$.

The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x \in S_1(c_b)} \sigma(x)\sigma(c_b) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in b;\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha_{c_b}\sigma(c_b). \qquad (2)$$

It is not difficult to prove the following lemma.

Lemma 1 We have

$$U(\sigma_b)\in\{U^{(0)}_{+0},U^{(0)}_{-0},U^{(1)}_{+0},U^{(1)}_{-0},...,U^{(0)}_{+(k+1)},U^{(0)}_{-(k+1)},U^{(1)}_{+(k+1)},U^{(1)}_{-(k+1)}\}$$

for all σ_b, where $U^{(j)}_{\pm i}=(\frac{k+1}{2}-i)J_1+(\frac{k(k+1)}{2}+2i(i-k-1))J_2\pm\alpha_j, i=0,1,...,k+1, j=0,1.$

Definition 2. A configuration φ is called a ground state of the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b)=\min\{U^{(0)}_{+0},U^{(0)}_{-0},U^{(1)}_{+0},U^{(1)}_{-0},...,U^{(0)}_{+(k+1)},U^{(0)}_{-(k+1)},U^{(1)}_{+(k+1)},U^{(1)}_{-(k+1)}\}$$

for all $b\in M$.

For a fixed $m=+0,-0,+1,-1,...,+(k+1),-(k+1), j=0,1$, we set

$$A^{(j)}_m=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4 U^{(j)}_m=\min\{U^{(0)}_{+0},U^{(0)}_{-0},...,U^{(1)}_{+(k+1)},U^{(1)}_{-(k+1)}\}\}.$$

Let $k=2$ and quite cumbersome but not difficult calculations show that

$$A^{(0)}_{\pm0}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\leq0, J_1+4J_2\leq0, \mp\alpha_0\geq0, |\alpha_1|\leq\mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm0}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\leq0, J_1+4J_2\leq0, \mp\alpha_1\geq0, |\alpha_0|\leq\mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm1}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\leq0, J_1+4J_2\geq0, \mp\alpha_0\geq0, |\alpha_1|\leq\mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm1}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\leq0, J_1+4J_2\geq0, \mp\alpha_1\geq0, |\alpha_0|\leq\mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm2}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\geq0, J_1-4J_2\leq0, \mp\alpha_0\geq0, |\alpha_1|\leq\mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm2}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\geq0, J_1-4J_2\leq0, \mp\alpha_1\geq0, |\alpha_0|\leq\mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm3}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\geq0, J_1-4J_2\geq0, \mp\alpha_0\geq0, |\alpha_1|\leq\mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm3}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\geq0, J_1-4J_2\geq0, \mp\alpha_1\geq0, |\alpha_0|\leq\mp\alpha_1\}$$

and

$$\mathbb{R}^4=\bigcup_{m=0}^{3}(A^{(0)}_{\pm m}\cup A^{(1)}_{\pm m}).$$

Theorem 1. a) If $(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in A^{(0)}_{+3}\cap A^{(1)}_{-3}$, then

$$\sigma(x)=\begin{cases}1, \text{if}\, x\in G^{(2)}_k,\\ -1, \text{if}\, x\in G_k\setminus G^{(2)}_k\end{cases}$$

$G^{(2)}_2$-periodic configuration is a $G^{(2)}_2$-periodic ground state for the (1) model;

b) If $(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in A^{(0)}_{-3}\cap A^{(1)}_{+3}$, then

$$\sigma(x)=\begin{cases}-1, \text{if}\, x\in G^{(2)}_k,\\ 1, \text{if}\, x\in G_k\setminus G^{(2)}_k\end{cases}$$

$G^{(2)}_2$-periodic configuration is a $G^{(2)}_2$-periodic ground state for the (1) model.

Remark 1. Note that for the Ising model with $G^{(2)}_k$-periodic external field there is not any translation-invariant ground state.

REFERENCES

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees.World scientific.2013.
2. Rozikov, U. A., Rahmatullaev, M. M. Weakly Periodic Ground States and Gibbs measures for the Ising model with competing interactions on the Cayley Tree, Theor. Math. Phys. 160, No. 3, 1292–1300 (2009).

A DISCRETE-TIME DYNAMICAL SYSTEM OF MOSQUITO POPULATION

Rozikov U. A.[1], Boxonov Z. S.[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[1]rozikovu@yandex.ru, [2]z.boxonov@mathinst.uz

Consider a wild mosquito population without the presence of sterile mosquitoes. For the simplified stage-structured mosquito population, we group the three aquatic stages into the larvae class by x, and divide the mosquito population into the larvae class and the adults, denoted by y. We assume that the density dependence exists only in the larvae stage [1].

We let the birth rate, that is, the oviposition rate of adults be β; the rate of emergence from larvae to adults be a function of the larvae with the form of $\alpha(1-k(x))$, where $\alpha>0$ is the maximum emergence rete, $0\leq k(x)\leq 1$, with $k(0)=0, k'(x)>0$, and $\lim\limits_{x\to\infty}k(x)=1$, is the functional response due to the intraspecific competition [2]. We further assume a functional response for $k(x)$, as in [2], in the form

$$k(x)=\frac{x}{1+x}.$$

We let the death rate of larvae be a linear function, denoted by d_0+d_1x, and the death rate of adults be constant, denoted by μ. The interactive dynamics for the wild mosquitoes are governed by the following discrete-time system:

$$W_0:\begin{cases} x'=\beta y-\frac{\alpha x}{1+x}-(d_0+d_1x)x+x,\\ y'=\frac{\alpha x}{1+x}-\mu y+y\end{cases} \tag{1}$$

The model (1) for $d_0=d_1=0$ was fully studied in [3], [4].

It is easy to see that if

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ 0<\mu\leq 1,\ d_0>0,\ \alpha+d_0\leq 1,\ d_1=0 \tag{2}$$

then the operator (1) maps the set $\mathbb{R}^2_+$ to itself.

The fixed points for (1) are as follows(under condition (2)):
1) If $\beta\leq\mu\left(1+\frac{d_0}{\alpha}\right)$ then the operator (1) has a unique fixed point $z=(0,0)$.
2) If $\beta>\mu\left(1+\frac{d_0}{\alpha}\right)$ then mapping (1) has two fixed points with

$$z_1=(0,0),\quad z_2=\left(\frac{\alpha(\beta-\mu)}{\mu d_0}-1,\frac{\alpha(\beta-\mu)-\mu d_0}{\mu(\beta-\mu)}\right).$$

The following theorem describes the trajectory of any point $(x^{(0)},y^{(0)})$ in $\mathbb{R}^2_+$.

Theorem. *If the condition (2) is satisfied and* $\beta\leq\mu\left(1+\frac{d_0}{\alpha}\right)$ *then*

$$\lim_{n\to\infty}W_0^n(x^{(0)},y^{(0)})=(0,0),\ \ for\ any\ (x^{(0)},y^{(0)})\in\mathbb{R}^2_+$$

where W_0^n *is* n*-th iteration of* W_0.

REFERENCES

1. Li J., Cai L., Li Y. Stage-structured wild and sterile mosquito population models and their dynamics. Journal of Biological Dynamics. 2017, **11**(2), pp. 79-101.
2. Li J. Malaria model with stage-structured mosquitoes//Math. Biol.Eng., 2011, **8**, pp. 753-768.
3. Boxonov Z.S., Rozikov U.A. A discrete-time dynamical system of stage-structured wild and sterile mosquito population. Nonlinear Studies, 2021, Vol. 28, No. 2, pp. 413-425.
4. Boxonov Z.S., Rozikov U.A. Dynamical system of a mosquito population with distinct birth-death rates. Jour. of App. Non. Dyn., 2021, Vol. 10, No. 4, pp. 791-800.

p-ADIC DYNAMICAL SYSTEM OF THE FUNCTION ax^b

Rozikov U. A.[1], Safarov J. K.[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, rozikovu@yandex.ru;

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan. kurbanalivich.1992@gmail.com

Theory of p-adic numbers is one of very actively developing area in mathematics. It has numerous applications in many branches of mathematics, biology, physics and other sciences (see for example [1]-[5] and the references therein).

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers.

For each fixed prime number p, every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$.

The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to p-adic norm defines the p-adic field which is denoted by $\mathbb{Q}_p$ (see [1]).

The algebraic completion of $\mathbb{Q}_p$ is denoted by $\mathbb{C}_p$ and it is called the set of *complex p-adic numbers*.

Consider the dynamical system associated with the function $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ defined by

$$f(x) = ax^b, \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}_p, \quad b \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where $x \neq 0$.

For $x \in \mathbb{C}_p$ denote by $f^n(x)$ the n-fold composition of f with itself:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f}_{n\,\text{times}}(x))) \dots).$$

For arbitrary given x_0 and f the trajectory of x_0 is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots$$

We are interested to study the limit $\lim_{n\to\infty} x_n$.

A point x is called a fixed point for f if $f(x) = x$.

The function (1) has fixed points x_k, $k = 1, 2, \dots |b-1|$, which are solutions to $x^{b-1} = \frac{1}{a}$ in $\mathbb{C}_p$.

For these fixed points we have

$$|x_k|_p = \alpha \equiv (|a|_p)^{-1/(b-1)}. \tag{2}$$

Thus $x_k \in S_\alpha(0)$, $k = 1, 2, \dots |b-1|$.

We can explicitly calculate f^n:

Lemma 1. *For any $x \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ we have*

$$f^n(x) = a^{\frac{b^n-1}{b-1}} \cdot x^{b^n}, \quad n \geq 1.$$

For any $a \in \mathbb{C}_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p < r\},$$

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p \leq r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p = r\}.$$

Lemma 2. *If $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ and α is defined by (2) then the following assertions hold*

1. *The sphere $S_\alpha(0)$ is invariant with respect to f, (i.e., $f(S_\alpha(0)) \subset S_\alpha(0)$);*
2. *$f(U_\alpha(0)) \subset \mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0)$;*
3. *$f(\mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0)) \subset U_\alpha(0)$.*

Theorem 1. *If $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ and α is defined by (2). Then*

1. *if $x \in U_\alpha(0)$ then*
$$\lim_{k\to\infty} f^{2k}(x) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} |f^{2k-1}(x)|_p = +\infty.$$
2. *if $x \in S_\alpha(0)$ then $f^n(x) \in S_\alpha(0)$, $n \geq 1$.*
3. *if $x \in \mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0)$ then*
$$\lim_{k\to\infty} |f^{2k}(x)|_p = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} f^{2k-1}(x) = 0.$$

REFERENCES

1. Koblitz N. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.
2. Rozikov U.A. p-adic dynamical systems of the function ax^{-2}. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 2021. V.13, No. 3, p. 239-249.
3. Rozikov U.A., Sattarov I.A. p-adic dynamical systems of $(2,2)$-rational functions with unique fixed point. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, V. 105, p. 260–270.
4. Rozikov U.A. What are p-adic numbers? What are they used for? *Asia Pac. Math. Newsl.* 2013, V.3, No.4, p.1–6.
5. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. p-Adic Analysis and Mathematical Physics (Series Sov. and East Eur. Math., Vol. 10), World Scientific, River Edge, N. J. (1994).

DISCRETE TIME OCEAN ECOSYSTEM

Rozikov U. A.[1], **Shoyimardonov S. K.**[2]
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Usbekistan,
[1]rozikovu@yandex.ru, [2]s.shoyimardonov@mathinst.uz.

Let N be the concentration of nitrogen available for uptake, measured as mass per unit surface area of the ocean, P the concentration of phytoplankton, and Z the concentration of zooplankton, both measured in the same currency. In [1] the following model of ocean ecosystem processes is given:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aP + bZ - cNP \\ \frac{dP}{dt} = cNP - dPZ - aP \\ \frac{dZ}{dt} = dPZ - bZ. \end{cases} \tag{1}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. In [2] the following discrete time version of (1) is studied:

$$V : \begin{cases} x^{(1)} = x(1 - b + dy) \\ y^{(1)} = y(1 - a - dx + cz) \\ z^{(1)} = z(1 - cy) + ay + bx. \end{cases} \tag{2}$$

Proposition 1. ([2]) *The operator (2) maps S^2 to itself if and only if*

$$0 \le a \le 1, \quad 0 \le b \le 1, \quad -(1-a) \le c \le 1+a, \quad -(1-b) \le d \le 1-a. \tag{3}$$

Moreover, under conditions (3) the operator is a 2-Volterra QSO.

For the operator V there are three fixed points with conditions (3):

$$\bar{\lambda}_0 = (0; 0; 1), \quad \bar{\lambda}_1 = \left(0; 1 - \frac{a}{c}; \frac{a}{c}) \ \ (c \ge a, c \ne 0\right),$$

and

$$\bar{\lambda}_2 = \left(\frac{cd - ad - bc}{d(c+d)}; \frac{b}{d}; \frac{a - b + d}{c + d}\right), (d > 0, \quad d \ge b, \quad c \ge 0, \quad cd - ad - bc \ge 0).$$

Let $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ be an operator. Note that Lipschitz constant of the operator F is

$$l(F) = sup_{x \ne y} \frac{\|Fx - Fy\|}{\|x - y\|}$$

where $\|\cdot\|$ is some norm in $\mathbb{R}^m$. By the contraction mapping theorem if this norm can be chosen $l(F) < 1$ then F will be strict contraction in this norm and it has unique fixed point which all trajectories converge to this point.

Proposition 2. *If $c > a$ then the operator V is not a strict contraction mapping.*

Let us split the simplex S^2 into six parts as follows :

$$P_1 = \{(x; y; z) \in S^2 | \ \ x < \bar{x}, \, y < \bar{y}, \, z > \bar{z}\}, \quad P_2 = \{(x; y; z) \in S^2 | \ \ x < \bar{x}, \, y > \bar{y}, \, z > \bar{z}\},$$

$$P_3 = \{(x; y; z) \in S^2 | \ \ x < \bar{x}, \, y > \bar{y}, \, z < \bar{z}\}, \quad P_4 = \{(x; y; z) \in S^2 | \ \ x > \bar{x}, \, y > \bar{y}, \, z < \bar{z}\},$$

$$P_5 = \{(x;y;z) \in S^2|\ \ x > \bar{x},\, y < \bar{y},\, z < \bar{z}\}, \quad P_6 = \{(x;y;z) \in S^2|\ \ x > \bar{x},\, y < \bar{y},\, z > \bar{z}\}.$$

where

$$\bar{x} = \frac{cd - ad - bc}{d(c+d)}, \quad \bar{y} = \frac{b}{d}, \quad \bar{z} = \frac{a - b + d}{c + d} = \frac{a + d\bar{x}}{c}$$

are coordinates of the fixed point $\bar{\lambda}_2$.

Theorem. *Let V be the operator defined in (2). For any initial point $\lambda^{(0)} = (x^{(0)}; y^{(0)}; z^{(0)}) \in S^2$ with $x^{(0)} > 0, y^{(0)} > 0$ the trajectory $\lambda^{(n)} = V^n(\lambda^{(0)})$ of $\lambda^{(0)}$ rotates along the sets $P_i, i = \overline{1,6}$ and never goes to the edges $x = 0$ or $y = 0$.*

REFERENCES

1. Britton N. Essential Mathematical Biology. London.: Springer, 2003.
2. Rozikov U.A., Shoyimardonov S.K. Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by l-Volterra operators. Inter. Jour. Biomath. 2019, Vol. 12, No. 2, pp. 195–219.

DYNAMICAL SYSTEMS OF A RATIONAL FUNCTION

Rozikov U. A.[1], Shoyimova F. B.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
rozikovu@yandex.ru
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
fayozashoyimova@gmail.com

To define a discrete-time dynamical system one considers (see [1]) a function $f : X \to X$. For $x \in X$ denote by $f^n(x)$ the n-fold composition of f with itself (i.e. n time iteration of f to x):

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f}_{n\,\text{times}}(x))) \dots).$$

Definition 1. For arbitrary given $x_0 \in X$ and $f : X \to X$ the discrete-time dynamical system is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots \tag{1}$$

Denote the sequence (1), for $x = x_0$, by $\tau(x) = \{x_j = f^j(x),\, j = 0, 1, \dots\}$.

A point $x \in X$ is called a fixed point for $f : X \to X$ if $f(x) = x$.

Denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}(f)$.

Definition 2. The limit set $\omega(x_0)$ of orbit (1) is defined as

$$\omega(x_0) = \cap_{j=1}^{\infty} \overline{[\tau(f^j(x_0))]},$$

where $\overline{M}$ is the closure of M.

Definition 3.

- A fixed point x^* of f is attracting or stable if there is an open set (neighborhood) U containing x^* such that for all $x \in U$, the orbit $\tau(x)$ with initial point x converges to x^*.
- A fixed point x^* of f is repelling if there is an open set (neighborhood) U containing x^* such that for any $x \in U$, $x \neq x^*$, there is some $k \geq 1$ such that $f^k(x) \notin U$.

The main problem: Given a function f and initial point x_0 what ultimately happens with the sequence (1). Does the limit $\lim_{n\to\infty} x_n$ exist? If not what is the set of limit points of the sequence? Is this set finite or infinite?

The difficulty of the main problem depends on the set X and on the given function f. The problem is mainly considered in case $X \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ and when f is a continuous function on X.

Note that dynamical systems generated by rational (discontinuous) functions are very important in many problems on biology and physics (see [1]-[4] and references therein).

Here we consider the case $X = \mathbb{R}$ and f as a rational function of the form

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\, b \neq 0,\, x \neq -\frac{c}{b}.$$

For this function we have $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ if $(c-1)^2 + 4ab < 0$ and $\mathrm{Fix}(f) = \{x_1, x_2\}$ if $(c-1)^2 + 4ab \geq 0$, where

$$x_{1,2} = \frac{1}{2b}\left(1 - c \pm \sqrt{(c-1)^2 + 4ab}\right).$$

Denote

$$P_{1,2} = |f'(x_{1,2})| = \left|\frac{2(c-ab)}{1+2ab+c^2 \pm (1+c)\sqrt{(c-1)^2+4ab}}\right|.$$

Note that $P_1P_2 = 1$.

Proposition 1. *The following assertions hold*

1) The fixed point x_1 (resp. x_2) is repeller if and only if x_2 (resp. x_1) is attractive.

2) The fixed point x_1 is saddle if and only if x_2 is saddle.

Consider sequence of vectors (a_n, b_n, c_n, d_n), $n \geq 0$ given by recurrent relations:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + ac_n \\ b_{n+1} &= b_n + ad_n \\ c_{n+1} &= ca_n + bc_n \\ d_{n+1} &= cb_n + bd_n. \end{aligned} \tag{2}$$

where $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (1, a, b, c)$.

Denote

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(x) = -\frac{c}{b}\}, \tag{3}$$

The following proposition describes the set $\mathcal{P}$

Proposition 2. *The set $\mathcal{P}$ is the following*

$$\mathcal{P} = \{-\frac{c}{b}\} \cup \left\{-\frac{c_n^2 + a_nb_n}{b_n(1+c_n)} : b_n(1+c_n) \neq 0, n \geq 1\right\},$$

where (a_n, b_n, c_n, d_n) are defined in (2).

Theorem 1. *If $P_i < 1$ (for $i = 1$ or 2) then there is a neighborhood U_i of the fixed point x_i such that*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_i, \quad \textit{for all} \;\; x \in U_i \setminus \mathcal{P}.$$

REFERENCES

1. Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical system, Westview Press, 2003. 2. Rozikov U.A. An introduction to mathematical billiards. *World Sci. Publ.* Singapore. 2019, 224 pp.
3. Rozikov U.A., Sattarov I.A. Dynamical systems of the p-adic $(2,2)$-rational functions with two fixed points. *Results in Mathematics*, 2020. V. 75., No. 3, Paper No. 100, 37 pp. 4. Rozikov U.A. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci. Publl.* Singapore. 2020, 460 pp.

MARTINELLI-BOXNER INTEGRAL FORMULASI VA UNING CHEGARAVIY XOSSALARI HAQIDA

Rustamova M. S.[1]**, Suyunova Z. A**[2]
Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O'zbekiston
[1]rms1967@mail.ru, [2]bobsash1416@gmail.com

O'tgan asrning 40- yillarida E.Martinelli va S. Boxner bir-biridan mustaqil ravishda $\mathbb{C}^n$ fazoda, $n > 1$ bo'lganda golomorf funksiyalarning kompakt maxsusligini yo'qotish haqidagi Xartogs (Osgud–Braun) teoremasini isbotlash davomida ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun integral formulani topishgan. Bu formula Matinelli-Boxner integral formulasi deb nomlanadi. Matinelli-Boxner integral formulasi integral sohaning butun chegarasi bo'yicha hisoblanadigan va sohaning ko'rinishiga bog'liq bo'lmagan universal yadroga ega bo'lgan birinchi integral formuladir. Ammo n o'lchamli $\mathbb{C}^n$ fazoda, $n > 1$ bo'lganda Martinelli-Boxner yadrosi golomorf funksiya emas, balki garmonik funksiyadir. n o'lchamli $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi D sohani qaraymiz.

Teorema 1 (Martinelli-Boxner). *Agar D soha $\mathbb{C}^n$ dagi chegaralangan chegarasi bo'lakli silliq soha bo'lib, $f(z) \in C(\bar{D})$ va $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in D$ uchun*

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\varsigma)U(\varsigma, z)$$

formula o'rinli, bunda $U(\varsigma, z)$ $(n, n-1)$ tipdagi

$$U(\varsigma, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\varsigma}_k - \bar{z}_k}{|\varsigma - z|^{2n}} d\bar{\varsigma}[k] \wedge d\varsigma$$

ko'rinishdagi tashqi differensial forma va bu yerda

$$d\bar{\varsigma}[k] = d\bar{\varsigma}_1 \wedge ... \wedge d\bar{\varsigma}_{k-1} \wedge d\bar{\varsigma}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{\varsigma}_n.$$

$n = 1$ bo'lganda bu formula Koshining integral formulasiga aylanadi. Lekin, Koshi formulasidan farqli ravishda $n > 1$ bo'lganda Martinelli-Boxner yadrosi golomorf emas, garmonik funksiyadir. Shunga qaramasdan, bu formula $n > 1$ bo'lganda $\mathbb{C}^n$ fazodagi garmonik funksiyalar va golomorf funksiyalar orasida bog'lanish o'rnatadi. Bu formula va uning tadbiqlari ko'plab olimlar tomonidan o'rganib kelinmoqda.

Teorema 2 (Kytmanov A.M.). *Agar $f(z)$ funksiya $B = B(0,1)$ sharda golomorf bo'lsa va $f \in C(\bar{B})$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in B$ uchun*

$$\int\limits_S f(\varsigma)U(\varsigma, z) = \int\limits_S f(\varsigma)(1 - <\varsigma, \bar{z}>)(1 - |z|^2)^{-1} P(\varsigma, z) d\sigma.$$

[2] va [3] ishlarda $n+1$ o'lchamli kompleks fazo $\mathbb{C}^{n+1}$ fazoning yuqori yarim fazosi $\mathbb{C}_+^{n+1}$ da $L_{n+1}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$ va $L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$ funksional fazolardan olingan funksiyalar uchun Martinelli-Boxner integral formulasi va unga mos integral operatorning spektral xossalari o'rganilgan. Ushbu ish analizda muhim o'rin tutadigan Martinelli-Boxner integral formulasining chegaraviy xossalarini o'rganishga bag'ishlangan.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кытманов А.М. Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения. Новосибирск, Наука, Сибирское отд. 1992 г.
2. Худайберганов Г.Х., Рустамова М.С. О свойствах оператора Бохнера – Мартинелли в полупространстве. Журнал Сибирского Федерального университета. Серия математики и физики. -2008. - №1. - С. 94- 99.
3. Rustamova S.M. On the Evaluation of the Martinelli-Bochner Integral in the Half-Space. Mathematics and Statistics. - California, San Jose, -Vol 2, - No 4, Apr. 2014 y. pp. 179-181.

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A FAMILY OF 3×3 OPERATOR MATRICES

Tosheva N.A.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
n_nargiza@mail.ru

Let us introduce some notations used in this work. Denote by $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ the d-dimensional torus, the cube $(-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ with appropriately identified sides equipped with its Haar measure. Let $\mathcal{H}_0 := \mathbf{C}$ be the field of complex numbers (channel 1), $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ (channel 2) and $\mathcal{H}_2 := L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbf{T}^{\mathrm{d}})^2)$ stands for the subspace of $L^2((\mathbf{T}^{\mathrm{d}})^2)$ consisting of symmetric functions (with respect to the two variables) (channel 3). The direct sum of spaces $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ will be denoted by $\mathcal{H}$, that is, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. The spaces $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ are called zero-, one- and two-particle subspaces of a bosonic Fock space $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L^2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}}))$ over $L^2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})$, respectively, and the Hilbert space $\mathcal{H}$ is called the *truncated* Fock space or the *three-particle cut subspace* of the Fock space [1].

In the present paper we consider the family of 3×3 tridiagonal operator matrices of the form

$$\mathcal{A}(K) := \begin{pmatrix} A_{00}(K) & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11}(K) & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22}(K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$$

in the Hilbert space $\mathcal{H}$. The diagonal matrix entries $A_{ii}(K) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$ and off-diagonal matrix entries $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i < j$, $i, j = 0, 1, 2$ are given by

$$A_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (A_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)f_2(p,t)dt,$$

$$(A_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Throughout the paper we assume that the parameter functions $w_0(\cdot)$, $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$; $w_1(\cdot;\cdot)$ and $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ are real-valued continuous functions on $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$; $(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})^2$ and $(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})^3$, respectively. In addition, for any fixed $K \in \mathbf{T}^{\rm d}$ the function $w_2(K;\cdot,\cdot)$ is a symmetric, that is, the equality $w_2(K;p,q)=w_2(K;q,p)$ holds for any $p,q\in\mathbf{T}^{\rm d}$.

We introduce so-called *channel operator* $\mathcal{A}_{\rm ch}(K)$ acting in $L^2(\mathbf{T}^{\rm d})\oplus L^2((\mathbf{T}^{\rm d})^2)$ as a family of 2×2 operator matrices

$$\mathcal{A}_{\rm ch}(K) := \begin{pmatrix} A_{11}(K) & \frac{1}{\sqrt{2}}A_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A_{12}^* & A_{22}(K)\end{pmatrix}, \quad K\in\mathbf{T}^{\rm d},$$

and a family of the generalized Friedrichs models $\widehat{\mathcal{A}}(K,k)$ acting in the Hilbert space $\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ as 2×2 operator matrices

$$\widehat{\mathcal{A}}(K,k) := \begin{pmatrix} \widehat{A}_{00}(K,k) & \widehat{A}_{01} \\ \widehat{A}_{01}^* & \widehat{A}_{11}(K,k)\end{pmatrix},$$

with matrix elements

$$\widehat{A}_{00}(K,k)f_0 = w_1(K,k)f_0,\ \ \widehat{A}_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{T}^{\rm d}} v_1(s)f_1(s)ds,$$
$$(\widehat{A}_{11}(K,k)f_1)(q) = w_2(K;k,q)f_1(q), \quad f_i\in\mathcal{H}_i, \quad i=0,1.$$

According to the Weyl theorem, the essential spectrum of the operator $\widehat{\mathcal{A}}(K,k)$ coincides with the segment $[E_{\min}(K,k);E_{\max}(K,k)]$, where the numbers $E_{\min}(K,k)$ and $E_{\max}(K,k)$ are defined by

$$E_{\min}(K,k) := \min_{q\in\mathbf{T}^{\rm d}} w_2(K;k,q) \quad \text{and} \quad E_{\max}(K,k) := \max_{q\in\mathbf{T}^{\rm d}} w_2(K;k,q).$$

For any fixed $K,k\in\mathbf{T}^{\rm d}$ we define an analytic function $\Delta_K(k\,;\cdot)$ (the Fredholm determinant associated with the operator $\widehat{\mathcal{A}}(K,k)$) in $\mathbf{C}\setminus[E_{\min}(K,k);E_{\max}(K,k)]$ by

$$\Delta_K(k\,;z) := w_1(K;k) - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{T}^{\rm d}} \frac{v_1^2(t)dt}{w_2(K;k,t)-z}.$$

Introduce the following notations

$$m_K := \min_{p,q\in\mathbf{T}^{\rm d}} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q\in\mathbf{T}^{\rm d}} w_2(K;p,q),$$
$$\Lambda_K := \bigcup_{k\in\mathbf{T}^{\rm d}} \sigma_{\rm disc}(\widehat{\mathcal{A}}(K,k)), \quad \Sigma_K := [m_K;M_K]\cup\Lambda_K.$$

The definition of the set Λ_K and the equality

$$\bigcup_{k\in\mathbf{T}^{\rm d}} [E_{\min}(K,k);E_{\max}(K,k)] = [m_K;M_K]$$

imply the equality

$$\bigcup_{k\in\mathbf{T}^{\rm d}} \sigma(\widehat{\mathcal{A}}(K,k)) = \Sigma_K.$$

Let us introduce the following notations:

$$E_{\min}^{(l)}(K) := \min\left\{\Lambda_K\cap(-\infty;m_K]\right\}, E_{\max}^{(r)}(K) := \max\left\{\Lambda_K\cap[M_K;+\infty)\right\}.$$

Theorem. *Let $K \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ be a fixed and $\min\limits_{k\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \Delta_K(k;m_K) \geq 0$. Then for the essential spectrum of $\mathcal{A}(K)$ the following equality*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}(K)) = \begin{cases} [m_K;M_K]\,, \ \textit{if} \ \max\limits_{k\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \Delta_K(k\,;M_K) \leq 0; \\ \left[m_K;E^{(r)}_{\max}(K)\right], \ \textit{if} \ \min\limits_{k\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \Delta_K(k\,;M_K) \leq 0 \ \textit{and} \ \max\limits_{k\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \Delta_K(k\,;M_K) > 0; \\ [m_K;M_K] \cup [E^{(r)}_{\min}(K);E^{(r)}_{\max}(K)], \ \textit{if} \ \min\limits_{k\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \Delta_K(k\,;M_K) > 0; \end{cases}$$

For the cases $\min\limits_{p,q\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \triangle_K(k;m_k) \leq 0$, $\max\limits_{p,q\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \triangle_K(k;m_k) > 0$ and $\max\limits_{p,q\in\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \triangle_K(k;m_k) < 0$, one can formulate similar assertions.

REFERENCES

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys.,2007. 127:2.X pp. 191–220.
2. Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3×3 operator matrices. Communications in Mathematical Analysis. 2020. 23:1. pp. 17–37.

THE EXISTENCE OF EIGENVALUE OF THE TWO PARTICLE SHRÖDINGER OPERATOR

Ulashov S. S[1], Mardiyev A. Sh.[2]
Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
[1]sobir_s_87@bk.ru, [2]herr-azamat7@gmail.com

Let $\mathbb{T}^3 = (-\pi,\pi]^3$ be the three dimensional torus (Brillion zone) and let $L^2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$. We define the two particle discrete Shrödinger operator as wollows:

$$H_\mu(K) = H^0(K) + \mu V,$$

here $H^0(K)$ is a multiplication operator in $L^2(\mathbb{T}^3)$ by the function $E_K(p)$, i.e.

$$(H^0(K)f)(p) = E_K(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad \text{where}$$

$$E_K(p) = \varepsilon(p) + \frac{1}{2}\varepsilon(K-p), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)},p^{(2)},p^{(3)}) \in \mathbb{T}^3.$$

V is an integral operator:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(q)dq, \qquad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

The perturbation V is positive operator of finite rank. Thus, by the well-known Weyl theorem [1] the essential spectrum fills the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_\mu(K)) = \sigma_{ess}(H^0(K)) = [E_{\min}(K),\, E_{\max}(K)\,],$$

$$E_{\min}(K) = \min_{p\in\mathbb{T}^3} E_K(p), \qquad E_{\max}(K) = \max_{p\in\mathbb{T}^3} E_K(p)$$

We define the following number (using convergent integral)

$$\nu(K) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{E_{\max}(K) - E_K(q)}$$

For any $\mu > 0$ we set:

$$\begin{aligned} M_<(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^3 : 1 - \mu\nu(K) < 0\} \\ M_=(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^3 : 1 - \mu\nu(K) = 0\} \\ M_>(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^3 : 1 - \mu\nu(K) > 0\}. \end{aligned}$$

Let

$$\mu_0 = \frac{1}{\nu(K)}$$

for some $K \in \mathbb{T}^3$.

The main result is the following theorem

Theorem. For any $K \in M_<(\mu_0)$ the operator $H_{\mu_0}(K)$ has a unique eigenvalue $E_{\mu_0}(K)$ lying outside the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_{\mu_0}(K))$ and this eigenvalue is even real analytic in $M_<(\mu_0)$, as well as satisfies the following condition $E_{max}(K) < E_{\mu_0}(K) < E_{max}(0), K \neq 0$. Furthermore

$$\psi_{\mu_0,K}(\cdot) = \frac{\mu_0 \cdot c}{E_{\mu_0}(K) - E_K(\cdot)}, \qquad c = constant$$

is real analytic as function $\psi_{\mu_0,K} : M_<(\mu_0) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}^3)$.

REFERENCES

1.M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators.// Academic Press, N.Y., 1978.

MAXIMAL OPERATORS ASSOCIATED WITH SINGULAR SURFACES

Usmanov S.

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

usmanov-salim@mail.ru

We study maximal operators defined by

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t f(y)|,$$

where

$$\mathcal{A}_t f(y) := \int\limits_S f(y - tx)\psi(x)dS(x)$$

is the averaging operator, S is a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$, ψ is a fixed non-negative smooth function with compact support, that is, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ and $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Let us given singular surface $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ defined by the parametric equations

$$x_1(u_1, u_2) = u_1^{a_1} u_2^{a_2} g_1(u_1, u_2),\ x_2(u_1, u_2) = u_1^{b_1} u_2^{b_2} g_2(u_1, u_2),\ x_3(u_1, u_2) = 1 + u_1^{c_1} u_2^{c_2} g_3(u_1, u_2),$$

where $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ and $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ are non-negative rational numbers, $\{g_k(u_1,u_2)\}_{k=1}^3$ are fractional power series, satisfying conditions $g_k(0,0) \neq 0$.

A definition of fractional power series is already in [1].

For S_1 we define the averaging operator $\mathcal{A}_t f$ in the following way

$$\mathcal{A}_t^\mu f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_{>0}} f\big(y_1 - tx_1(u_1,u_2), y_2 - tx_2(u_1,u_2), y_3 - t(1 + x_3(u_1,u_2))\big)\times$$

$$\times \psi_1(u_1,u_2) u_1^{d_1} u_2^{d_2} \sqrt{\mu(u_1,u_2)}\, du_1 du_2,$$

where $\mu(u_1,u_2)$ is a fractional power series, $0 \leq \psi_1\big(u_1,u_2\big) = \psi\big(x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2), 1 + x_3(u_1,u_2)\big)$ and $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. The corresponding maximal operator is defined by

$$\mathcal{M}^\mu f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^\mu f(y)|,\ y \in \mathbb{R}^3.$$

We use the following denotions

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ B_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Theorem. Let $\{g_i(u_1,u_2)\}_{i=1}^3$ be fractional power series in a small neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^2$, satisfying conditions $g_i(0,0) \neq 0$ and $\mu(0,0) \neq 0$, $d_1 > -1, d_2 > -1, B \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Then there exists a sufficiently small neighborhood U of the origin in $\mathbb{R}^2$, such that for every function $\psi_1 \in C_0^\infty(U)$ the maximal operator $\mathcal{M}^\mu f$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$ whenever $p > \max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}, 2\}$. Moreover, if $\psi_1(0,0) > 0$ and $\max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}\} > 2$, then the maximal operator $\mathcal{M}^\mu f$ is unbounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$ whenever $2 < p \leq \max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}\}$.

REFERENCES

1. Collins T., Greenleaf A., Pramanik M. A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis, Amer. J.of Math. 135 (2013), no. 5, 1179-1252.

IKKI ZARRACHALI DISKRET SHREDINGER OPERATORI XOS QIYMATI UCHUN BAHOLAR

Xalxo'jayev A.M.[1], Boymurodov J.H.[2]

[1]V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Samarqand bo'linmasi, Samarqand, Uzbekiston

ahmad_x@mail.ru;

[2]Navoiy davlat pedagogika instituti, Navoiy, Uzbekiston

friendbekrichard@mail.ru

$\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$-uch o'lchamli tor, $\mathbb{L}_2(\mathbb{T}^3)$ esa $\mathbb{T}^3$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar gilbert fazosi bo'lsin. Panjarada kontakt ta'sirlashuvchi ikki zarrachali sistemaga mos $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$ Shryodinger operatori $\mathbb{L}_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = h_{0,\gamma}(\mathbf{k}) - \mu\vartheta,$$

bunda

$$(h_{0,\gamma}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p})f(\mathbf{p})$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{p}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos\mathbf{p}_i), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$(\vartheta f)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s})d\mathbf{s}$$

Bu yerda $\mu > 0$ -zarrachalar o'zaro ta'sir energiyasi,$\gamma > 0$ -zarrachalar massalar nisbati. Muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ operatorning muhim spektri $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$ operatorning spektri $\sigma(h_{0,\gamma}(\mathbf{k}))$ bilan ustma-ust tushadi, ya'ni:

$$\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) = \sigma(h_{0,\gamma}(\mathbf{k})) = [\varepsilon_{min,\gamma}(k), \varepsilon_{max,\gamma}(k)],$$

bunda

$$\varepsilon_{min,\gamma}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q}) = 3(1+\gamma) - \sum_{i=1}^{3}\sqrt{1+2\gamma\cos k_i+\gamma^2}$$

$$\varepsilon_{max,\gamma}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q}) = 3(1+\gamma) + \sum_{i=1}^{3}\sqrt{1+2\gamma\cos k_i+\gamma^2}$$

Faraz qilaylik

$$\mu_0(\gamma) = (1+\gamma)(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})})^{-1}$$

bo'lsin. Yuqoridagi integral ostidagi funksiya $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ nuqtada aynimagan minimumga ega bo'lganligi uchun ushbu integral chekli bo'ladi.

Teorema 1.*Faraz qilaylik $\mu > \mu_0(\gamma)$ va $\gamma > 0$ bo'lsin.U holda ixtiyoriy $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ uchun $h_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{k})$ operator muhim spektrdan quyida yagona oddiy $z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{k})$ xos qiymatga ega.*

Teorema 2. *Ixtiyoriy $\gamma > 0$ va $\mu > 3(1+\gamma)$ uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$-\mu + 3(1+\gamma) - \frac{9(1+\gamma)^2}{\mu} < z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{0}) \leq z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{p}) \leq z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) < -\mu + 3(1+\gamma),$$

bunda $\boldsymbol{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3, \qquad \boldsymbol{\pi} = (\pi,\pi,\pi) \in \mathbb{T}^3$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.С. Н. Лакаев, С. С. Улашов, "Существование и аналитичность связанных состояний двухчастичного оператора Шредингера на решетке ТМФ, 170:3 (2012), 393 – 408
2.С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, Ш. С. Лакаев, "Асимптотики собственного значения двухчастичного дискретного оператора Шредингера ТМФ, 171:3 (2012), 438 – 451

DYNAMICAL SYSTEMS OF QSPs

Xudayarov S. S.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Bukhara, Uzbekistan
xsanat83@mail.ru

Following [1]-[2], denote by $\mathcal{S}$ the set of all possible kinds of stochasticity and denote by $\mathbb{M}$ the set of all possible multiplication rules of cubic matrices.

Denote $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ and by $\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(P_{ijk}^{[s,t]}\right)_{i,j,k=1}^{m-1}$ a cubic matrix with two parameters.

A cubic matrix $P = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^{m}$ is called $(1,3)$-*stochastic* if

$$p_{ijk} \geq 0, \qquad \sum_{i,k=1}^{m} p_{ijk} = 1, \quad \text{for all } j.$$

Definition. A family $\{\mathcal{M}^{[s,t]} : \ s,t \in R_+\}$ is called a Markov process of cubic matrices (or a quadratic stochastic process (QSP) of type $(13|\mu)$ if for each time s and t the cubic matrix $M^{[s,t]}$ is stochastic in sense $(1,3) \in \mathcal{S}$ and satisfies the Kolmogorov-Chapman equation (for cubic matrices):

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} *_\mu \mathcal{M}^{[\tau,t]}, \qquad \text{for all } \ 0 \leq s < \tau < t$$

with respect to the multiplication $\mu \in \mathbb{M}$.

The elements of the matrix $\mathcal{M}^{[s,t]}$ can be renumbered as

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(P_{ijk}^{[s,t]}\right)_{i,j,k=0}^{m-1}.$$

Let $f(s,t) = \frac{1}{4}\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(s)} + 1\right)$, where Φ is an arbitrary function with $\Phi(s) \neq 0$;

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} f(s,t) & f(s,t) & f(s,t) & 1-3f(s,t) \\ \frac{1}{2}-f(s,t) & \frac{1}{2}-f(s,t) & \frac{1}{2}-f(s,t) & 3f(s,t)-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

The matrices $\mathcal{M}^{[s,t]}$, $s,t \in \mathbb{N}$, $s < t$ generate a discrete-time QSP of type $(13|\mu)$.

Let us give the time behavior of the distribution $x^{(t)} = (x_0^{(t)}, x_1^{(t)}) \in S^1$. Fix $s \geq 0$ and by take a vector $x^{(s)} = (x_0^{(s)}, x_1^{(s)}) \in S^1$.

For fixed $s \geq 0$, given vector $x^{(s)}$ and any $t > s$, we get

$$x_0^{(t)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\Phi(t)}{4\Phi(s)}\right) x_0^{(s)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi(t)}{4\Phi(s)}\right) x_1^{(s)},$$

$$x_1^{(t)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi(t)}{4\Phi(s)}\right) x_0^{(s)} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Phi(t)}{4\Phi(s)}\right) x_1^{(s)}.$$

The time behavior of $x^{(t)}$ depends on function Φ (which by our assumption satisfies $-1/3 \leq \Phi(t)/\Phi(s) \leq 1/3$). If for example, Φ is such that

$$\lim_{t-s\to\infty} \frac{\Phi(t)}{4\Phi(s)} = \omega, \quad \text{with} \ \ \omega \in [-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}]. \tag{1}$$

In case when the limit (1) does not exists then limit of $x^{(t)}$ does not exist too.

REFERENCES

1. J.M. Casas, M. Ladra, U.A. Rozikov, A chain of evolution algebras, Linear Algebra Appl. 435(4) (2011) 852–870.
2. J.M. Casas, M. Ladra, U.A. Rozikov, Markov processes of cubic stochastic matrices: Quadratic stochastic processes. Linear Algebra Appl. 575 (2019) 273-298.

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА РЕШЕТКЕ

Абдуллаев Ж.И.[1],Эргашова Ш.Х.[2]

[1]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
jabdullaev@mail.ru
[2]Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,
sh.ergashova@mail.ru

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана $\hat{H}$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ с цилиндрическим потенциалом $\hat{v}$. Мы изучаем дискретный спектр семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$, соответствующий гамильтониану $\hat{H}$ в инвариантном подпространстве L_{123}.

Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3)$ и состоит из разности свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц (см.[1],[2]) т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2.$$

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье. Гамильтониан H в импульсном представлении разлагается в прямой интеграл (см. [3])

$$H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Слой $\tilde{H}(\mathbf{k})$ оператора H унитарно эквивалентен оператору $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) - V$, который называется оператором Шредингера. Операторы $H_0(\mathbf{k})$ и V действуют в гильбертовом пространстве $L_2^e(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$ по формулам:

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3} 2(1 - \cos\frac{k_j}{2}\cos p_j),$$

$$(Vf)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad v(\mathbf{q}) = (F\hat{v})(\mathbf{q}),$$

Относительно потенциала $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \{ \begin{array}{cc} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & |n_1| + |n_2| \le 1 \\ 0, & |n_1| + |n_2| \ge 2, \end{array} \tag{1}$$

где $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$ и $\bar{v} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ убывающая функция на $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Носитель потенциала $\hat{v}$ совпадает с множеством D :

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, |n_1| + |n_2| \le 1\}.$$

При условии (1), V является оператором Гильберта-Шмидта, в частности, компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$. Если $\mathbf{k} = (\pi, \pi, \pi)$, тогда спектр оператора $H(\pi, \pi, \pi) = 6I - V$ состоит из собственных значений вида $6 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+$ и существенного спектра $\{6\}$.

Сначала мы найдем инвариантные подпространства относительно оператора $H(\mathbf{k})$. Гильбертово пространство $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^e(\mathbb{T}^3) = L_{123} \oplus L_{123}^{\perp}, \quad L_{123} := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

где $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}-$ подпространство, состоящий из четных функций на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Лемма 1. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1). Тогда подпространство L_{123} является инвариантным относительно оператора $H(\mathbf{k})$.

Обозначим через $H_{123}(\mathbf{k})$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантном подпространстве L_{123}. Мы изучаем собственные значения и собственные функции оператора $H_{123}(\mathbf{k}) := H(\mathbf{k})|_{L_{123}}$.

Система функций $\psi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \psi_n^+(q) = \frac{\cos nq}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}$ образует ортонормированный базис в $L_2^+(\mathbb{T})$. Обозначим через $L(n), n \in \mathbb{Z}_+-$ одномерное подпространство натянутое на вектор ψ_n^+. При этом $L_2^+(\mathbb{T})$ разлагается в прямую сумму

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L(n). \tag{2}$$

Разложение (2) порождает разложение

$$L_{123} = L_2^{++}(\mathbb{T}^2) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}(n),$$

где $\mathfrak{R}(n) = L_2^{++}(\mathbb{T}^) \otimes L(n), \quad L_2^{++}(\mathbb{T}^) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$.

Лемма 2. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1), то для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ подпространство $\mathfrak{R}(n)$ является инвариантным относительно оператора $H_{123}(k_1, k_2, \pi)$.

Несложные вычисления показывает, что сужение $H_{123}^{(n)}(k_1, k_2, \pi) := H_{123}(k_1, k_2, \pi)|_{\mathfrak{R}(n)}$ оператора $H_{123}(k_1, k_2, \pi)$ можно представить в виде тензорного произведения:

$$H_{123}^{(n)}(k_1, k_2, \pi) = [2I + H_0(k_1, k_2) - V_{123}^{(n)}] \otimes I. \tag{1}$$

Здесь $I-$ единичный оператор, $H_0(k_1, k_2)-$ оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2$, а $H_{123}^{(n)}(k_1, k_2) := 2I + H_0(k_1, k_2) - V_{123}^{(n)}-$ двумерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ по формуле:

$$(H_{123}^{(n)} f)(\mathbf{p}) = (2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}))f(\mathbf{p}) - \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1)(\cos p_1 \cos q_1 + \cos p_2 \cos q_2)] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Лемма 3. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ оператор $H_{123}^{(n)}(k_1, k_2)$ имеет хотя бы одно собственное значение, лежащее слева от существенного спектра.

Теорема. Для любого $(k_1, k_2) \in [-\pi, \pi]^2$ оператор $H_{123}(k_1, k_2, \pi)$ имеет бесконечное число собственных значений ниже существенного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1.Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ.Т.145, 1, 212-220.2005.
2. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. Т.152, 2, 47-57.2007.
3.Рид М., Симон Б. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир.1982.

О ДИНАМИКЕ ОДНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО КУБИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Баратов Б. С.[1], Эшкабилов Ю. Х.[2]
Каршинский Государственный университет, Карши, Узбекистан
[1]baratov.bahodir@bk.ru, [2]yusup62@mail.ru

Одна из основных задач в исследовании динамической системы состоит в изучении эволюции ее состояния. Эволюцию популяции можно изучать с помощью динамической системы нелинейного оператора [1]. Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений. В последнее время с большим интересом изучается динамика сепарабельных квадратичных стохастических операторов. В работе [2] поставлена задача изучения функции Ляпунова сепарабельных квадратичных стохастических операторов. В [3] доказано, что нелинейный Вольтерровский квадратичный стохастический оператор не является сепарабельным квадратичным стохастическим оператором. В работе [4] была изучена динамика одного сепарабельного кубического стохастического оператора.

Пусть $E=\{1,2,...,m\}$. Множество

$$S^{m-1}=\left\{x=(x_1,...,x_m)\in\mathbb{R}^m : x_i\geq 0,\ \forall i\in E,\ \sum_{i=0}^{m}x_i=1\right\} \tag{1}$$

называется $(m-1)$ мерным симплексом.

Кубический стохастический оператор (КСО) $W: S^{m-1}\to S^{m-1}$ имеет вид

$$W: x_l'=\sum_{i,j,k=1}^{m}P_{ijk,l}x_ix_jx_k,\quad l\in E, \tag{2}$$

где

$$P_{ijk,l}=P_{kij,l}=P_{ikj,l}=P_{kji,l}=P_{jik,l}=P_{jki,l}\geq 0,\ \sum_{l=1}^{m}P_{ijk,l}=1\qquad \forall i,j,k\in E. \tag{3}$$

В настоящей работе мы рассмотрим КСО (2) с дополнительными свойствами:

$$P_{ijk,l}=\frac{a_{il}b_{jl}c_{kl}+a_{kl}b_{il}c_{jl}+a_{il}b_{kl}c_{jl}+a_{kl}b_{jl}c_{il}+a_{jl}b_{il}c_{kl}+a_{jl}b_{kl}c_{il}}{6}, \tag{4}$$

где $a_{il},b_{jl},c_{kl}\in\mathbb{R}$-элементы квадратичных матриц $A=(a_{il})$, $B=(b_{jl})$ и $C=(c_{kl})$.

Тогда КСО W, соответствующий матрицам имеет вид:

$$x'_l = (A(x))_l \cdot (B(x))_l \cdot (C(x))_l, \quad l \in E, \tag{5}$$

где

$$(A(x))_l = \sum_{i=1}^{m} a_{il}x_i, (B(x))_l = \sum_{j=1}^{m} b_{jl}x_j, (C(x))_l = \sum_{k=1}^{m} c_{kl}x_k. \tag{6}$$

Определение 1. Пусть $A = (a_{il})$, $B = (b_{jl})$ и $C = (c_{kl})$- заданные $m \times m$ квадратичные матрицы. Если оператор (5) является КСО, то КСО (5) называется сепарабельным кубическим стохастическим оператором (СКСО) и обозначается через $W = (A, B, C)$.

Мы рассмотрим трехмерные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} b & 1-c & c \\ b & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

где $b > 0$, $c \in [0, 1]$. Легко проверить, что $W = (A, B, C)$ является кубическим стохастическим оператором на S^2.

Следовательно, по определению 1, оператор $W = (A, B, C)$ является сепарабельным кубическим стохастическим оператором. Неподвижная точка СКСО $W = (A, B, C)$ есть решение уравнение $W(x) = x$.

Предложение 1. Для любых $c \in [0, 1]$ и $b > 0$ СКСО $W = (A, B, C)$ имеет единственную неподвижную точку $x^* = e_2 = (0, 1, 0)$.

Предложение 2. Неподвижная точка $x^* = e_2$ СКСО $W = (A, B, C)$ являются притягивающей.

Определение 2. Множество предельных точек траектории точки $x^{(0)} \in S^{m-1}$ называется ее предельным множеством и обозначается через $\omega(x^{(0)})$.

Теорема 1. При любой начальной точка $x^{(0)} \in S^{m-1}$ для СКСО $W = (A, B, C)$ имеет место равенство $\omega(x^{(0)}) = \{e_2\}$.

Следствие 1. Неподвижная точка e_2 СКСО $W = (A, B, C)$ является глобальной притягивающей точка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. On Cubic Operators defined on finite-dimensional simplices. Ukrainian Mathematical Journal, 56(10):1699–1711, 2004.
2. Rozikov U.A., Nazir S. Separable Quadratic Stochastic Operators, Lobachevskii J. Math. 31(2010), 3. 215–221. (Russian).
3. Rozikov U.A., Zada A. On a class of separable quadratic stochastic operators, Lobachevskii J. Math. 32 (2011). 385–394.
4. Баратов Б.С. Сепарабель кубик стохастик операторлар. Научный вестник Бух ГУ. 2, 2019 С. 29–37.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ШРЕДИНГЕРА АССОЦИРОВАННОГО С $s-d$ ОБМЕННОЙ МОДЕЛИ

Болтаев А.Т.[1], Хамдамова Ч.А.[2]

[1]Самаркандское отделение института математики имени В.И.Романовского АН РУз, Самарканд, Узбекистан,

atboltaev@mail.ru;
[2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
xamdamovacharos97@gmail.com

Пусть $\mathbb{T}^1$ одномерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]$ соответствующим отождествлением противоположных граней и $L^2(\mathbb{T}^1,\eta)$- гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций на $\mathbb{T}^1$ с мерой Хаара $\eta(\mathrm{d}p)=\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}$.

В работе рассматривается двухчастичный оператор $\mathbf{H}_A(k), k\in\mathbb{T}^1$ отвечающий оператору энергии $s-d$ обменной модели, которая содержит спин-спиновое взаимодействие между локализованными спинами и электронами проводимости с константой связи (обменным параметром) $A>0$. Данная обменная модель, которая является решетчатым аналогом модели Ли - простейшей модели в квантовой теории поля [1], на строгом математическом уровне описана в [2], а в [3] обсуждены физические результаты вытекающие из этой модели. Мы докажем существование единственного собственного значения оператора $\mathbf{H}_A(k)$.

$\mathbf{H}_A(k), k\in\mathbb{T}^1$ двухчастичный дискретный оператор Шредингера, ассоциированный гамильтонианом системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала $A>0$. Оператор $\mathbf{H}_A(k)$, $k\in\mathbb{T}^1$, действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^1,\eta)$ по формуле

$$\mathbf{H}_A(k)=\mathrm{H}_0(k)+\frac{A}{2}V,$$

где $\mathrm{H}_0(k)-$ оператор умножения на функцию E_k:$(\mathrm{H}_0(k)f)(q)=E_k(q)f(q),\ f\in L^2(\mathbb{T}^1,\eta)$, где $E_k(q)=\varepsilon(q)+\varepsilon(k-q)-AS$, $S>0$, $\varepsilon(q)=1-\cos q$ и $V-$ интегральный оператор ранга один: $(Vf)(q)=\int\limits_{\mathbb{T}^1} f(q)\eta(\mathrm{d}q),\ f\in L^2(\mathbb{T}^1,\eta)$.

Оператор возмущения V компактный, тогда из теоремы Г. Вейля [4] существенный спектр оператора $\mathbf{H}_A(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathrm{H}_0(k)$, т.е.

$$\sigma_{ess}(\mathbf{H}_A(k))=\sigma_{ess}(\mathrm{H}_0(k))=\sigma(\mathrm{H}_0(k))=[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)].$$

$$\varepsilon_{\min}(k):=\min_{q\in\mathbb{T}^1}\varepsilon_k(q)=2(1-\cos\frac{k}{2})-AS,\quad \varepsilon_{\max}(k):=\max_{q\in\mathbb{T}^1}\varepsilon_k(q)=2(1+\cos\frac{k}{2})-AS,$$

Теорема. *Для любых $A>0$ и $k\in(-\pi,\pi)$ оператор $\mathbf{H}_A(k)$ имеет единственное собственное значение $E_A(k)$ на полуоси $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А. М.Переломов. "Наука 1971.
2. Mogilner A.: Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schrödinger operators: Problems and results. Advances in Soviet Mathematics 5, 139-194 (1991).
3. Нагаев Э.Л. Физика магнитных полупроводников, Москва, "Наука 1979 г. 432.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

О (3) - ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Дехконов Ж. Д.
Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан
dehqonovjasur@bk.ru

Пусть $\tau^k = (V, L)$ — есть дерево Кэли порядка k, $k \geq 1$, т.е бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см.[1]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} W_m$, где $d(x, y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $\Omega_n = \Phi^{V_n}$ обозначает пространство конфигураций, определенных на V_n.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера. Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\}, \tag{2}$$

где $\sigma_n \in \Omega_n, \beta = 1/T$, $T > 0$ — температура, $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$, Z_n^{-1} — нормировочный множитель,

Теорема 1. [1] *Меры (2) удовлетворяют условию согласования тогда и только тогда, когда для всех $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеет место следующее:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{3}$$

где функция $F : h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \ldots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулами

$$F_i = \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right), \qquad \theta = \exp(J\beta).$$

Каждому решению h_x функционального уравнение (3) соответствует одна мера Гиббса и наоборот.

При произвольных k и q трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса изучены в работе [2].

В случае $k = 3$, $q = 3$ для трансляционно-инвариантной совокупности векторов из (3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 = \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая, что $k = 3$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = 3 \ln \frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 = 3 \ln \frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{cases}$$

Известно, что эта система имеет следующие решения (см.[2]):

$$(h_1^{(i)}, 0), (0, h_1^{(i)}), (-h_1^{(i)}, -h_1^{(i)}), (0, 0), i = 1, 2,$$

где

$$h_1^{(i)} = 3\ln x_i, x_1 = \frac{2\sqrt{\theta^2+\theta-2}}{3}\cos(\frac{1}{3}\arctan\frac{3\sqrt{3\theta^4+24\theta^3+18\theta^2-120\theta-249}}{2\theta^3+3\theta^2-12\theta-47} - \frac{\pi}{3}) + \frac{\theta-1}{3},$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{\theta^2+\theta-2}}{3}\cos(\frac{1}{3}\arctan\frac{3\sqrt{3\theta^4+24\theta^3+18\theta^2-120\theta-249}}{2\theta^3+3\theta^2-12\theta-47} + \frac{\pi}{3}) + \frac{\theta-1}{3}. \quad (5)$$

В этой работе для модели Поттса с помощью трансляционно-инвариантной меры Гиббса на дереве Кэли порядка три ($k_0 = 3$) по аналогию с конструкциями из [3], [4] докажем существование новых мер Гиббса на дереве Кэли седьмого порядка, которых также назовем (3)-трансляционно-инвариантными мерами Гиббса.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для модели Поттса на дереве Кэли порядка $k = a + b + 3, a, b \in N$ при $q = 3$ и $\theta \in B(a, b)$ существуют не менее шести* (3)*-трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Замечание: В работе [5] доказана существование (2)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса на дерево Кэли пятого порядка. Отметим, что (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса отличается от (2)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса

ЛИТЕРАТУРА

1. U.A.Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees.Singapore.: World scientific.-2013.
2. Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, Трансляционноинвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.ТМФ, 2016, том 189, номер 2.
3. М.М.Рахматуллаев (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. Доклады АН РУз, 2016.3. с.9-12
4. M.M.Rahmatullaev. Ising model on trees: (k_0)-non translation-invariant Gibbs measures. Journal of Physics: Conference Series. 819 (2017) 012019
5. M.M.Rahmatullaev, F.K.Rafikov , Sh.Kh.Azamov On constructive description of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. Укр. мат. журн.,2021, т.73,No 7.

О ФОРМУЛЕ КОШИ-ФАТАПЬЕ В ЭЛЛИПИСОИДЕ

Зиётов Ш.З.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
shoxijahon.ziyotov@mail.ru

В многомерном комплексном анализе интегральные формулы являются мощным конструктивным аппаратом, и эти формулы широко используются для голоморфного продолжения функций. Примеры включают многократную интегральную формулу Коши для поликруга, формулу Мартинелли-Бохнера и Лере для шар в пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. [1-3]), формулу Вейля для полиэдра в этом пространстве и интегральные формулы Бохнера–Хуа Ло-кена для классических областей по классификации Э.Картана (см. [4]).

Интегральная формула, открытая Ж.Лером в начале второй половины прошлого века и получившая название Коши–Фантапье, является очень общей формулой, которая содержит все наиболее употребляемые интегральные формулы, зависит от неизвестной функции, связанной с областью, т.е. у этой формулы неизвестное ядро. Напомним, что интегральную формулу Коши–Фантапье: для любой области $D \subset \mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей и любой функции $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$ верна интегралная формула

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\delta(\lambda(\zeta)) \wedge d\zeta}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta) \rangle^n}.$$

Здесь $\lambda(\zeta)$ - произвольная гладкая вектор - функция на ∂D такая, что

$$\langle \zeta - z, \lambda(\zeta) \rangle \neq 0 \text{ для всех } z \in D \text{ и } \zeta \in \partial D,\ d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n,$$

$$\zeta - z = (\zeta_1 - z_1, \zeta_2 - z_2, \ldots, \zeta_n - z_n), \delta(w) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} w_\nu dw[\nu]\ ,$$

$$dw[\nu] = dw_1 \wedge dw_2 \wedge \ldots \wedge dw_{\nu-1} \wedge dw_{\nu+1} \wedge \ldots \wedge dw_n,\ \langle z, w \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu.$$

Несмотря на большую общность формулы Коши - Фантапье, вопрос об отыскании интегральных представлений с голоморфным ядром для конкретных областей из $\mathbb{C}^n$ не снимается. В докладе приводятся с помощью (1) полученные интегральные формулы с голоморфными ядрами для эллипсоида $\Im(R_1, R_2, ..., R_n)$ из $\mathbb{C}^n$:

$$\Im(R_1, R_2, ..., R_n) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \frac{|z_1|^2}{R_1^2} + \frac{|z_2|^2}{R_2^2} + \ldots + \frac{|z_n|^2}{R_n^2} < 1 \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М.: Наука. 3–е изд., 1985 г. 464 с.
2. Кытманов А. М., Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения, ред. А. М. Кытманов, Наука, Новосибирск, 2002, 240 с.
3. Кытманов А. М., Мысливец С. Г. Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализ, Красноярск, СФУ, 2010. -389с.
4. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

Каримов Ж. Ж.

Туринский политехнический университет в городе Ташкенте, Узбекистан
jkarimov0702@gmail.com

Настоящая работа посвящена изучению некоторые свойства динамических разбиений для отображений окружности с изломом и иррациональным числом вращения.

Мы рассмотрим ренормгрупповое преобразование в пространстве гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и с числом вращения $\rho = [k,\, k, \ldots, k, \ldots] = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ k \geq 1.$

Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращения имеет периодическую орбиту [1]. Обозначим через X_b множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x\in[-1,0],\ g(x),\ x\in[0,\alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:
а) $f(0)=\alpha,\ g(0)=-1$; б) $f(g(0))=f(-1)<0$;
в) $f(-1)=g(\alpha)$; г) $f^{(2)}(g(0))\ge 0$;
д) $f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ для любого $\varepsilon>0$.
Условия а)–в) позволяют при помощи $(f,g)\in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1,\alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in[-1,0),\\ g(x), & \text{если } x\in[0,\alpha).\end{cases}$$

Обозначим через $X_b(\rho)$ подмножество, состоящее из таких пар $(f,g)\in X_b$, что число вращения $\rho=[k,\,k,\dots,k,\dots]$.

Определим преобразование ренормгруппы $R_b\colon X_b(\rho)\to X_b(\rho)$ по формуле [2]:

$$R_k(f(x),g(x))=(\tilde f(x),\quad x\in[-1,0];\qquad \tilde g(x),\quad x\in[0,\alpha']),$$

где

$$\tilde f(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\qquad \tilde g(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\qquad \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1).$$

Определим величину излома: $c=\sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}$. В работе [1] доказано, что при фиксированном c преобразование R_k в подмножестве $X_b(\rho)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x,c_i),g_i(x,c_i),i=1,2\}$ периода два. Это означает, что

$$R_k(f_1(x,c_1),g_1(x,c_1))=(f_2(x,c_2),g_2(x,c_2)),$$

$$R_k(f_2(x,c_2),g_2(x,c_2))=(f_1(x,c_1),g_1(x,c_1)).$$

Функции $f_i(x,c_i)$ и $g_i(x,c_i)$, $i=1,2$, имеют вид:

$$f_i(x,c_i)=\frac{(\alpha_i+c_ix)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x},\quad g_i(x,c_i)=\frac{\alpha_i\beta_i(x_i-c_i)}{\alpha_i\beta_ic_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

где

$$\alpha_1=\frac{c-\beta_0^2}{1+\beta_0},\qquad \alpha_2=\frac{c^{-1}-\beta_0^2}{1+\beta_0},\qquad c_1=c,\qquad c_2=c^{-1},\qquad \beta_1=\beta_2=\beta_0,$$

β_0 — единственный корень уравнения

$$\beta^4-\beta^3-\beta^2\frac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0,$$

принадлежащий интервалу $(0,1)$.

Отождествляя концы полуинтервалов $[-1,\alpha_i)$, $i=1,2$ получаем окружности S_i, $i=1,2$. Теперь при помощи (f_i,g_i), $i=1,2$ определим гомеоморфизмы окружности $T_i:S_i\to S_i$ по формуле:

$$T_i(x)=\begin{cases} f_i(x,c_i) & \text{если}\quad x\in[-1,0),\\ g_i(x,c_i) & \text{если}\quad x\in[0,\alpha_i)\end{cases}$$

Ниже мы описываем свойства гомеоморфизма T_1 окружности S_1. Гомеоморфизм T_1 имеет изломы в точках x_0 и $x_1=T_1(x_0)$ и произведение величин изломов в этих точках равно c_1. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b. Пара функций $(f_1(x,c),\ -1 \le x \le 0;\ g_1(x,c),\ 0 \le x \le \alpha_1)$ является неподвижной точкой преобразования $R_k^2 = R_k \circ R_k$.

Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \ge 1$, n-ую подходящую дробь ρ. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Числа q_n называются числами Фибоначчи. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим ее орбиту $O_T(x_0) = \{x_0,\, x_1 = T(x_0)\ x_2 = T^2(x_0),, ..., x_n = T^n(x_0), ...\}$. При помощи орбиты $O_T(x_0)$ определим последовательность $\{P_n(x_0),\, n \ge 1\}$ динамических разбиений окружности. Разбиение $P_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки x_0 : $\{x_i,\, 0 \le i \le q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \ge 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точек x_0 и x_{q_n}.

Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \ge 0$. Тогда разбиение $P_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\, 0 \le i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},\, 0 \le j < q_n\}$. Разбиение $P_n(x_0)$ называется *n-ым динамическим разбиением* окружности.

Обозначим $x_n := T_b^n(x_0)$, $n \ge 1$. Из утверждения леммы 1 в [2] вытекает, что

$$x_{q_{2n}} = -\beta_0^n, \qquad x_{q_{2n+1}} = T_b^{q_{2n+1}}(x_0) = T_b^{q_{2n-1}}(T_b^{q_{2n}}(0)) = \beta_0^{n-1} f_1(-\beta_0).$$

Теперь мы будем изучать орбиту точки излома $x_0 = 0$, т.е. $\{x_i, i \ge 0\}$.

Теорема 1. Для любого $m \ge 1$ разбиение $\mathbb{P}_{m+2n} \cap [x_{q_{2n}}, x_{q_{2n+1}}]$ отличается от разбиения $\mathbb{P}_m \cap [-1, \alpha_1]$ растяжением в β_0^n раз.

Теорема 2. Для любого $m \ge 1$ разбиение $\mathbb{P}_{m+2n} \cap [x_{q_{2n}}, x_{q_{2n-1}}]$, $n \ge 1$, отличается от разбиения $\mathbb{P}_{m+1} \cap [-\beta_0, \alpha_1]$ только растяжением в β_0^{n-1} раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома. Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 3 (273). С. 189–190.
2. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343–366.

СПЕКТРАЛЬНОЕ СВОЙСТВА ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Кулжанов У.Н

Самаркандский государственный университет,
Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета,
Самарканд, Узбекистан
utkirnq@bk.ru;

Предварительные сведения и выбор расширения

Гамильтониан (оператор энегии) рассматриваемой двухчастичной системы задается как некоторое расширение $\tilde{h}$ следующего симметрического оператора $\tilde{h}_0$, действующего в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ по формуле

$$\tilde{h}_0 = -\frac{1}{2m}(\Delta\phi)(x) \tag{1}$$

и определенного на множестве функций

$$D(\tilde{h}_0) = \{\phi \in L_2, \phi(\pm x_0) = 0\}, x_0 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где Δ-оператор Лапласа. После соответствующего преобразования Фурье оператор перейдет в оператор

$$(\tilde{h}_0 f)(p) = \frac{1}{2m} p^2 f(p), \tag{3}$$

на множестве$D(\tilde{h}_0) \subset L_2(R)$ функций $f(p)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} p^4 \mid f(p) \mid^2 \; dp < \infty, \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm i x_0 p} f(p)\, dp = 0 \tag{4}$$

Лемма 1. *Для любого* $z \in \Pi_0 = \mathbb{C}^1 \setminus [0;\ \infty)$ *дефектное подпространство оператора* $\tilde{h}_0$ *состоит из функций вида*

$$g(p) = \frac{c_1 e^{i x_0 p} + c_2 e^{-i x_0 p}}{p^2 - z} \tag{5}$$

Лемма 2. Область определения $D(h_0^*)$ оператора h_0^* состоит из функций вида

$$g(p) = f(p) + \frac{c_1 e^{i x_0 p} + c_2 e^{-i x_0 p}}{p^2 + 1} + \frac{d_1 e^{i x_0 p} + d_2 e^{-i x_0 p}}{(p^2 + 1)^2} \tag{6}$$

где $f \in D(h_0), c_1, c_2, d_1, d_2 \in C^1$. Оператор h_0^* действует на функцию g вида (6) по формуле

$$h_0^* g(p) = p^2 g(p) - c_1 e^{i x_0 p} - c_2 e^{-i x_0 p},$$

где c_1, c_2 - константы взятая из разложении (6) функции g.

Теперь выберем расширения оператора h_0 . Ставим соответствие множество $D(h_\varepsilon), D(h_0) \subset D(h_\varepsilon) \subset D(h_0^*)$, следующим образом:

$$D(h_\varepsilon) = \left\{ g(p) = f(p) + \frac{c_1 e^{i x_0 p} + c_2 e^{-i x_0 p}}{p^2 + 1} \varepsilon + \frac{c_1 e^{i x_0 p} + c_2 e^{-i x_0 p}}{(p^2 + 1)^2}, f \in D(h_0) \right\} \tag{7}$$

Сужение оператора h_0^* на область $D(h_\varepsilon)$ обазначим через h_ε. По определению h_ε является расширением оператора h_0 .

Тереома 1. *Расширение* h_ε *является самосопряженным оператором.*

Спектральные свойства оператора h_ε

Теорема 2.*Существенный спектр оператора* h_ε *совпадает с полуосъю* $[0; \infty)$.

Для полного описания спектра построим резольвенту оператора h_ε.

$$(R_z \psi)(p) = \frac{4}{\pi(p^2 - z)} [\frac{\cos(x_0 p)}{a + b} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x_0 s)}{s^2 - z} \psi(s)\, ds - \frac{\sin(x_0 p)}{a - b} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x_0 s)}{s^2 - z} \psi(s)\, ds] + \frac{\psi(p)}{p^2 - z},$$

где

$$a := a(z; x_0, \varepsilon) = (2\varepsilon + 1 + 2|x_0|) e^{-2|x_0|} - \frac{2}{\sqrt{-z}} e^{-2|x_0|\sqrt{-z}}, b := b(z; \varepsilon) = 2\varepsilon + 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{-z}}.$$

Теорема-3.*Для любых* $x > 0, z < 0$ *верно следующие утвержденые:*

a) Если $\varepsilon \in \left(0; \frac{1-(1+2x)e^{-2x}}{2(e^{2x}2x-1)}\right)$, *то оператор* h_ε *имеет единственное простое собственное значение.*

b) Если $\varepsilon \in \left[\frac{1-(1+2x)e^{-2x}}{2(e^{2x}2x-1)}; \infty\right)$ *то оператор* h_ε *имеют два невырожденных собственных значений.*

ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. A. Berezin, L. D. Faddeev, "Remark on the Schrödinger equation with singular potential "Dokl. Akad. Nauk SSSR, 137:5 (1961), 1011-1014.
2. N. I. Akhiezer (Author), I. M. Glazman Theory of Linear Operators in Hilbert Space (Dover Books on Mathematics) Paperback - December 16, 1993.
3. M.Kh. Shermatov, U.H. Kuljanov. On the spectrum of two-particle Schrödinger operator with point interactions. UzMJ 2010 3 168-192.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $m-$СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Курбанбаев С. И.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
suqrot.qurbonboyev.93@mail.ru;

Мы определяем и приведем несколько свойств $m-$субгармонических функций на аналитических множествах.

Определение 1 (см. [1]). Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$, заданная в области $D \subset \mathbb{C}^N$, называется $m-$субгармонической $(m - sh)$ функцией, $1 \leq m \leq N$, в D если:

1. она полунепрерывна сверху в D, т.е.
$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{B(z^0,\varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$
2. поток $dd^c u \wedge \beta^{m-1} \geq 0$ в D в обобщенном смысле, т.е.,
$dd^c u \wedge \beta^{m-1}(\omega) = \int u\beta^{m-1} \wedge dd^c\omega \geq 0, \forall \omega \in F^{(N-m,N-m)},\ \omega \geq 0.$

Теорема 1 (см. [1]). Полунепрерывная сверху функция u, заданная в области $D \subset \mathbb{C}^N$ является $m-sh$ тогда и только тогда, когда для любой $m-$ мерной комплексной плоскости $\prod \subset \mathbb{C}^N$ сужение
$$u|_{\prod} \in sh\left(\prod \bigcap D\right).$$

Пусть $A \subset \mathbb{C}^N$ неприводимое аналитическое множество (см. [4]) размерности n, $1 \leq n < N$. Множества регулярных точек обозначается как A^0.

Определение 2 (см. [2]). Функция $u(z) \in L^1_{loc}(A)$, заданная на неприводимом аналитическом множестве A, называется $m-$субгармонической на A, если:

1. она полунепрерывна сверху на A, т.е. $\forall z^0 \in A$ имеет место неравенства
$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) \leq u(z^0);$$

2. $u(z) \in m - sh\left(A^0\right).$

В частных случаях, при $m = 1$, функцию $u(z) \in 1 - sh\left(A\right)$ называется плюрисубгармонической на A (см. [3]), и обозначается класс таких функций как $psh\left(A\right)$, при $m = n$, функцию $u(z) \in n - sh\left(A\right)$ называется субгармонической на A, и обозначается класс таких функций как $sh\left(A\right)$.

Теперь приведем некоторые простые свойства $m-$субгармонических функций, которые непосредственно вытекают из определения 2.

С1. Линейная комбинация $m-$субгармонических функций с неотрицательными коэффициентами является $m-$субгармонической функцией:

$$u_k(x) \in m - sh(A), \;\; a_k \in \mathbb{R}^+ \; (k = 1, 2, ..., p) \quad \Rightarrow$$

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + ... + a_p u_p(x) \in m - sh(A);$$

С2. Максимум конечного числа $m-$субгармонических функций также $m-$субгармоничен:

$$u_1(x), u_2(x), ..., u_p(x) \in m - sh(A) \quad \Rightarrow$$

$$\max\{u_1(x), u_2(x), ..., u_p(x)\} \in m - sh(A);$$

С3. Предел монотонно убывающей последовательности $m-$субгармонических функций $m-$ субгармоничен:

$$u_j(z) \in m - sh(A), \;\; u_j(z) \geq u_{j+1}(z), \;\; (j = 1, 2, ...) \;\; \Rightarrow$$

$$\lim_{j\to\infty} u_j(z) \in m - sh(A);$$

С4. Равномерно сходящаяся последовательность $m-$субгармонических функций сходится к $m-$субгармонической функции:

$$u_j(z) \in m - sh(A), \;\; (j = 1, 2, ...), \;\; u_j(z) \rightrightarrows u(x) \Rightarrow$$

$$u(x) \in m - sh(A);$$

С5. $psh\left(A\right) = 1 - sh\left(A\right) \subset ... \subset m - sh\left(A\right) \subset ... \subset n - sh\left(A\right) = sh\left(A\right);$

С6. Принцип максимума. Пусть $u(z) \in m - sh(A)$ и в некоторой внутренней точке $z^0 \in A^0$ она достигает своего максимума, т.е.

$$u(z^0) = \sup_{z\in A} u(z),$$

тогда $u\left(z\right) \equiv const.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Б.И., Теория потенциала на $m-$субгармонических функциях. Ургенч, 2015 (докторская диссертация).

2.Курбанбаев С.И., $m-$субгармонические функции на аналитических множествах. Доклады АН РУз, 2021,выпуск 2, 21-25.

3.Садуллаев А.С., Оценка полиномов на аналитических множествах. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1982, том 46, выпуск 3, 524-534.

4. Эрве М., Функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1965.

ИЗУЧЕНИЕ НЕ КРАЙНОСТИ ГИББСКОЙ МЕРЫ ДЛЯ НС-МОДЕЛИ

Мадгозиев Г. Т.

Академический лицей при ТУИТ имена Мухаммад ал-Хорезми ,
Узбекистан,
madgoziyevg@gmail.com;

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geqslant 1$ - бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V есть множество вершин Γ^k, L - его множество ребер. Расстояние $d(x,y), x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = min\{d | \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V, \text{ так, что}$$

$$< x_0, x_1 >, \ldots, < x_{d-1}, x_d >\}.$$

Пусть $\Phi-$ конечное множество. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. $\Phi = \{-1; 1\}$ и $|A| = 4$.

Гамильтониан определяется следующим образом

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \tag{1}$$

где $J > 0$.

Основная проблема для данного гамильтониана - это описание всех отвечающих ему мер Гиббса. В этой работе найдено условие некрайности модели HC (hard-core) на дереве Кэли. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией Гиббсовских мер, можно найти, например в ([1]-[2]). Пусть $x^0 \in V-$ фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x. Вершина y называется прямым потомком x, если $y > x$ и x, y являются соседями.

Обозначим:

$$W_n = \left\{ x \in V : \ d(x^0 \, , \, x) = n \right\} , \ \ V_n = \left\{ x \in V : \ d(x^0 \, , \, x) \leqslant n \right\} .$$

Точка y называется "прямым потомком" точки x, если $x < y$ и $d(x, y) = 1$.

Для $x \in G_k$ обозначим через $x_\downarrow = \{y \in G_k :< x, y >\} \setminus S(x)$, где $S(x)$-множество "прямых потомков"точки $x \in V$.

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}\left(\sigma_n\right) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H\left(\sigma_n\right) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x_\downarrow)}} \right\}, \tag{2}$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}, Z_n-$ нормирующий множитель. Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $(\forall n \geqslant 1)$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}\left(\sigma_{n-1}\right) \tag{3}$$

для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V, такая, что

$$\mu\left(\left\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\right\}\right) = \mu^{(n)}\left(\sigma_n\right)$$

для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Рассмотрим конфигурации $\sigma_0 = \{+,+,+,+\}, \sigma_1 = \{+,-,+,+\}, \sigma_2 = \{+,+,-,-\}, \sigma_3 = \{+,-,-,-\}, -\sigma_0 = \{-,-,-,-\}, -\sigma_1 = \{-,-,-,+\}, -\sigma_2 = \{-,-,+,+\}, -\sigma_3 = \{-,+,+,+\}$ на единичном шаре.

Обозначим
$h^{\sigma_0}_{b,\sigma_0} = h_{b,0},\ h^{\sigma_0}_{b,\sigma_1} = h_{b,1},\ h^{\sigma_0}_{b,\sigma_2} = h_{b,2},\ h^{\sigma_1}_{b,-\sigma_1} = h_{b,3},\ h^{\sigma_1}_{b,-\sigma_2} = h_{b,4},\ h^{\sigma_1}_{b,-\sigma_3} = h_{b,5},$

$$h^{-\sigma_1}_{b,\sigma_1} = h_{b,6},\ h^{-\sigma_1}_{b,\sigma_2} = h_{b,7},\ h^{-\sigma_1}_{b,\sigma_3} = h_{b,8},\ h^{-\sigma_0}_{b,-\sigma_0} = h_{b,9},\ h^{-\sigma_0}_{b,-\sigma_1} = h_{b,10},\ h^{-\sigma_0}_{b,-\sigma_2} = h_{b,11}. \qquad (4)$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{b,i}$, при которых выполняется (3).

Theorem.1[3] Пусть $k = 2$. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}\left(\sigma_n\right),\ \ n = 1, 2, ...$ в (2.1)-согласованное тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ имеют место следующие

$$\begin{aligned}
y_{a,0} = y_{a,6} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}\\
y_{a,1} = y_{a,7} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},\\
y_{a,2} = y_{a,8} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},\\
y_{a,3} = y_{a,9} &= \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},\\
y_{a,4} = y_{a,10} &= \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \qquad y_{a,5} = 1,
\end{aligned} \qquad (5)$$

где $\lambda = \exp\left\{J\beta\right\},\ \beta = 1/T,\ y_{a,i} = \exp(h_{a,i} - h_{a,11}),\ i = \overline{0\,,\,10}.$

В (4) положим $y_{a,i} = y_i \in R_+, y_0 = y_3, y = y_1 = y_4, y_2 = 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\lambda > \lambda_{cr} \approx 2.6639$ *, то мера* μ_0 *(соот. единс. решение* $y^3 + (1-\lambda)y^2 - 1 = 0$*) является некрайней.*

ЛИТЕРАТУРА

1. H.O. Georgii. Gibbs measures and phase transitions. de Gruyter Stud. Math. 9, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
2. Rozikov U.A. Gibbs Measures on Cayley Trees. World Sci,Publ, Singapore (2013)
3. У.А. Розиков, Г.Т.Мадгозиев. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли. Теор. и матем. физика.2011,N.2.-с.311-322.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БИЛАПЛАСИАНА С КОМПАКТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Пардабаев М.А.[1], Рахматова Д.С.[2],Камариддинова Ш.Р.[3]

[1,2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

p_mardon75@mail.ru1

[3]Бухарский государственный университет, Бухара,Узбекистан

В работе [1] рассмотрено семество непрерывных операторов Шредингера $h(\lambda), \lambda > 0$ ассоцированное с системой двух квантовых частиц, движущихся на $\mathbb{R}^d$,$d \geq 1$ и явление, когда при $\lambda \to 0$ некоторие отрицательное собственное значение $e(\lambda) \to 0$, т.е. при $\lambda \to 0$ собственное значение поглащается непрерывным спектром, и обратно, для любого $\xi > 0$ при $\lambda < \xi$, $\lambda \to \xi$ непрерывный спектр порождает новое собственное значение. Получено сходящееся разложение по малым $\lambda > 0$ при $d = 1$, а при $d = 2$ только асимптотическое разложение по малым $\lambda > 0$

Разложение собственных значений одномерного билапласиана с контактным возмущением было недавно установлено в [3]. В этой работе изучается скорость поглощения отрицательных собственных значений h_μ при приближении μ к порогу константы связи. Это сильно зависит от b.

Пусть $\mathbb{Z}$ - одномерная решетка, а $\ell^2(\mathbb{Z})$ - гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим оператор $\widehat{h}_\mu$, действующий в $\ell^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$\widehat{h}_\mu = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu \widehat{\mathrm{v}}_b, \quad \mu > 0,$$

где

$$\widehat{\Delta}\hat{f}(x) = \hat{f}(x) - \frac{\hat{f}(x+1) + \hat{f}(x-1)}{2}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

- дискретный лапласиан, а

$$\widehat{\mathrm{v}}_b\hat{f}(x) = \begin{cases} b^2\hat{f}(0) - \frac{b^2}{2}\hat{f}(1) - \frac{b^2}{2}\hat{f}(-1), & x = 0, \\ -\frac{b^2}{2}\hat{f}(0) + \frac{b^2}{4}\hat{f}(1) + \frac{b^2}{4}\hat{f}(-1), & x = \pm 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

является потенциалом ранга один. Здесь b ненулевое действительное число.

Пусть $\mathbb{T}$ - одномерный тор, а $L^2(\mathbb{T})$ - гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом, на $\mathbb{T}$.

Пусть

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathcal{Z}} \hat{f}(x) e^{ipx}$$

- стандартное преобразование Фурье с обратным

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-ipx} dp.$$

В импульсном представлении оператор h_μ, ($h_\mu = \mathcal{F}\widehat{h}_\mu\mathcal{F}^{-1}$) действует в $L^2(\mathbb{T})$ как

$$h_\mu := h_0 - \mu \mathrm{v}_b, \qquad \mu \geq 0, \qquad (1)$$

где $h_0 := \mathcal{F}\widehat{h}_0\mathcal{F}^{-1}$ - оператор умножения в $L^2(\mathbb{T})$ на

$$\mathfrak{e}(q) := (1-\cos q)^2,$$

и $\mathrm{v}_b := \mathcal{F}\widehat{\mathrm{v}}_b\mathcal{F}^{-1}$ - интегральный оператор ранга один

$$\mathrm{v}_b f(p) = b^2(1-\cos p)\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-\cos q)\ f(q)dq.$$

где $b \neq 0$ - произвольное действительное число.

Поскольку $\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0,2]$, имеем

$$\sigma(h_0) = \sigma_{ess}(h_0) = [0,4].$$

Следовательно, в силу компактности v_b и теоремы Вейля

$$\sigma_{ess}(h_\mu) = \sigma_{ess}(h_0) = [0,4]$$

для любого $\mu > 0$. В силу неотрицательности v_b множество положительного дискретного спектра оператора h_μ пуст.

Теорема. *Для любого $\mu > \frac{1}{b^2}$ оператор h_μ имеет единственное собственное значение $e(\mu)$ лежащее левее существенного спектра, а соответствующая собственная функция*

$$f_\mu(p) := \frac{1-\cos p}{\mathfrak{e}(p)-e(\mu)}.$$

Кроме того:

(1) $e(\cdot) < 0$;

(2) функция $\mu \in (\frac{1}{b^2}, +\infty) \longmapsto e(\mu)$ вещественно-аналитическая, строго убывающая, строго вогнутая по $(\frac{1}{b^2}, +\infty)$ с асимптотикой

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{b^2}} e(\mu) = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\mu\to+\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{3}{2}b^2;$$

(3) для достаточно малых и положительных $\mu - \frac{1}{b^2}$

$$(-e(\mu))^{1/4} = \sum_{n\geq 1} C_n\Big(\mu - \frac{1}{b^2}\Big)^n$$

где C_n, $n = 1,2,\ldots$, - действительные коэффициенты с

$$C_1 := \sqrt{2}\,b^2, \qquad C_2 := -\sqrt{2}\,b^4, \qquad C_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\,b^6.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Клаус, Б. Саймон: Пороги констант связи в нерелятивистской квантовой механике. I. Двухкорпусный двухкорпусный корпус ближнего действия. Аня. Phys. 130 (1980), 251-281.
2. С. Лакаев, А. Халхужаев, Ш. Лакаев: Асимптотическое поведение собственного значения двухчастичного дискретного оператора Шредингера. Теорет. Математика и физика 171 (2012), 800-811.
3. Ш. Холматов, М. Пардабаев: О спектре дискретного билапласиана с контактным возмущением. Лобачевский математический журнал, 2021, т. 42, No. 6, pp. 1286-1293

ГРАНЬ ГЕРШГОРИНА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУГРАНИЧЕННЫХ 3×3 ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Расулов Т. Х.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
Бухарское отделение Института математики имени В.И.Романовского
rth@mail.ru

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

произвольная $n \times n$-матрица с комплексными элементами.

В 1931 году Гершгорин [1] установил следующий результат: Каждое собственное значение λ матрицы A всегда расположено в одном из кругов

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} : \, |z - a_{ii}| \leq R_i := \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|\} \quad (i = 1, ..., n).$$

Согласно теореме Гершгорина спектр произвольной комплексной матрицы A, принадлежит объединению кругов K_i комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в точке a_{ii} радиуса R_i,

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

Таким образом, объединение всех точек кругов Гершгорина дает некоторую область локализации спектра матрицы A, т.е. область, в которой заведомо лежит спектр матрицы A.

Этот результат привлекал и продолжает привлекать к себе большое внимание. Причина такого интереса объясняется тем, что во многих случаях точные значения собственных чисел не важны, и нужно лишь знать, принадлежат ли они некоторой области G комплексной плоскости или нет.

Пусть$\mathcal{H}_i$, $i = 1, ..., n$ – гильбертовы пространства и $\mathcal{H}^{(n)} := \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$. Тогда оператор $\mathcal{A}^{(n)} \in L(\mathcal{H}^{(n)})$ всегда записывается в виде блочно–операторной матрицы

$$\mathcal{A}^{(n)} := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, \cdots, n$.

H.Salas [2] обобщил теоремы Гершгорина для ограниченных $n \times n$- операторных матриц $\mathcal{A}^{(n)}$ вида (1) следующим образом: Для $i = 1, ..., n$ определим

$$G_i := \sigma(A_{ii}) \cup \left\{ \lambda \in \rho(A_{ii}) : \ \|(A_{ii} - \lambda)^{-1}\|^{-1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \|A_{ij}\| \right\}.$$

Тогда

$$\sigma(\mathcal{A}^{(n)}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

В работе [3] доказан аналог теоремы Гершгорина относительно суммы элементов строк и столбцов для неограниченных диагонально доминирующих $n \times n$–операторных матриц. В настоящей заметке указано грань Гершгорина для самосопряженных полуограниченных 3×3–операторных матриц.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$ рассмотрим 3×3-операторную матрицу

$$\mathcal{A}^{(3)} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ A_{12}^* & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix},$$

где диагональные элементы $A_{ii} = A_{ii}^* : \mathcal{H}_i \supset D(A_{ii}) \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, 3$ ограничены снизу, а вне диагональные элементы $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ – ограниченные ненулевые операторы.

Теорема. Имеет место неравенство

$$\min \sigma(\mathcal{A}^{(3)}) \geq \min_{i=1}^{3} \left(\min \sigma(A_{ii}) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{3} \|A_{ij}\| \right),$$

так как здесь для $i = 1, 2, 3$ имеет место

$$\|(A_{ii} - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\min \sigma(A_{ii}) - \lambda}, \quad \lambda < \min_{i=1}^{3} \min \sigma(A_{ii}) \leq \min \sigma(A_{ii});$$

аналогичним образом можно получить оценку для $\max \sigma(\mathcal{A}^{(3)})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Гершгорин. Uber die Abgrenzung der Eigenwerie Matrix. Изв. Ан СССР, отд. физ.-мат. наук, 1931, с. 749–754.
2. H.N. Salas. Gershgorin's theorem for matrices of operators. Linear Algebra Appl., **291** (1-3): 15–36, 1999.
3. T.H. Rasulov, C. Tretter. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Rocky Mountain J. Math., 2018, No. 1, 279–324.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Расулова М. А.[1], **Неъматов М.**[2]

[1]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан
m_rasulova_a@rambler.ru
[2] Кокандский государственный педагогический институт, Фергана, Узбекистан

Пусть $\tau^k=(V,L), k\geq 1$ есть дерево Кэли порядка k (см.[1]) и $\Phi=\{1,2,3,...,q\}$, где $q\geq 3$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x\in V\mapsto \sigma(x)\in\Phi$.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид

$$H(\sigma)=J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+\alpha\sum_{x\in V}\sigma(x),$$

где $J,\alpha\in R$, $\alpha-$ внешнее поле.

Пусть $M-$ множество единичных шаров с вершинами в V (см.[2]). Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b\in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b)=\frac{1}{2}J\sum_{x\in S_1(c_b)}\delta_{\sigma(c_b)\sigma(x)}+\alpha\sigma(c_b),$$

здесь c_b- центр единичного шара b.

Лемма. *Пусть $k=2$. Тогда для каждой конфигурации φ_b верно следующее*

$$U(\varphi_b)\in\{U_n: n=\overline{1,4q}\},$$

где

$$U_n=\left\{\frac{n-1}{4}\right\}\cdot 2J+\left(1+\left[\frac{n-1}{4}\right]\right)\alpha.$$

Обозначим

$$A_\xi=\left\{(J,\alpha)\in R^2: U_\xi=\min\{U_1,U_2,...,U_{4q}\}\right\}.$$

Множества A_4, A_{4q} имеют следующий вид:
$A_4=\{(J,\alpha)\in R^2: J\leq 0,\alpha\geq 0\}$, $A_{4q}=\{(J,\alpha)\in R^2: J\leq 0,\alpha\leq 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $k=2$. Тогда для модели Поттса с внешним полем $\alpha\neq 0$ верны следующие утверждения:*
I. а) $\varphi(x)=1,\forall x\in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_4;
б) $\varphi(x)=q,\forall x\in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_{4q};
II. Всякие трансляционно-инвариантные конфигурации, кроме указанных в п. I конфигураций, не являются трансляционно-инвариантными основными состояниями.

Теорема 2. *Пусть $k=2$. Тогда для модели Поттса с внешним полем $\alpha\neq 0$ всякие $G_k^{(2)}$-периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.
2. Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. Siberian Advances in Mathematics. ISSN 1055 – 1344. 2016. Vol. 26, №3. pp. 215–229.

НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ СЕПАРАТНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Собиров У.М.

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан

s_usmon2014@mail.ru

Замечательная лемма Хартогса об аналитическом продолжении голоморфных функций вдоль фиксированного направления (см.[5]) является основополагающей леммой теории аналитического продолжения функции многих комплексных переменных.

Лемма Хартогса. *Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в цилиндре*

$$U \times V = \{z \in \mathbb{C}^n: \ |z| < 1\} \times \{w \in \mathbb{C}: \ |w| < 1\}$$

и при каждом фиксированном $z^0 \in U$ функция $f(z^0,w)$ по переменному w голоморфно продолжается в большой круг $V_R = \{w \in \mathbb{C}: \ |w| < R\}$, $R > 1$. Тогда функция $f(z,w)$ по совокупности переменных голоморфно продолжается в большой цилиндр $U \times V_R$.

Лемма Хартогса имеет многочисленные обобщения и приложения в разных областях науки: в теоретической физике, томографии и т.д. (см. например [1-4])

Мы будем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ ограниченные плоские области и $E \subset D$, $F \subset G$ неполярные компакты. Если непрерывная функция $f(z,w) \in C(E \times F)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *при каждом фиксированном $w^0 \in F$ функция $f(z,w^0)$ по переменному z голоморфно продолжается в области D за исключением конечного числа особенностей;*

2) *при каждом фиксированном $z^0 \in E$ функция $f(z^0,w)$ по переменному w голоморфно продолжается в области G за исключением конечного числа особенностей, то функция $f(z,w)$ голоморфно по совокупности переменных продолжается в область*

$$\{(z,w) : \omega^*(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1\} \setminus S,$$

где S- некоторое аналитическое подмножество $\mathbb{C}^2$.

Здесь $\omega^*(z,E,D)-$ гармоническая мера (см. [9]):

$$\omega^*(z,E,D) = \overline{\lim_{\zeta \to z}} \omega(\zeta,E,D),$$

$$\omega(z,E,D) = sup\{u(z) : u \in sh(D), \quad u|_D \leq 1, \quad u|_E \leq 0\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirka E. M. and Sadullaev A. On continuation of functions with polar singularities. Mat. Sb.(N.S.) 132(174) (1987), pp. 383Ц390;
2. Imomkulov S. A., On holomorphic continuation of functions defined on a pencil of boundary complex lines. Izv. Math., 69:2 (2005), pp.345Ц363.
3. Ivashkovitch S.M. The Hartogs-type extension theorem for the meromorphic maps into Kahler manifolds. Inv. Math. - 1992. - V. 109. pp. 47-54.
4. Sadullaev A. S., Imomkulov S. A. Extension of Holomorphic and Pluriharmonic Functions with Thin Singularities on Parallel Sections. Proc. Steklov Inst. Math., 253 (2006), pp.144Ц159.
5. Shabat B.V., Introduction to Complex Analysis. Part II, Moscow. Nauka. Fiz. Mat. Lit., 1985, 464, (Russian).

ОБ АНАЛОГЕ ЛЕММЫ ХАРТОГСА ДЛЯ R-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ РАДИУСОМ СХОДИМОСТИ

Туйчиев Т.Т.[1], Холмуродова Г.Н.[2]

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан
[1]tahir1955@mail.ru, [2]xolmurodovagulnoza3@gmail.com

Работа посвящена задачам R-аналитического продолжения функций многих действительных переменных, допускающих R-аналитическое продолжение на параллельные сечения. В ней приводится аналог известной теоремы Хартогса для R-анали-тических функций с переменным радиусом сходимости.

Известная лемма Хартогса (см.[1]) утверждает, что если голоморфная в области $'U \times \{|z_n| < r\} \subset \mathbb{C}^{n-1}{}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ где $'z = (z_1, z_2, ..., z_{n-1})$ функция $f('z, z_n)$ при каждом фиксированном $'z \in' U$ голоморфно продолжается в круг $|z_n| < R, \ \ R > r > 0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $'U \times \{|z_n| < R\}$.

С теоремой Хартогса непосредственно связана следующая теорема Форелли [2]: если $f-$ бесконечно гладкая в точке $0 \in \mathbb{C}^n$, $f \in \mathbb{C}^\infty\{0\}$, и сужения $f|_l-$ голоморфны в круге $U(0,1) = l \cap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l \ni 0$, то f голоморфно продолжается в шар $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ В недавней работе [3] А.Садуллаев доказал следующий аналог теоремы Форелли для R-аналитических функций.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, бесконечно гладкая в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{C}^\infty\{0\}$ и пусть для любой вещественной прямой l : $x = \lambda(t), \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in S(0,1), t \in \mathbb{R}$ параметр, сужение $f \mid_l = f(\lambda t)$ является вещественно-аналитической (*R *-аналитической) в интервале $t \in (-1,1)$. Тогда существует замкнутое плюриполярное множество $S \subset B(0,1)$ такое, что $f(x)$ является* R *-аналитической в $B(0,1)\backslash S$, где $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n-$ единичный шар, а $S(0,1) = \partial B(0,1)-$ единичная сфера.*

Отметим, что здесь использована известная терминология, что множество $S \subset \mathbb{R}^n(x)$ называется плюриполярным, если оно плюриполярное в вложенном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n_z$, $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z$, $z = x + iy$. Пример функции $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{k+1}}{(x_2-1)^2+x_1^2}$ показывает, что точные аналоги Теоремы Форелли, а также Теоремы Хартогса для R-аналитических функций не верны. Функция $f(x_1, x_2)$ вещественно-аналитическая в области $\mathbb{R} \times \{|x_2| < \frac{1}{2}\}$ сужение $f(x_1^0, x_2)$ вещественно аналитическая на всей прямой $\mathbb{R}$. Однако f не является вещественно-аналитической в точке $(0, 1)$.

В работе [4] аналог теоремы А.Садуллаева доказан для полицилиндрической облас-ти.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) = f('x, x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) функция $f(x) = f('x, x_n)$ $R-$ аналитическая в полицилиндре $U =' U \times \{|x_n| < r_n\}, r_n > 0$ где $'x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ и $'U = \{'x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x_1| < r_1, |x_2| < r_2, ..., |x_{n-1}| < r_{n-1}\} = \{'x \in \mathbb{R}^{n-1} : -r_1 < x_1 < r_1, -r_2 < x_2 < r_2, ..., -r_{n-1} < x_{n-1} < r_{n-1}\}$;

2) при каждом фиксированном $'x^0 \in 'U$ функция $f('x^0, x_n)$ R-аналитическая в интервале $|x_n| < r_n$, R-аналитически продолжается в больший интервал $|x_n| < R_n, R_n > r_n$

Тогда существует плюриполярное замкнутое множество $'S \subset 'U$ такое, что функция $f(x) = f('x, x_n)$ R-аналитически продолжается по совокупности переменных $('x, x_n)$ в $('U \times \{|x_n| < R_n\}) \setminus ('S \times |x_n| \geq r_n)$

В доказательстве теоремы 2 существенно используется метод доказательства Теоремы 1, предложенный А.Садуллаевым, а именно, вложение вещественного пространства $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z$, $z = x + iy$, и естественное голоморфное продолжение R -аналитических функций в $\mathbb{C}^n$,голоморфное продолжение рядов Хартогса и методы теории плюрипотенциала.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x) = f('x, x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) функция $f(x) = f('x, x_n)$ R-аналитическая в полицилиндре $U =' U \times \{|x_n| < r_n\}, r_n > 0$;

2) при каждом фиксированном $'x^0 \in 'U$ функция $f('x^0, x_n)$ R-аналитическая в интервале $|x_n| < r_n$, R-аналитически продолжается в интервал $|x_n| < R_n('x^0), R_n('x^0) \geq r_n > 0$ и $R_n('x^0)$- радиус максимального интервала куда R-аналитически продолжается функция $f('x^0, x_n)$.

Тогда существует плюриполярное замкнутое множество $'S \subset 'U$ такое, что функция $f(x) = f('x, x_n)$ R-аналитически продолжается по совокупности переменных $('x, x_n)$ в область $\{('x, x_n) \in \mathbb{R}^n : 'x \in 'U, |x_n| < (R_n)_*('x)\} \setminus ('S \times |x_n| \geq r_n)$, где $(R_n)_*('x) = \underline{\lim}_{'w \to 'x} R('w)$ -нижняя регуляризация радиус функции $R_n('x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartogs F. Zur theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veranderlichen. Math.Ann.1906. V.62.p.1-88.
2. Forelly F. Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices. Math. Scand., V. 41, 1977, p. 358-364.
3. Sadullaev A. Real analyticity of a germ at a origin. Ann. Polon. Math. 2021.
4. Atamuratov A.A, Tishabaev Zh.K, Tuychiev T.T. An analogue of Hartogs lemma for R-analytic functions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2021.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Холмуродова Г.Н.

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан
xolmurodovagulnoza3@gmail.com

Работа посвящена задачам продолжения плюригармонических функций, допускающих гармоническое продолжение на параллельные сечения с дискретными особенностями.

Теоремы Хартогса [1] и Лелона [2] утверждают, что сепаратно-голоморфные или сепаратно-гармонические функции являются, соответственно, голоморфными или гармоническими функциями по совокупности переменных. Возникает естественный вопрос: является ли сепаратно-субгармоническая функция субгармонической по совокупности переменных?

Ян Вигеринк [3] построил пример показывающий, что существует сепаратно-субгармоническая функция не являюшаяся субгармонической по совокупности переменных.

Доказательство теоремы Хартогса опирается на следующую лемму Хартогса : если голоморфная в поликруге $'U \times \{|z_n| < r\} \subset \mathbb{C}^{n-1}{}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ где $'z = (z_1, z_2, ..., z_{n-1})$, функция $f('z, z_n)$ при каждом фиксированном $'z \in' U$ голоморфно продолжается по переменной z_n в круг $|z_n| < R, \ \ R > r > 0$, то она голоморфна продолжается по совокупности переменных в большой поликруг $'U \times \{|z_n| < R\}$. Справедлив аналог этой леммы для плюригармонических функций: пусть функция $u('z, z_n)$ плюригармонична в поликруге $'U \times \{|z_n| < r\}$, и при каждом фиксированном гармонически продолжается по z_n в большой круг $|z_n| < R, \ \ R > r > 0$. Тогда $u('z, z_n)$ является плюригармонической по совокупности переменных в большом поликруге $'U \times \{|z_n| < R\}$. В самом деле , так как $u('z, z_n)$ плюригармонична в $'U \times \{|z_n| < r\}$, то $u('z, z_n)$ является реальной частью некоторой голоморфной в этом поликруге функции $f('z, z_n)$. Кроме того при фиксированном $'z \in' U$ она является реальной частью голоморфной в $|z_n| < R$ некоторой функции $F('z, z_n)$. Рассмотрим разность $f - F$. Так как $f = F$ в $|z_n| < r$, то из теоремы единственности следует, что $f \equiv F$. Следовательно, функция $f('z, z_n)$ голоморфна по z_n в большом круге при каждом фиксированном $'z \in' U$ и голоморфна по совокупности переменных в меньшем поликруге $'U \times \{|z_n| < r\}$. Тогда применяя лемму Хартогса, мы получаем голоморфность по совокупности переменных f в поликруге $'U \times \{|z_n| < R\}$ и , следовательно, $u('z, z_n)$ является плюригармоничес- кой в этом поликруге .

Для любой плюригармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функции $u(z)$ локально в окрестности каждой точки $z^0 \in D$ существует голоморфная функция $f(z)$, для которой $\mathrm{Re} f(z) = u(z)$. Однако, если мы хотим найти такую функцию глобально, то вообще говоря, она не обязана быть однозначной, она будет многозначной аналитической функцией. В данном докладе обсуждается вопросы продолжения плюригармонических функций, имеющих особенности на параллельных сечениях. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $u('z, z_n)$ плюригармоническая в поликруге $'U \times \{|z_n| < r\}, \ \ r > 0$, и при каждом фиксированном $'z^0 \in' U$ функция $u('z^0, z_n)$ гармонически продолжается на всю замкнутую плоскость $\overline{\{'z =' z^0\}}$ за исключением некоторого дискретного множества особых точек $\alpha_1('z^0), ..., \alpha_m('z^0)$ $(m = m('z^0) \geq 0)$. Причем $\min\limits_{i \neq j} \rho(\alpha_i('z), \alpha_j('z))$ локальнo отграничен от нуля в $'U$ (в метрике расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$), т.е. для любого компакта $K \subset' U$ найдется число $\delta = \delta(K) > 0$, для которого*

$$\min_{i \neq j} \frac{|\alpha_i('z) - \alpha_j('z)|}{\sqrt{1 + |\alpha_i('z)|^2} \cdot \sqrt{1 + |\alpha_j('z)|^2}} \geq \delta, \ \ 'z \in K$$

Тогда $u('z, z_n)$ плюригармонически (однозначно) продолжается в область $('U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S - некоторое аналитическое подмножество в $'U \times \mathbb{C}$.

В доказательстве этой теоремы существенно используется теорема 2 из работы [4]. Заметим, что хотя сама функция $f('z, z_n)$, для которой $\mathrm{Re} f('z, z_n) = u('z, z_n)$, полученная при доказательстве теоремы, многозначная аналитическая функция, ее действительная часть является однозначной плюригармонической функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartogs F. Zur theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veranderlichen. Math.Ann. 1906.V.62.p.1-88.

2. Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles. Ann. Inst Fourier 11 (1961), 515-562.
3. Wiegerinck J. Separately subharmonic functions need not be subharmonic. Proceedigs of the American mathematical society. 1988. V.4 :3 , 770-771.
4. Туйчиев Т. Т. Продолжение многозначных функций с дискретными особенностями. Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, є 4. С. 129Ч140.

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА НА ГРАНИЦЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ВТОРОГО ТИПА

Эшимбетов М. Р.[1], Матназарова У. Н.[1], Курбанов К.[2]
[1]Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
mr.eshimbetov92@gmail.com, fialka.m.u@mail.ru
[2]Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
kamron_kurbanov@mail.ru

В настоящее время изучение и исследование граничных свойств интегральных формул Бергмана, Коши-Сеге, Пуассона для матричных областей является актуальной проблемой (см. напр. [5-7]). Для классических областей $\Re_I(m,n), \Re_{II}(n), \Re_{III}(n)$ и $\Re_{IV}(n)$, классифицированных Картаном в работе [2], были найдены Хуа Ло-Кеном ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона, на основе этих ядер были успешно реализованы интегральные формулы (см. [1]).

Задачей Дирихле для уравнения Лапласа называется задача нахождения значений гармонической функции внутри области по ее граничным–краевым значениям на границе области. Известно, что интеграл Пуассона является мощным аппаратом при решении задачи Дирихле. Поэтому интеграл Пуассона широко применяют в многомерном комплексном анализе и его приложениях. Также его часто используют в гармоническом анализе (см. напр. [1,3,4,8,9]).

Для большей ясности мы сначала будем говорить о гармонических функциях в $\Re_I$ при $m=n$. Уравнение Лапласа в $\Re_I$ имеет вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{i=1}^{n}z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk}-\sum_{\gamma=1}^{n}z_{j\gamma}\bar{z}_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\partial\bar{z}_{k\beta}}=0. \tag{1}$$

Функции $u(z)$, удовлетворяющие этому уравнению в замыкании $\Re_I$, будем называть гармоническими в $\Re_I$. Те из них, которые имеют непрерывные граничные значения на остове $\mathbb{X}_I$ в область $\Re_1$ образуют класс, обозначаемый через $\aleph$. Решение задачи Дирихле в $\Re_I$ дает следующий результат. Если нам дана непрерывная на унитарной группе $\mathbb{X}_I$, функция $\varphi(U)$, то существует одна, и только одна, гармоническая функция $u(Z)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{Z\to U}u(Z)=\varphi(U).$$

Эта функция может быть найдена по интегральной формуле Пуассона

$$u(Z)=\frac{1}{V(\mathbb{X}_I)}\int\limits_{\mathbb{X}_I}\frac{\left\{\det\left(I-Z\bar{Z}'\right)\right\}^n}{\left|\det\left(I-Z\bar{Z}'\right)\right|^{2n}}\varphi(U)\dot{U}.$$

В докладе приводятся аналог нахождения дифференциального оператора вида (1) для классически области второго типа $\Re_{II}(n)$ и найдена соответствующая интегральная формула Пуассона, а также изучена граничные свойства данного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
2. Cartan E. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sern. Univ. Hamburg *11*(1935), pp.116-162.
3. Хенкин Г.М., Чирка Е.М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т.4. С. 13–142.
4. Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А. Анализ в матричных областях. Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 297 с.
5. Khudayberganov G., Rakhmonov U. S., Matyakubov Z. Q. Integral formulas for some matrix domains. Contemporary Mathematics, AMS, Volume *662*, 2016, pp. 89-95.
6. Myslivets S.G., Construction of Szegő and Poisson kernels in convex domains, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* **11:6** (2018) , pp. 792-795.
7. Khudayberganov G., Abdullayev J.Sh. Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains $\tau^+(n-1)$ and $\Re^n_{IV}$. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 13:5, 559-567(2020).
8. Khudayberganov G., Khalknazarov A.M., Abdullayev J.Sh., Laplace and Hua Luogeng operators, *Russian Mathematics (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat)* 2020, Vol **64** , no. 3, pp. 66-71. ©Allerton Press, Inc., 2020
9. Krantz S., "Harmonic and Complex Analysis in Several Variables Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2017, 1–424

О БЕСКОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Эшкабилов Ю. Х.[1], Култураев Д.Ж.[2]

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
[1]yusup62@mail.ru ; [2]davron_2189@mail.ru

Изучение спектра является основной задачей в теории операторов Шредингера. Пусть $u(x)$ - вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_\nu = [0,1]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. K - интегральный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$ с ядром $k(x,s) \in L_2(\Omega_\nu^2)$, где $k(x,s) = \overline{k(s,x)}$. Ряд вопросов квантовой механики и статистической физики [1-2] приводит к исследованию дискретного спектра оператора H в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$ действующего по формуле

$$H = H_0 + K \tag{1}$$

где

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad (Kf)(x) = \int\limits_{\Omega_\nu} k(x,s)f(s)d\mu(s).$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега, $\mu(\cdot)$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^\nu$.

Оператор вида (1) называется оператором в модели Фридрихса. Из классической теоремы Вейля о компактном возмущении следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(H)$ оператора H состоит из множества значений функции $u(x)$, т.е. $\sigma_{ess}(H) = [u_{min}, u_{max}]$, где $u_{min} = \min\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$, $u_{max} = \max\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$.

Пользуясь принципом минимакса и максимина доказано [3] что, если ядро интегрального оператора K вырожденный, то дискретный спектр в модели Фридрихса (1) является конечном. Отсюда вытекает, чтобы оператор в модели (1) имел бесконечный дискретный спектр необходимо, чтобы ядро интегрального оператора K было невырожденным.

Рассмотрим двухчастичный решетчатый гамильтониан

$$\widetilde{Q} = Q_0 + Q^{'}, \tag{2}$$

действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ $(\nu \in \mathbb{N})$, здесь кинетическая энергия Q_0 задается сверткой с функцией общего вида:

$$(Q_0\phi)(m,n) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} v_0(m-k, n-l)\phi(k,l),$$

а потенциальная энергия Q_1 равна

$$(Q^{'}\phi)(m,n) = v_1(m,n)\phi(m,n).$$

Пусть кинетическая знергия имеет вид $v_0(m,n)$

$$v_0(m,n) = \begin{cases} 4b, & \text{если } \ m=n=0, \\ b, & \text{если } \ |m|=1, \ n=0, \\ b, & \text{если } \ m=0, \ |n|=1, \\ 0, & \text{для других значений } n,m\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $b<0$.

Определим потенциальную функцию

$$v_1(m,n) = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если } \ m=n=0, \\ \alpha_p, & \text{если } \ m\in\{\pm p\}, \ n=0, \ p\in\mathbb{N}, \\ \beta_q, & \text{если } \ m=0, \ n\in\{\pm q\}, \ q\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{для других значений } \ n,m\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $\alpha_0>0, \ \alpha_p>0, \ \beta_q>0, \ p,q\in\mathbb{N}, \ \sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\alpha_p^2<\infty, \ \sum\limits_{q\in\mathbb{N}}\beta_q^2<\infty.$

Пусть $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$. $\mathcal{F}: l_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$- преобразование Фурье, при котором функции $\phi(m,n)$ на решетке $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ переходят в функции $f(x,y)$ на $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ по правилу

$$\phi(m,n) \to f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} \phi(p_1,q_1)exp(i[(p_1,x)+(q_1,y)]).$$

Лемма. *Преобразование Фурье $\widetilde{H}_2$ оператора $\widetilde{Q}$ (2) действует в $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ по формуле.*

$$\widetilde{H}_2 f(x,y) = H_0^{(2)} f(x,y) + K_2 f(x,y), \tag{3}$$

здесь

$$H_0^{(2)} f(x,y) = u_0^{(2)}(x,y) f(x,y), \quad K_2 f(x,y) = \int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} k_2(x,y;s,t) f(s,t)dsdt$$

и $u_0^{(2)}(x,y) = 2b(2 + cosx + cosy)$, *ядро* $k_2(x,y;s,t)$ *- невырожденное.*

Согласно леммы дискретный оператор Шредингера $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ (3) является оператором в модели Фридрихса с невырожденным ядром. Имеем $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2(\varepsilon)) = [8b, 0]$.

Теорема. *Дискретный оператор Шредингера* $\widetilde{H}_2$ *имеет бесконечное количество положительных собственных значений.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. В. кн.: Труды МИ АН. СССР, Т.73, М.: Наука, 1964. С. 292-313.
2. Минлос Р. А., Синай Я.Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. ТМФ. 1970. Т.2. №2. С. 230-243.
3. Эшкабилов Ю.Х.О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса. Мат.труды.. 2011. Т. 14. №1. С. 195–211.

II SHO‘BA: ALGEBRA VA GEOMETRIYA

СЕКЦИЯ № 2: АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

SECTION No. 2: ALGEBRA AND GEOMETRY

2-LOCAL AND LOCAL DERIVATIONS ON SIMPLE FINITE-DIMENSIONAL ALGEBRAS WITHOUT FINITE BASIS OF IDENTITIES

Arzikulov F. N.[1], Ergasheva Sh. Sh.[2]

[1]Institute of Mathematics, Namangan Regional Department, Uzbekistan Academy of Sciences, Namangan, Uzbekistan,
Department of Mathematics, Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan
arzikulovfn@rambler.ru;
[2]Qo‘qon State Pedagogical Institute, Qo‘qon, Uzbekistan shahloergasheva9@gmail.com;

The present paper is devoted to local and 2-local derivations of simple finite-dimensional algebras without finite basis of identities, constructed by Kislitsin in [1] and [2]. The history of local derivations began in the paper of Kadison. Kadison proved that every continuous local derivation from a von Neumann algebra into its dual Banach bimodule is a derivation. A similar notion of 2-local derivations was introduced by Šemrl.He proved that any 2-local derivation of the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H is a derivation. After his works, numerous new results related to the description of local and 2-local derivations of associative algebras have appeared.

The study of local and 2-local derivations of nonassociative algebras was initiated in papers of Ayupov and Kudaybergenov. In particular, they proved that there are no nontrivial local and 2-local derivations on semisimple finite-dimensional Lie algebras. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. and Rakhimov I. gave examples of 2-local derivations on nilpotent Lie algebras which are not derivations. Later, the study of local and 2-local derivations was continued for Leibniz algebras and Jordan algebras. Local and 2-local automorphisms were also studied in many cases. For example, local and 2-local automorphisms on Lie algebras have been studied by Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. and Costantini M.

The variety of Malcev algebras is a generalization of the variety of Lie algebras. It is closely related to other classes of nonassociative structures: it is a proper subvariety of binary Lie algebras, under the multiplication $ab-ba$ an alternative algebra is a Malcev algebra. Moreover, they have connections to various classes of algebraic systems such as Moufang loops, Poisson-Malcev algebras, etc. The study of generalizations of derivations of simple Malcev algebras was initiated by Filippov and continued in some papers of Kaygorodov and Popov.

In the present paper, we continue the study of derivations of simple algebras. Namely, we prove that any local derivation of the simple finite-dimensional algebras without finite basis of identities, constructed by Kislitsin in [1] and [2], is a derivation, and every 2-local derivation of these algebras is also a derivation.

Let $\mathcal{D} = \langle e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ be an algebra over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 0 whose nonzero products of basis elements from $\{e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\}$ are defined by the rules $v_ie_{ij} = -e_{ij}v_i = v_j$, $v_2p = -pv_2 = e$, $v_ie = -ev_i = v_i$, $e_{ij}e = -ee_{ij} = e_{ij}$, $pe = -ep = p$.

Then $\mathcal{D}$ is a simple anticommutative algebra without finite basis of identities. [2] Let a be an element in $\mathcal{D}$. Then we can write $a = a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$, for some elements a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 in $\mathbb{F}$. Throughout of the paper let $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. Conversely, if $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ is a column vector with a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 in $\mathbb{F}$, then, throughout of the paper, by $\widehat{v}$ we will denote the element $a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$, i.e., $\widehat{v} = a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A linear map $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called a derivation if $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for any two elements x, $y \in \mathcal{A}$.

Our principal tool for the description of local and 2-local derivations of $\mathcal{D}$ is the following Proposition.

Proposition 1. A linear map $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ is a derivation if and only if in the above basis D has the following form:

$$D(x) = x_2a_{2,2}v_1 + x_3(a_{2,2} + a_{5,5})v_2 + x_5a_{5,5}e_{12} - x_7(a_{2,2} + a_{5,5})p,$$

$$x = x_1e + x_2v_1 + x_3v_2 + x_4e_{11} + x_5e_{12} + x_6e_{22} + x_7p \in \mathcal{D}$$

for some fixed $a_{2,2}$, $a_{5,5}$ in $\mathbb{F}$.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A linear map $\nabla\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called a local derivation if for any element $x \in \mathcal{A}$ there exists a derivation $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\nabla(x) = D(x)$.

A (not necessary linear) map $\Delta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called a 2-local derivation if for any two elements x, $y \in \mathcal{A}$ there exists a derivation $D_{x,y}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$. With respect to these notions we proved the following theorem.

Theorem 2. Every local (2-local) derivation on the simple algebra $\mathcal{D}$ is a derivation.

Let $\mathcal{C} = \langle e = \mathbf{1}, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ be an algebra over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 0 whose nonzero products of basis elements from $\{e = \mathbf{1}, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\}$ are defined by the rules $v_ie_{ij} = e_{ij}v_i = v_j$, $v_2p = pv_2 = \mathbf{1}$.

Then the algebra $\mathcal{C}$ is a simple central commutative algebra with no finite basis of identities. [1] Let a be an element in $\mathcal{C}$. Then we can write

$$a = a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p,$$

for some elements a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 in $\mathbb{F}$. Throughout of the paper let $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. Conversely, if $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ is a column vector with a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 in $\mathbb{F}$, then, throughout of the paper, by $\widehat{v}$ we will denote the element $a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$, i.e., $\widehat{v} = a_1e + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$.

Our principal tool for the description of local and 2-local derivations of $\mathcal{C}$ is the following Proposition.

Proposition 3. A linear map $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ is a derivation if and only if in the basis (2) D has the following form:

$$D(x) = x_2a_{2,2}v_1 + x_3(a_{2,2} + a_{5,5})v_2 + x_5a_{5,5}e_{12} - x_7(a_{2,2} + a_{5,5})p,$$

$$x = x_1e + x_2v_1 + x_3v_2 + x_4e_{11} + x_5e_{12} + x_6e_{22} + x_7p \in \mathcal{D}$$

for some fixed $a_{2,2}$, $a_{5,5}$ in $\mathbb{F}$.

With respect to $\mathcal{C}$ we proved the following theorem.

Theorem 4. Every local (2-local) derivation on the simple algebra $\mathcal{C}$ is a derivation

REFERENCES

1.Kislitsin A.V., An example of a central simple commutative finite-dimensional algebra with an infinite basis of identities // Algebra and Logic, 54(3) (2015), 204–210.
2.Kislitsin A.V., Simple finite-dimensional algebras without finite basis of identities. // Siberian Mathematical Journal, 58 (2017), 461–466.

ON n-POWER-ASSOCIATIVE TWO-DIMENSIONAL ALGEBRAS

Bekbaev U.Dj.
Department of Natural and Mathematical Sciences, Turin University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
uralbekbaev@gmail.com

One of the well known classes of algebras is the class of associative algebras. Only up to 5 dimensional cases their full classifications are known [2]. One of the nearest to associativity property is so called the power-associativity property. An algebra $\mathbb{A}$ is said to be a power-associative algebra if its every one-generated subalgebra is an associative algebra. The classification, up to isomorphism, of all m-dimensional power-associative algebras over algebraically closed fields is an open problem except for $m = 2$ case. In $m = 2$ case the corresponding result, over the field of complex numbers and $\mathbb{R}$ cases, has been given in [3]. When every quadratic and cubic polynomial over the underlying field $\mathbb{F}$ has a root in it or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ the corresponding result can be found in [1].

One can weaken the power-associativity property by fixing some positive integer $n \geq 3$ and consider n-power-associative algebras, that is algebras where "u^n"is well defined for any element u. It means that n times product of any element does not depend on the order of the multiplication, for example, 3-power-associativity of an algebra $\mathbb{A}$ means that $u^2u = uu^2$ is true for any $u \in \mathbb{A}$.

In [1] it was shown that the set of all 3-power-associative two-dimensional algebras is strictly bigger than the set of all two-dimensional power-associative algebras. In contrast to this fact in the present paper we show that if $n \geq 4$ then every two-dimensional n-power-associative algebra is a power-associative algebra.

Further it is assumed that $\mathbb{F}$ is fixed field such that every quadratic and cubic polynomial over it has a root in it, or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. All algebras are two-dimensional over $\mathbb{F}$. If $(\mathbb{A}, \cdot)$ is a two-dimensional algebra and $e = (e_1, e_2)$ is its fixed linear basis we denote by

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 4, \mathbf{F})$$

its matrix of structural constants (MSC) with respect to this basis, which means that

$$e_1e_1 = \alpha_1e_1 + \beta_1e_2,\ e_1e_2 = \alpha_2e_1 + \beta_2e_2,\ e_2e_1 = \alpha_3e_1 + \beta_3e_2,\ e_2e_2 = \alpha_4e_1 + \beta_4e_2.$$

It is assumed that a basis e is fixed, we don't make difference between an algebra $\mathbb{A}$ and its MSC A in that basis. We follow the notations used in [1].

Lemma 1. Any nontrivial two-dimensional not single generated(two-generated) algebra is isomorphic to only one of the following such algebras:

In $Char(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ case $A_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$A_4\left(\alpha_1, 2\alpha_1 - 1\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_8\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

in $Char(\mathbb{F})=2)$ case $A_{1,2}\left(1,1,0,0\right)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$,

$A_{4,2}\left(\alpha_1,1\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&1&1-\alpha_1&0\end{pmatrix}$, $A_{8,2}\left(1\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,

in $Char(\mathbb{F})=3$ case $A_{3,3}\left(0,-1\right)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$,

$A_{4,3}\left(\alpha_1,-1\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&2\alpha_1-1&1-\alpha_1&0\end{pmatrix}$, $A_{10,3}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

in $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ case $A_{1,r}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,0\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,

$A_{5,r}\left(\alpha_1,-1\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&2\alpha_1-1&1-\alpha_1&0\end{pmatrix}$, $A_{10,r}\left(\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$.

Lemma 2. If $\mathbb{A}$ is commutative, $u,v\in\mathbb{A}$, (u^2,u) is linear independent, $u^2u=\gamma_1u^2+\delta_1u$, $(u^2)^2=\gamma_2u^2+\delta_2u$, $v\neq 0$ then $vu\neq 0$ whenever $\delta_1\neq 0$. If $\begin{vmatrix}\gamma_1&\delta_1\\\gamma_2&\delta_2\end{vmatrix}\neq 0$ then $vu^2\neq 0$.

Note that every one-generated two-dimensional 3-power- associative algebra is commutative. Indeed, if (u^2,u) is a linear basis and $v=\alpha(v)u^2+\beta(v)u, w=\alpha(w)u^2+\beta(w)u$ then $vw-wv=(\alpha(v)\beta(w)-\alpha(w)\beta(v))(u^2u-uu^2)=0$.

The following is the main result.

Theorem. *In two-dimensional case every n-power-associative algebra, where $n\geq 4$, is power associative.*

In connection with the above Theorem it is natural to ask the following two interesting questions about finite dimensional algebras over an algebraically closed field $\mathbb{F}$.

Question 1. Is it true that at any natural $m\geq 3$ there exists a positive integer $p(m)$ such that if $n>p(m)$ then every n-power-associative m-dimensional algebra is power associative?

Let $\mathfrak{A}(m)$ stand for the set of all m-dimensional algebras, $P\mathfrak{A}(m)$-be the set of all m-dimensional power associative algebras and $P\mathfrak{A}_{[l,\infty)}(m)$ be the set of all m-dimensional algebras which are n-power-associative at any $n\geq l$.

Question 2. Does the tower

$$P\mathfrak{A}_{[1,\infty)}(m)\subset P\mathfrak{A}_{[2,\infty)}(m)\subset P\mathfrak{A}_{[3,\infty)}(m)\subset P\mathfrak{A}_{[4,\infty)}(m)\subset ...$$

stabilize? If "Yes"will $P\mathfrak{A}(m)$ be its stabilized term?

The questions are formulated for $m\geq 3$ case as far as at $m=2$ the answers to these questions are positive due to the above Theorem.

REFERENCES

1. Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I.,On two-dimensional power-associative algebras over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol.40(1), 1–13.
2. Mazzola G., The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five, Manuscripta Math.,1979, 27 , 81вГY101.
3. Wallace E.W., Two-dimensional power-associative algebras, Mathematics Magazine, 1970, v.43(3), 158–162.

INVARIANTS OF m-TUPLES FOR THE ORTHOGONAL GROUP IN THE $Q\sqrt{5}$ WITH THE FORM $x_1y_1+5x_2y_2$ OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

Beshimov G. R.[1], Gafforov I. I.[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1]gayratbeshimov@gmail.com
[2]ibrohimovich1102@gmail.com

Let Q the field of rational numbers and Q^2 be the 2-dimensional vector space over Q. Consider the following bilinear form $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2$ on Q^2, where $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in Q^2$. Then the pair (Q^2, φ) is a bilinear-metric space.

Definition 1. A mapping $F : Q^2 \to Q^2$ will be called φ-orthogonal (form-preserving) if $\varphi(F(x), F(y)) = \varphi(x, y)$ for all $x, y \in Q^2$.

Denote by $O(2, \varphi, Q)$ the set of all φ-orthogonal transformations of Q^2. It is easy to see that every element of $O(2, \varphi, Q)$ is a linear transformation of Q^2. $O(2, \varphi, Q)$ is a group with respect to the composition of transformations. Let $F \in O(2, \varphi, Q)$. Then $det(F) = 1$ or $det(F) = -1$. We denote by $SO(2, \varphi, Q)$ the set $\{F \in O(2, \varphi, Q)|det(F) = 1\}$. Put $U = \|u_{ij}\|_{i,j=1,2}$, where $u_{11} = 1, u_{12} = u_{21} = 0, u_{22} = -1$. Then $U \in O(2, \varphi, Q)$. It is easy to see that $O(2, \varphi, Q) = SO(2, \varphi, Q) \cup \{HU \mid H \in O(2, \varphi, Q)\}$ holds, where HU is the multiplication of matrices H and U.

Let $x = (x_1, x_2) \in Q^2$. Denote by $M(x_1, x_2)$ the matrix of the form $\begin{pmatrix} x_1 & -5x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Let $SM(\varphi, Q)$ be the set of all matrices $M(x_1, x_2)$ such that $det(M(x_1, x_2)) = x_1^2 + 5x_2^2 = 1$.

Theorem 1. The equality $SO(2, \varphi, Q) = SM(\varphi, Q)$ holds.

Let $GL(2, Q)$ be the group of all linear transformations of Q^2. Let Ω be a subgroup of the group $GL(2, Q)$. Denote by $\Omega \vee Tr(2, Q)$ the set of all transformations $H : Q^2 \to Q^2$ of the form $H(x) = F(x) + a$, where $F \in \Omega$, $a \in Q^2$. The set $\Omega \vee Tr(2, Q)$ is a group with respect to the composition of transformations.

Let N be the set of all natural numbers and $m \in N, m \geq 1$. Put $N_m = \{j \in N|1 \leq j \leq m\}$.

Definition 2. Let $m \in N$. A mapping $u : N_m \to Q^2$ will be called an m-tuple in Q^2. Denote it in the following form $u = (u_1, u_2, \dots u_m)$.

Denote by $(Q^2)^m$ the set of all m-tuples in Q^2. Let G be a subgroup of the group $GL(2, Q) \vee Tr(2, Q)$.

Definition 3. Two m-tuples $u = (u_1, u_2, \dots u_m)$ and $v = (v_1, v_2, \dots v_m)$ in Q^2 is called G-equivalent if there exists $g \in G$ such that $v_j = gu_j, \forall j \in N_m$. In this case, we write $v = g(u)$ or $u \overset{G}{\sim} v$.

Definition 4. A subset $B \subseteq (Q^2)^m$ is called G-invariant if $g(u) \in B$ for all $u \in B$ and all $g \in G$.

Definition 5. Let B be a G-invariant subset of $(Q^2)^m$. A function $f : B \to Q$ is called G-invariant on B if $u, v \in B$ and $u \overset{G}{\sim} v$ implies $f(u) = f(v)$.

Let $[xy]$ denote the determinant $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ of elements $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Q^2$. Since $det(g) = 1$ for all $g \in SO(2, \varphi, Q)$, we have $[(gx)(gy)] = det(g)[xy] = [xy]$ for all $g \in SO(2, \varphi, Q)$. Hence the determinant $[xy]$ is $SO(2, \varphi, Q)$-invariant function on the set $(Q^2)^2$.

Definition 6. Let B be a G-invariant subset of $(Q^2)^m$. A system $\{f_j|j \in J\}$, where $f_j \in Map(B, Q)^G$, will be called *a complete system* of G-invariant functions on B if $u, v \in B$ and equalities $f_j(u) = f_j(v), \forall j \in J$, imply $u \overset{G}{\sim} v$.

Denote by θ_m the m-tuple $u = (u_1, u_2, \ldots)_m \in (Q^2)^m$, where $u_j = \theta, \forall j \in N_m$. Define the function $D : (Q^2)^m \to N$ as follows: put $D(0_m) = 0$. Let $u = (u_1, u_2, \ldots)_m \in (Q^2)^m$ such that $u \neq \theta_m$. In this case, we put $D(u) = k$, where $k \in N_m$ such that $u_j = \theta, \forall j = 1, \ldots k-1$ and $u_k \neq \theta$.

Proposition 1. Let G be a subgroup of $GL(2, Q)$. The function $D(u)$ is an G-invariant function on $(Q^2)^m$.

Let $u = (u_1, \ldots, u_m), v = (v_1, \ldots, v_m) \in (Q^2)^m$ be m-tuples such that $D(u) = D(v) = 0$. Then $u = v = \theta_m$. Hence $u \overset{G}{\sim} v$ in this case. Now we consider the case $D(u) = D(v) \neq 0$.

Theorem 2. Let $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m), v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in (Q^2)^m$ be two m-tuples in Q^2 such that $D(u) = D(v) = k$, where $1 \leq k \leq m$.

(i) Assume that $u \overset{SO(2,\varphi,Q)}{\sim} v$. Then:

$(i.1)$. In the case $k = m$, the equality $\varphi(u_k, u_k) = \varphi(v_k, v_k)$ holds.

$(i.2)$. In the case $k < m$, the following equalities hold

$$\begin{cases} \varphi(u_k, u_k) = \varphi(v_k, v_k); \\ \varphi(u_k, u_j) = \varphi(v_k, v_j), \forall j = k+1, \ldots, m; \\ [u_k u_j] = [v_k v_j], \forall j = k+1, \ldots, m. \end{cases}$$

(ii) Conversely, assume that the equality $\varphi(u_k, u_k) = \varphi(v_k, v_k)$ holds in the case $k = m$ and the above equalities hold in the case $k < m$. Then, in these cases, there exists the unique matrix $F \in SO(2, \varphi, Q)$ such that $v_j = F u_j, \forall j = 1, \ldots, m$. In these cases, F has the following form

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\varphi(u_k, v_k)}{\varphi(u_k, u_k)} & \frac{-5[u_k v_k]}{\varphi(u_k, u_k)} \\ \frac{[u_k v_k]}{\varphi(u_k, u_k)} & \frac{\varphi(u_k, v_k)}{\varphi(u_k, u_k)} \end{pmatrix},$$

where $\det(F) = (\frac{\varphi(u_k, v_k)}{\varphi(u_k, u_k)})^2 + 5(\frac{[u_k v_k]}{\varphi(u_k, u_k)})^2 = 1$.

Σ-SPACE AND HYPERSPACE

Beshimov R. B.[1], Safarova D. T.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

rbeshimov@mail.ru

[2]safarova.dilnora87@mail.ru

Let X be a topological T_1-space. Denote by $\exp_n X$ the set of all non-empty closed subsets of X of cardinality not greater than the cardinal number n, i.e.

$$\exp_n X = \{ F \in \exp X : |F| \leq n \}.$$

Put $\exp_\omega X = \bigcup \{\exp_n X : n = 1, 2, ...\}$, $\exp_c X = \{F \in \exp X : F \text{ is compact in } X\}$. It is clear, that $\exp_n X \subset \exp_\omega X \subset \exp_c X \subset \exp X$ for any topological space X [1].

Definition1. A space is a (strong) Σ-space if there exists a pair $\{\mathcal{J}, \mathcal{C}\}$ of families satisfying the following conditions:

1. $\mathcal{J}$ is a σ-discrete family of subsets of X;
2. $\mathcal{C}$ is a cover of X by closed countably compact (respectively compact) subsets of X;
3. If $C \in \mathcal{C}$ and U is an open subset of X such that $C \subset U$, then $C \subset F \subset U$ for some $F \in \mathcal{J}$[4].

Theorem 1. If X is a paracompact Σ-space, then $\exp_n X$ is also a paracompact Σ-space.

Definition 2. A collection $\mathcal{F}$ of subsets of a space X is a k-network if whenever K is a compact subset of an open set U, there exists a finite $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ such that $K \subset \bigcup \mathcal{F}' \subset U$. A regular space with σ-locally finite (countable) k-network is called an $\aleph$-space ($\aleph_0$-space)[5].

Proposition 1. Let $f : X \to Y$ be a perfect mapping of a topological space X onto a topological space Y. If X has a k-network of cardinality $\tau \geq \aleph_0$, then Y has a k-network of cardinality $\leq \tau$ [5].

Theorem 2. A space X is an $\aleph$-space if and only if $\exp_n X$ is an $\aleph$-space.

Theorem 3. Hausdorff space X is an $\aleph_0$-space if and only if $\exp_n X$ is an $\aleph_0$-space.

Corollary 1. Hausdorff space X is a paracompact $\aleph$-space if and only if $\exp_n X$ is paracompact $\aleph$-space.

REFERENCES

1. Fedorchuk V.V. Covariant functors in the category of compacta absolute retracts and Q manifolds. // UMN, Vol. 3 Issue 36, 177–195 (1981).
2. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. // Basic constructions. Moscow: Fizmatlit. 314 (2006).
3. Engelking R.General topology. // Revised and completed edition. Berlin. Helderman, 752 (1986).
4. Gruenhage G. Generalized metric spaces. // Handbook of Set Theoretic Topology, 423-502 (1983).
5. Lin F, Liu Ch. The k-spaces property of the free Abelian topological groups over non-metrizable Lasnev spaces. // Topology and its Applications, Vol. 220, 31–42 (2017).

ON τ-CONTINUITY OF FUNCTIONS

Beshimov R. B.[1], **Zhuraev R. M.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1]rbeshimov@mail.ru
[2]rmjurayev@mail.ru

It is known that a permutation group is the group of all permutations, that is one-to-one mappings $X \to X$. A permutation group of a set X is usually denoted by $S(X)$. Especially, if $X = \{1, 2, \dots, n\}$, then $S(X)$ is denoted by S_n. Let G be a subgroup of the permutation group S_n (groups of all permutations of n elements) and let X be a compact. The group G acts on the n-th power of the space X as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by $SP^n_G X$. The space $SP^n_G X$ is called G-permutation degree of the space X. In particular, if $G = S_n$ then $SP^n_G X = SP^n X$ [1].

Given a map $f : X \to Y$, we define a map $SP^n_G f : SP^n_G X \to SP^n_G Y$ by the formula:

$$SP^n_G f([(x_1, x_2, \dots, x_n)]) = [(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))]$$

Definition 1[2]. Let X and Y be topological spaces. A function $f: X \to Y$ is said to be τ-continuous if for every subspace A of X such that $|A| \leq \tau$, the restriction $f|_A$ is continuous.

Let X and Y be topological space and let f and g be continuous mappings of X to Y. We say that the mappings f and g are *homotopic* [3], if there exists a continuous mapping $F : X \times [0,1] \to Y$ such that $F(x,0) = f(x)$ and $F(x,1) = g(x)$ for each $x \in X$. In this case the mapping F is called a *homotopy* between f and g, the spaces X and Y are called *homotopy equivalent*.

Operation SP^n preserves τ-continuity of the mappings, i.e. the following holds.

Theorem 1. If $f : X \to Y$ is a τ-continuous mapping, then the mapping

$$SP^n f : SP^n X \to SP^n Y$$

is τ-continuous.

Theorem 2. If the mappings f and g are homotopic, then $SP^n f$ and $SP^n g$ are homotopic.

Corollary. If X and Y are homotopy equivalent, then $SP^n X$ and $SP^n Y$ are homotopy equivalent.

Conclusion. The above results are valid for any functor SP^n_G.

REFERENCES

1. Fedorchuk V.V. Covariant functors in the category of compacta absolute retracts and Q manifolds //UMN. 1981. Vol.3, Issue 36. pp. 177–195.
2. Arhangelskii A.V. Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings //Comment. Math. Univ. Carol. 1983. Vol.24, №1. pp. 105–119.
3. Engelking R., General topology. Revised and completed edition. Berlin: Helderman, 1986, 752 p.

AYRIM PARADOKSAL JUMLALARNI YORDAMCHI XOSSALARNI QO‘LLAB ISBOTLASH.

Eshqobilova D. T.
Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston
dilrabotermez@mail.ru

Ma’lumki, bo‘sh bo‘lmagan har qanday Ω to‘plamning qandaydir to‘plam ostilaridan tuzilgan bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy α oila uchun $\cap\alpha \subset \cup\alpha$ bo‘ladi. Bu yerda α oilaga qo‘yilayotgan bo‘sh bo‘lmaslik talabi muhim hisoblanadi. Agarda berilgan Ω to‘plamning bironta ham qism to‘plamini saqlamaydigan $\emptyset$ bo‘sh oilani qarasak, boshqa barcha oilalar uchun bajariladigan $\cap\alpha \subset \cup\alpha$ munosabat o‘rniga $\cap\emptyset \supset \cup\emptyset$ munosabat bajarilar ekan (quyidagi Teoremaning (1) va (2) xossalaridan kelib chiqadigan bu noodatiy holat – paradoks deb baholanishi mumkin). Ushbu maqolada biz aynan shu paradoksning isbotini yordamchi xossalardan foydalanib bayon etamiz.

Bo‘sh bo‘lmagan Z to‘plam berilgan bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:
$P(Z)$ — Z to’plamning barcha to‘plamostilari oilasi,
α va β — Z to’plamning qandaydir qismlaridan tuzilgan oilalar,
$\emptyset$ — bo‘sh oila (Z ning birorta qismini saqlamaydigan oila). Bu yerda bo’sh oila $\emptyset$ va bo’sh to’plam $\varnothing$ ni bir-biridan farqlash talab etiladi.

Teorema. $\emptyset$ va $P(Z)$ oilalar quyidagi xossalarga ega:
(1) $\cap\emptyset = Z$.
(2) $\cup\emptyset = \varnothing$.
(3) $\cap P(Z) = \varnothing$.
(4) $\cup P(Z) = Z$.

Teoremaning isbotini keltirishdan avval quyidagi jumlada bayon etiladigan yordamchi xossalarni qaraylik.

Lemma. Agar $\alpha \subset P(Z), \beta \subset P(Z)$ bo'lib, $\alpha \subset \beta$ bo'lsa, u holda
(yox1) $\cap\alpha \supset \cap\beta$;
(yox2) $\cup\alpha \subset \cup\beta$
bo'ladi.

Isbot. Z berilgan to‘plam va uning qismlaridan tashkil topgan α va β oilalar mos ravishda $\alpha = \{A_s \subset Z : s \in S_1\}$, $\beta = \{A_s \subset Z : s \in S_2\}$ bo'lsin.

Ravshanki, agar $S_1 \subset S_2$ bo'lsa, $\alpha \subset \beta$ bo'ladi. Masalan: $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ deb qarasak, $S_1 \subset S_2$ bo'lib, α va β oilalar mos ravishda $\alpha = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kabi bo'ladi. Bu yerda $\alpha \subset \beta$ ekanligini ko‘rish qiyin emas.

α oilaning kesishmasimasi deganda

$$\cap\alpha = \bigcap_{s\in S_1} A_s = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

va β oila kesishmasimasi deganda esa

$$\cap\beta = \bigcap_{s\in S_2} A_s = A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

kesishmalar tushuniladi. Bu misolda $\cap\alpha \supset \cap\beta$ o'rinli ekanligi ko‘rinib turibdi. Umumiy holdagi isbot quyidagidan iborat:

$$\forall x \in \cap\beta \Rightarrow \forall s \in S_2,\ x \in A_s \overset{S_1\subset S_2}{\Longrightarrow} \forall s \in S_1, x \in A_s \Rightarrow x \in \underset{s\in S_1}{\cap} A_s = \cap\alpha.$$

Endi (yox2) $\cup\alpha \subset \cup\beta$ o'rinli ekanini ko'rsatamiz.

$$\forall x \in \cup\alpha \Rightarrow \exists s \in S_1, x \in A_s \overset{S_1\subset S_2}{\Longrightarrow} s \in S_2 \Rightarrow x \in \underset{s\in S_2}{\cup} A_s = \cup\beta \Rightarrow \cup\alpha \subset \cup\beta.$$

Lemma isbot bo'ldi.

Yuqoridagi yordamchi xossalarni qo'llab teoramani isbotlaymiz.

Isbot. (1) $\cap\emptyset = Z$ ekanini ko'rsatamiz. $\forall\beta$ oila uchun $\emptyset \subset \beta$, (yox1)ga ko'ra $\cap\emptyset \supset \cap\beta$. $\cap\emptyset$ to'plam ko'pi bilan qaysi to'plamni o'zida saqlaydi? Jumladan, β — oila sifatida $\beta = \{Z\}$ ni olsak, $\emptyset \subset \{Z\}$ bo'ladi. (yox1)ga ko'ra $\cap\emptyset \supset \cap\beta = \cap\{Z\} = Z$, ya'ni $\cap\emptyset \supset Z$. Bizda Z dan katta to'plam mavjud bo'lmaganligi uchun $\cap\emptyset = Z$ bo'ladi.

(2) $\cup\emptyset = \varnothing$ ni o'rinli ekanini ko'rsatamiz. $\forall\beta$ oila uchun $\emptyset \subset \beta$ va (yox2)ga ko'ra $\cup\emptyset \subset \cup\beta$ o'rinli. $\cup\emptyset$ to'plam kamida qaysi to'plamga qism bo'ladi? Jumladan, $\beta = \{\varnothing\}$ ni qarasak, (yox2)ga ko'ra $\cup\emptyset \subset \cup\beta = \cup\{\varnothing\} = \varnothing$ o'rinli, ya'ni $\cup\emptyset \subset \varnothing$. Bizda $\varnothing$ to'plamdan kichik to'plam mavjud bo'lmaganligi uchun $\cup\emptyset = \varnothing$.

(3) $\cap P(Z) = \varnothing$ ekanini ko'rsatamiz. $\forall\alpha$ oila uchun $\alpha \subset P(Z)$ va (yox1)ga ko'ra $\cap\alpha \supset \cap P(Z)$ bo'ladi. $\cap P(Z)$ to'plam kamida qaysi to'plamga qism bo'ladi? Jumladan, α — oila deb $\alpha = \{A, Z\backslash A\}, A \subset Z$ olinsa, $\cap\alpha = A \cap (Z\backslash A) = \varnothing$ bo'ladi. (yox1)ga ko'ra $\cap P(Z) \subset \cap\alpha$ bundan

$\cap P(Z) \subset \varnothing$ ekanligi kelib chiqadi. Bizda $\varnothing$ to'plamdan kichik to'plam mavjud bo'lmaganligi uchun $\cap P(Z) = \varnothing$ bo'lib qoladi.

(4) $\cup P(Z) = Z$ ekanini ko'rsatamiz. $\forall\alpha$ oila uchun $\alpha \subset P(Z)$ va (yox2)ga ko'ra $\cup\alpha \subset \cup P(Z)$ bo'ladi. $\cup P(Z)$ to'plam ko'pi bilan qaysi to'plamni o'zida saqlaydi? Jumladan, α — oila deb $\alpha = \{A, Z\backslash A\}, A \subset Z$ olinsa, $\cup\alpha = A \cup (Z\backslash A) = Z$ bo'ladi. (yox2)ga ko'ra $\cup\alpha \subset \cup P(Z)$ bundan $Z \subset \cup P(Z)$ kelib chiqadi. Bizda Z to'plamdan katta to'plam mavjud bo'lmaganligi uchun $\cup P(Z) = Z$ bo'lib qoladi. Teorema isbot bo'ldi.

ADABIYOTLAR

1. Zaitov, A. A. "Topologiya" online to'garagidagi ma'ruza. 2021 yil.

2. Cohen, Paul. Set theory and the continuum hypothesis. – W. A. Benjamin, INC. New York 1966. – 154 pages.

PRO-SOLVABLE LIE EXTENSIONS OF GIVEN MAXIMAL PRO-NILPOTENT LIE ALGEBRA.

Fayzullayeva Sh.A.[1], Solijanova G.O.[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[1]shahlo9735@gmail.com, [2]gulhayo.solijonova@mail.ru

During analyzing of finite-dimensional solvable Lie algebras with given nilradical [4] we can take a question such that the structure of finite-dimensional solvable Lie algebras can be appropriate for an infinite-dimensional case. In order to answer this question, extensions of some pro-nilpotent Lie algebra to pro-solvable Lie algebras with less than maximal dimension are studied. Let L be an infinite-dimensional Leibniz algebra with countable basis. For a Lie algebra L we define the lower central and the derived series respectively, as follows:

$$L^1 = L, \ L^{k+1} = [L^k, L], \quad L^{[1]} = L, \ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L], \ k \in \mathbb{N}$$

Definition 1. [2] An algebra L is called *residually nilpotent* (respectively, residually solvable), if $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (respectively, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$).

Definition 2. [2] An algebra L is called *pro-nilpotent* (respectively, pro-solvable), if $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ and $dim(L/L^i) < \infty$ (respectively, if $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$ and $dim(L/L^{[i]}) < \infty$) for any $i \geq 1$.

Let consider a pro-nilpotent Lie algebra with the following multiplication table [3]:

$$n_1 : [e_i, e_j] = \begin{cases} e_{i+j}, & \text{if} \quad i-j \equiv 1 \ mod\ 3, \\ 0, & \text{if} \quad i-j \equiv 0 \ mod\ 3, \\ -e_{i+j}, & \text{if} \quad i-j \equiv -1 \ mod\ 3, \end{cases}$$

Let $R = n_1 \oplus Q$ be a pro-solvable Lie algebra, where n_1 is the maximal pro-nilpotent ideal of R and Q be the complementary subspace to R.

Proposition 1. [1] The codimension of n_1 is not greater than 2.

In [1], the maximal pro-solvable Lie algebra with maximal pro-nilpotent ideal n_1 is obtained ($\dim Q = 2$). Here, we give pro-solvable Lie extensions of n_1 with less than maximal codimension, hence $\dim Q = 1$.

Theorem 1. The algebra $R(n_1,1)$ admits a basis $\{x, e_1, e_2, \dots\}$ such that the table of multiplications of $R(n_1,1)$ in this basis has one of the following forms:

$$R_1(n_1,1,\beta):\begin{cases}[e_{3i-2},x]=((i-1)\beta_1+i)e_{3i-2}+(i-1)\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-5},\\ [e_{3i-1},x]=(i-1+i\beta_1)e_{3i-1}+i\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-4},\\ [e_{3i},x]=i(\beta_1+1)e_{3i}+i\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-3}, \quad i\in\mathbb{N},\end{cases}$$

$$R_2(n_1,1,\beta):\begin{cases}[e_{3i-2},x]=(i-1)e_{3i-2}+(i-1)\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-5},\\ [e_{3i-1},x]=ie_{3i-1}+i\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-4},\\ [e_{3i},x]=ie_{3i}+\sum\limits_{k=2}^{t}\beta_k e_{3k+3i-3}, \quad i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdurasulov K.K., Solijanova G.O., Maximal pro-solvable Lie algebras with maximal positively graded ideals of length 3/2 // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2020, vol. 5, 25-32.
2. Millionschikov D.V., Cohomology of graded Lie algebras of maximal class with coefficients in the adjoint representation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 263 (2008)
3. Д.В.Миллионщиков, Естественно градуированные алгебры Ли медленного роста // Мат. Сб.210 (2019), вып.6, 111-160.
4. Г.М.Мубаракзянов, О разрешимых алгебрах Ли // Изв.Высш.Учебн.Завед.Мат.1963 (1963) 114-123.

LOCAL DERIVATIONS ON SOLVABLE LIE ALGEBRAS WITH A FILIFORM NILRADICAL

Kudaybergenov K. K.[1], Yuldashev I. G.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
karim2006@mail.ru;
[2]Department of Mathematics Nukus state pedagogical institute, Nukus, Uzbekistan
i.yuldashev1990@mail.ru

Let $\mathcal{A}$ be an algebra (not necessary associative). Recall that a linear mapping $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ is said to be a derivation, if $D(xy)=D(x)y+xD(y)$ for all $x,y\in\mathcal{A}$. A linear mapping Δ is said to be a local derivation, if for every $x\in\mathcal{A}$ there exists a derivation D_x on $\mathcal{A}$ (depending on x) such that $\Delta(x)=D_x(x)$. The definition of local automorphism is similar. These notions were introduced and investigated independently by R.V. Kadison [1] and D.R.Larson and A.R. Sourour [2]. The above papers gave rise to a series of works devoted to the description of mappings which are close to automorphisms and derivations of C^*-algebras and operator algebras. In [2] D.R.Larson and A.R. Sourour proved that if $\mathcal{A}=B(X)$, the algebra of all bounded linear operators on a Banach space X, then every invertible local automorphism of $\mathcal{A}$ is an automorphism. Thus automorphisms on $B(X)$ are completely determined by their local actions.

Let $\mathcal{L}$ be a Lie algebra. Consider the following central lower and derived sequences:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{L}^1=\mathcal{L}, & \mathcal{L}^{k+1}=[\mathcal{L}^k,\mathcal{L}], & k\geq 1,\\ \mathcal{L}^{[1]}=\mathcal{L}, & \mathcal{L}^{[s+1]}=[\mathcal{L}^{[s]},\mathcal{L}^{[s]}], & s\geq 1.\end{array}$$

A Lie algebra $\mathcal{L}$ is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $p\in\mathbb{N}$ such that $\mathcal{L}^p=0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[p]}=0$). The smallest integer k such that $\mathcal{L}^k=0$ is called the nilindex (or the nilpotency class) of $\mathcal{L}$.

A Lie algebra $\mathcal{L}$ is called filiform, if $\dim\mathcal{L}^k=n-k-1$ for $1\leq k\leq n-1$. Note that the filiform Lie algebras have the maximal possible nilindex, $n-1$. These algebras are the "least"nilpotent.

Let $n\geq 5$ and let $\mathcal{W}_n^+$ be a $(n+1)$-dimensional solvable Lie algebra with a basis $\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ such that

$$[e_i,e_j]=(j-i)e_{i+j},\quad 0\leq i,j\leq n,\ i+j\leq n.$$

Note that $\mathcal{W}_n=[\mathcal{W}_n^+,\mathcal{W}_n^+]=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ is the n-dimesional filiform Lie algebra which called a Witt algebra.

For $i,j\in\{0,1,\ldots,n\}$ by $\Delta_{i,j}$ denote a linear mapping on $\mathcal{W}_n^+$ defined on basis elements as follows

$$\Delta_{i,j}(e_k)=\begin{cases}e_i, & \text{if } j=k,\\ 0, & \text{if } j\neq k\end{cases}.$$

Set

$$\mathrm{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)=\mathit{span}\left\{\Delta_{i,j}:0\leq j\leq m-1,\ 2j+1\leq i\leq n\right\},$$

if $n=2m$ is even,

$$\mathrm{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)=\mathit{span}\left\{\Delta_{i,j},\Delta_{n,k}:0\leq j\leq m,\ 2j+1\leq i\leq n,\ k=m+1,\ldots,n\right\},$$

if $n=2m+1$ is odd.

Theorem 1. Any local derivation Δ on $\mathcal{W}_n^+$ is uniquely represented in the form

$$\Delta=ad(a)+\overline{\Delta},$$

where $a\in\mathrm{span}\left\{e_0,e_1,\ldots,e_{[\frac{n}{2}]-1}\right\}$ and $\overline{\Delta}\in\mathrm{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)$, $[t]$ is the integer part of the real number t. Moreover, the space $\mathrm{LocDer}(\mathcal{W}_n^+)$ equipped with a Lie bracket is a Lie algebra and $\mathrm{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)$ its ideal.

Let $n\geq 5$ and let $\mathcal{R}_n^+$ be a $(n+1)$-dimensional solvable Lie algebra with a basis $\{e_0,e_1,\ldots,e_n\}$ such that

$$\begin{array}{ll}[e_0,e_i]=ie_i, & 1\leq j\leq n,\\ [e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-1,\\ [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq n-2.\end{array}$$

Denote

$$\mathrm{PLoc}(\mathcal{R}_n^+)=\mathrm{span}\left\{\Delta_{i,j}:0\leq j\leq 2,\ 2j+1\leq i\leq n\right\}.$$

Theorem 2. Any local derivation Δ on $\mathcal{R}_n^+$ is uniquely represented in the form

$$\Delta=ad(a)+\overline{\Delta},$$

where $a\in\mathrm{span}\left\{e_0,e_1,e_2\right\}$ and $\overline{\Delta}\in\mathrm{PLoc}(\mathcal{R}_n^+)$. Moreover, the space $\mathrm{LocDer}(\mathcal{R}_n^+)$ equipped with a Lie bracket is a Lie algebra and $\mathrm{PLoc}(\mathcal{R}_n^+)$ its ideal.

REFERENCES

1. R.V. Kadison, *Local derivations,* J. Algebra, **130** (1990) 494-509.
2. D. R. Larson, A. R. Sourour, *Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,* Proc. Sympos. Pure Math. **51** (1990) 187-194.

LOCAL DERIVATION ON SOME SOLVABLE LIE ALGEBRAS

Mamadaliyev U.Kh.[1], To'rajanov A. O.[2]

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

[1]mamadaliyevuktamjon@mail.ru

[2]toraazimjon79@gmail.com

The notions of local derivations were introduced in 1990 by R.V.Kadison [3] and D.R.Larson, A.R.Sourour [4]. Later in 1997, P.Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras [2]. The main problems concerning these notions are to find conditions under which all local (2-local) derivations become (global)derivations and to present examples of algebras with local (2-local) derivations that are not derivations.

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in papers in [1]. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. In this work we investigate local derivations of some solvable Lie algebras.

Definition 1. An algebra L over a field $\mathbb{K}$ is called a Lie algebra if its multiplication (denoted by $(x, y) \mapsto [x, y]$) satisfies the identities:

(1) $[x, x] = 0$,

(2) $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$,

for all $x, y, z \in L$. Identity (2) is called the Jacobi identity.

Definition 2. A linear map $d\colon L \to L$ of a Leibniz algebra $(L, [\cdot, \cdot])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in L$, the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

The set of all derivations of L is denoted by $Der(L)$, which is a Lie algebra with respect to the commutator.

For a given element x of a Leibniz algebra L, the right multiplication operator $\mathcal{R}_x\colon L \to L$, defined by $\mathcal{R}_x(y) = [y, x], y \in L$ is a derivation. In fact, Leibniz algebras are characterized by this property regarding right multiplication operators. As in the Lie case, these kinds of derivations are said to be inner derivations.

Definition 3. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$.

For a given Leibniz algebra L *the lower central* and *derived series* defined as follows:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1,$$

respectively.

Definition 4. A Leibniz algebra L is said to be *nilpotent* (respectively, *solvable*), if there exists $k \in \mathbb{N}$ ($s \in \mathbb{N}$) such that $L^k = \{0\}$ (respectively, $L^{[s]} = \{0\}$). The minimal number k with such property is said to be the *index of nilpotency* of the algebra L.

Definition 5. An n-dimensional Leibniz algebra is called *quasi-filiform* if its index of nilpotency is equal to $n-1$.

A Leibniz algebra L is $\mathbb{Z}$-graded, if $L = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$, where $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ for any $i, j \in \mathbb{Z}$ with a finite number of non-null spaces V_i.

We say that a nilpotent Leibniz algebra L admits *the connected gradation* $L = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$, if $V_{k_i} \neq \{0\}$ for any i $(1 \leq i \leq t)$.

Definition 6. The number $l(\oplus L) = l(V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t}) = k_t - k_1 + 1$ is called *the length of gradation.* A gradation is called *of maximum length*, if $l(\oplus L) = \dim(L)$.

We denote by $l(L) = \max\{l(\oplus L)$ such that $L = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$ is a connected gradation$\}$ *the length of an algebra L.*

Definition 7. A Leibniz algebra L is called of maximum length if $l(L) = \dim(L)$.

Theorem 1.[5] Any element of $R(g^i_{(n,1)}, 2),\ i = 1, 2$ is isomorphic to one of the following Lie algebras:

$$R(g^1_{(n,1)}, 2): \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_i, e_{n-i}] = (-1)^i e_n, & 2 \ \leq i \leq \frac{n-1}{2},\ n \geq 5 \ \ \textit{and} \ \ n \textit{ is odd}; \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = e_1, & \\ [e_i, x] = -[x, e_i] = (i-2)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = -[x, e_n] = (n-4)e_n, & \\ [e_i, y] = -[y, e_i] = e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, y] = -[y, e_n] = 2e_n, & \end{cases}$$

$$R(g^2_{(n,1)}, 2): \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_i, e_n] = e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3,\ n \geq 5; \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = e_1, & \\ [e_i, x] = -[x, e_i] = (i-2)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = -[x, e_n] = 2e_n, & \\ [e_i, y] = -[y, e_i] = e_i, & 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Now we shall give the main result concerning local derivations of solvable Lie algebra $R(g^i_{(n,1)}, 2),\ i = 1, 2.$

Theorem 2. Any local derivation on the algebra $R(g^i_{(n,1)}, 2),\ i = 1, 2$ is a derivation.

REFERENCES

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivation on finite dimensional Lie algebras, // Linear Algebra and its Applications. **493**, 381-398 (2016).

2. Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$, // Proceedings of the American Mathematical Society. **125**, 2677–2680 (1997).

3. Kadison R.V., Local derivations, // Journal of Algebra. Vol. **130**, p. 494–509 (1990).

4. Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,// Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **51** Part 2, Provodence, Rhode Island, p. 187–194 (1990).

5. Muratova Kh. A., Ladra M., Omirov B. A., Sattarov A. M., Solvable Leibniz algebras with quasi-filiform Lie algebras of maximum length nilradicals,// Communications in Algebra, **48**, pp. 3525–3542 (2020).

PARAMETRGA BOG‘LIQ BO‘LGAN CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI YECHIMLAR TO‘PLAMINING PARAMETRNING BARCHA QIYMATLARIDA BO’SH YOKI BO‘SH EMASLIGINI ANIQLASH MASALASI HAQIDA

Mamatov A.R., Zaripova N.R.

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston,
akmm1964@rambler.ru

$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\}$ va $Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, \quad Ax + By = b\}$ to’plamlar berilgan bo’lsin.

Bu yerda $x = x(J), \quad f_* = f_*(J), \quad f^* = f^*(J) - n$ - vektor, $y = y(K), g_* = g_*(K), g^* = g^*(K) - l$ - vektor, $b = b(I) - m$ - vektor, $A = A(I, J), B = B(I, K)$ - mos ravishda $m \times n$ va $m \times l$ matritsalar;$rankB = m < l, I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}, K = \{1, 2, ..., l\}$.

$\forall x \in X$ uchun unga mos keluvchi $Y(x)$ to’plamning bo’sh yoki bo’sh emasligini aniqlash masalasi qaraladi.

Masala chziqli programmalash masalasidagi tayanch tushunchasi [1] hamda maxsus shakllantirilgan chiziqli programmalash masalalari yechimlari orqali yechiladi.

Qaralayotgan masalada

$$f_*{}' = (-6; -8), f^{*\prime} = (2; 2),$$

$$g_*{}' = (0; 0; 0; 0; 0), g^{*\prime} = (6; 6; 100; 100; 100),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b' = (4; 10; 2)$$

bo‘lganda $\forall x \in X$ uchun unga mos keluvchi $Y(x)$ to’plamning bo‘sh emasligi qaralayotgan chiziqli programmalash masalalarini qurish va yechimlarini aniqlash orqali bayon etiladi.

АДАБИЁТЛАР

1. Gabasov R., Kirillova F.M. Konstruktivniye metodi optimizasii.Ch.1. Lineyniye zadachi. Minsk: Universitetskoye, 1984.

A NOTE ON LOCALLY WEAKLY SEPARABLE SPACES

Mamatov J. Kh

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: johansson_world@mail.ru

A family ν of nonempty open subsets of a topological space X is called a π-base if, for any open subset U of the space X, there is an element of the family ν lying in the set U. [1]

In [2], the concept of a weak density of a topological space was introduced. The weak density of a topological space X is the smallest cardinal number $\tau \geq \aleph_0$ such that there is a π-base in X that splits into τ centered systems of open sets. In other words, there is a π-base $B = \cup \{ \mathrm{B}_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, where B_α is a centered system of open sets for each $\alpha \in$ A and $\mid \mathrm{A} \mid = \tau$. The weak density of a topological space X is denoted by $wd(X)$. If $wd(X) = \aleph_0$, then the topological space X is called weakly separable.

A topological space X is called locally weakly separable [3] at a point $x \in X$ if x has a weak separable neighborhood in X. A topological space X is called locally weakly separable if it is locally weakly separable at each point $x\in X$.

A set is called canonically closed if it is the closure of its interior [1]. Let a family $\{X_s\}_{s\epsilon S}$ of pairwise disjoint topological spaces be given, that is, $X_s\cap X_{s'}=\emptyset$ for s = s'. Consider the set $X = \bigcup_{s\epsilon S} X_s$ and the family τ of all sets $U\subset X$ such that $U\cap Xs$ is open in X_s for every $s\epsilon S$. It is easy to see that the family τ satisfies the conditions of the topology and therefore defines a certain topology on the set X. The set X with this topology is called the sum of the spaces $\{X_s\}_{s\epsilon S}$ and is denoted

$\oplus_{s\epsilon S} X_s$ or $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$ if $S = \{1,2,\ldots, k\}$. [1].

Theorem 1. *Let X_α be a locally weakly separable space for every $\alpha\in A$. Then $X = \oplus \{X_\alpha: \alpha\in A\}$ is also locally weakly separable.*

Proof. Let $x\in X$ be an arbitrary point. Then there is such $\alpha\in A$ such that $x_\alpha\in X_\alpha$. Since the space X_α is locally weakly separable, there exists a neighborhood $Ox_\alpha \subset X_\alpha$ of the point x_α, where Ox_α is weakly separable. Since the space X_α is open-closed in X, then Ox_α is open and weakly separable in X. Theorem 1 is proved.

Theorem 2. *Let $X_i\subset X$, $i = 1,2,\ldots, n$, and each X_i is locally weakly separable. Then $\bigcap_{i=1}^{n} Xi$ is also locally weakly separable.*

Proof. Let $x\in \bigcap_{i=1}^{n} Xi$ be an arbitrary point. Then $x\in X_i$, $I = 1, 2, \ldots, n$. Since the space X_i is locally weakly separable, there exists a neighborhood $O_x^i\subset Xi$ such that O_x^i such that it is weakly separable for each $i = 1,2,\ldots, n$. We put $\bigcap_{i=1}^{n} O_x^i = O_x$. Then O_x is an open set in O_x^i, $i = 1,2,\ldots, n$, and by virtue of Proposition 1 from [2] we obtain that is weakly separable in $\bigcap_{i=1}^{n} Xi$. Theorem 2 is proved.

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S., Fedorchuk V.V., Zaytsev V.I. The main aspects in the development of set-theoretical topology, 1978 *Russian Mathematical Surveys*. 33: pp. 1–53..

2. Beshimov R.B. O slaboy plotnosti topologicheskikh prostranstv [On weak density of topological spaces].2000 *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*. 11. pp. 10–13.

3. Engelking R. (1989) *General Topology*. Berlin: Heldermann.

CALABI-YAU PROPERTY OF NONCOMMUTATIVE PROJECTIVE THREE-SPACES AND YANG-BAXTER EQUATION

Mizomov I.E

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
mizomovinomjon@mail.ru

We give a new characterization of Koszul Calabi-Yau algebras. To this end we use results of Beidar, Fong and Stolin on description of symmetric Frobenius algebras by means of solutions of quantum Yang-Baxter equation

$$Q^{12} \circ Q^{13} \circ Q^{23} = Q^{23} \circ Q^{13} \circ Q^{12} \tag{1}$$

We apply this characterization to give another proof of the Calabi-Yau property for noncommutative projective three-spaces.

Let $A := k_{q_i}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ be the skew polynomial ring generated by x_0, x_1, x_2, x_3 subject to the relations

$$x_i x_{i+1} = \left(\frac{q_{i+3}}{q_{i+2}}\right)^{(-1)^i} x_{i+1} x_i,$$
$$x_i x_{i+2} = \left(\frac{q_{i+1}}{q_{i+3}}\right)^{(-1)^i} x_{i+2} x_i$$

where $q_0, ..., q_3 \in \mathbb{C}^*$ satisfy $\prod_{i=0}^{3} q_i = 1$, and again the indices are taken modulo four. The monomials of the form $x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ clearly form a basis for A, and hence A has the same Hilbert series as the polynomial ring.

The algebra A is Koszul and its Koszul dual agebra $A^!$ is generated by $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ with the following relations

$$\xi_0^2 = \xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2 = 0$$
$$\xi_1\xi_0 + \frac{q_3}{q_2}\xi_0\xi_1 = \xi_2\xi_0 + \frac{q_1}{q_3}\xi_0\xi_2 = \xi_3\xi_0 + \frac{q_2}{q_1}\xi_0\xi_3 = 0$$
$$\xi_2\xi_1 + \frac{q_3}{q_0}\xi_1\xi_2 = \xi_3\xi_1 + \frac{q_0}{q_2}\xi_1\xi_3 = \xi_3\xi_2 + \frac{q_1}{q_0}\xi_2\xi_3 = 0$$

From these relations, we obtain $A^!$ is isomorphic to a graded algebra spanned by

$$1\,,\ \xi_0\,,\ \xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3\,,\ \xi_0\xi_1\,,\ \xi_0\xi_2\,,\ \xi_0\xi_3\,,\xi_1\xi_2\,,\ \xi_1\xi_3\,,\ \xi_2\xi_3\,,\ \xi_0\xi_1\xi_2\,,\ \xi_0\xi_1\xi_3\,,\ \xi_0\xi_2\xi_3\,,\ \xi_1\xi_2\xi_3\,,\ \xi_0\xi_1\xi_2\xi_3.$$

Theorem 1. *The skew polynomial ring is a Koszul Calabi-Yau algebra with*

$$Q = 1\otimes\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_0\otimes\xi_1\xi_2\xi_3 + \frac{q_2}{q_3}\xi_1\otimes\xi_0\xi_2\xi_3 - \frac{q_0}{q_1}\xi_2\otimes\xi_0\xi_1\xi_3 + \xi_3\otimes\xi_0\xi_1\xi_2$$
$$+\xi_0\xi_1\otimes\xi_2\xi_3 - \frac{q_0}{q_3}\xi_0\xi_2\otimes\xi_1\xi_3 + \frac{q_2}{q_1}\xi_0\xi_3\otimes\xi_1\xi_2 + \frac{q_2}{q_1}\xi_1\xi_2\otimes\xi_0\xi_3 - \frac{q_0}{q_3}\xi_1\xi_3\otimes\xi_0\xi_2 + \xi_2\xi_3\otimes\xi_0\xi_1$$
$$-\xi_0\xi_1\xi_2\otimes\xi_3 + \frac{q_0}{q_1}\xi_0\xi_1\xi_3\otimes\xi_2 - \frac{q_2}{q_3}\xi_0\xi_2\xi_3\otimes\xi_1 + \xi_1\xi_2\xi_3\otimes\xi_0 + \xi_0\xi_1\xi_2\xi_3\otimes 1.$$

a solution of the quantum Yang-Baxter equation.

Now we consider the following algebra generated by x_0, x_1, x_2, x_3 subject to the following relations

$$x_1x_0 = x_0x_1\,,\ x_2x_0 = p_0^{-1}x_0x_2\,,\ x_3x_0 = p_0x_0x_3$$
$$x_2x_1 = p_1x_1x_2\,,\ x_3x_1 = p_1^{-1}x_1x_3\,,\ x_3x_2 = p_0^{-1}p_1x_2x_3 + F\,,$$

where F a quadratic polynomial in x_0 and x_1. These relations are readily seen to be of the form described by Cassidy, Goetz and Shelton in [2, Theorem 1.1]. In particular, they have defined Koszul, Artin-Schelter regular algebra with the Hilbert series $(1-t)^{-4}$. A computer calculation shows that this algebra will be Calabi-Yau exactly when

$$F = (p_1 - p_0)(x_0^2 + \lambda x_0x_1 + x_1^2) + (1 - p_0^2)x_0^2 + (p_1^2 - 1)x_1^2$$

for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

Its Koszul dual algebra $A^!$ is generated by $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ with the following relations

$$\eta_0^2 + (p_1 - p_0 + 1 - p_0^2)\eta_3\eta_2 = \eta_1^2 + (p_1 - p_0 + p_1^2 - 1)\eta_3\eta_2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = 0,$$
$$\eta_1\eta_0 + \eta_0\eta_1 + \lambda(p_1 - p_0)\eta_3\eta_2 = \eta_2\eta_0 + p_0\eta_0\eta_2 = \eta_3\eta_0 + p_0^{-1}\eta_0\eta_3 = 0$$
$$\eta_2\eta_1 + p_1^{-1}\eta_1\eta_2 = \eta_3\eta_1 + p_1\eta_1\eta_3 = p_1\eta_3\eta_2 + p_0\eta_1\eta_2 = 0.$$

From these relations, we obtain $A^!$ is isomorphic to a graded algebra spanned by

$1, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_0\eta_1, \eta_0\eta_2, \eta_0\eta_3, \eta_1\eta_2, \eta_1\eta_3, \eta_2\eta_3, \eta_0\eta_1\eta_2, \eta_0\eta_1\eta_3, \eta_0\eta_2\eta_3, \eta_1\eta_2\eta_3, \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3.$

Theorem 2. *The algebra is a Koszul Calabi-Yau algebra with*

$$Q = 1 \otimes \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 - \eta_0 \otimes \eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_1 \otimes \eta_0\eta_2\eta_3 - \frac{p_1}{p_0}\eta_2 \otimes \eta_0\eta_1\eta_3 + \eta_3 \otimes \eta_0\eta_1\eta_2$$
$$+\eta_0\eta_1 \otimes \eta_2\eta_3 - p_1\eta_0\eta_2 \otimes \eta_1\eta_3 + \frac{1}{p_0}\eta_0\eta_3 \otimes \eta_1\eta_2 + \frac{1}{p_0}\eta_1\eta_2 \otimes \eta_0\eta_3 - p_1\eta_1\eta_3 \otimes \eta_0\eta_2 + \eta_2\eta_3 \otimes \eta_0\eta_1$$
$$- \eta_0\eta_1\eta_2 \otimes \eta_3 + \frac{p_1}{p_0}\eta_0\eta_1\eta_3 \otimes \eta_2 - \eta_0\eta_2\eta_3 \otimes \eta_1 + \eta_1\eta_2\eta_3 \otimes \eta_0 + \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 \otimes 1.$$

a solution of the quantum Yang-Baxter equation.

REFERENCES

1. K.I. Beidar, Y. Fong, and A. Stolin, *On Frobenius algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Trans. Am. Math. Soc. 349(9) (1997) 3823-3836.
2.T. Cassidy, P. Goetz, and B. Shelton, *Generalized Laurent polynomial rings as quantum projective 3-spaces*, J. Algebra 303 (2006), no. 1, 358Ц372.
3. M. Reyes, D. Rogalski, and J. J. Zhang, *Skew Calabi-Yau Algebras and Homological Identities*, 1302.0437.
4. E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Representations of a quantum algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983), no. 4, 34-48.

MUHAMMAD IBN MUSO AL-XORAZMIYNING ALGEBRASIDAGI "KASALLIKDA UYLANISH HAQIDAGI BOB"I XUSUSIDA

Narmuratov N. K.[1]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail1:narkulnarmuratov@mail.ru;

Shariat va islom huquqshunosligi meros taqsimlashda "ham farz, ham qarz"masalasini qonuniylasht uringan bo'lsa ham, aslida, hayotda kvadrat tenglamalarni yechish bilan bog'liq bo'lgan ancha murakkab masalalar yuzaga kelar edi. Bunday hollarda masalani hal qilish qozilarning qo'lidan kelmay, ular ilm mutaxassislariga, xususan, matematiklarga murojaat qilishga majbur bo'lardilar. Xorazmiy algebrasi, ayniqsa, uning "vasiyatlar kitobi"qismi, shunday masalalarni hal qilishga mo'ljalangan birinchi qo'llanma desak bo'ladi. Keyinchalik islom mamlakatlarida vasiyat va meros masalalari "ilmi faroiz"nomi bilan ataluvchi alohida fan sifatida shakllandi. Bu fanga oid "Hulosatul hisob"nomli yirik asarnni XVI asrda yashagan suriyalik matematik Bahouddin al-Omiliy yozgan.

Ushbu maqolamizda Xorazmiy algebrasi ("Al-kitov al-muhtasar fi hisob al-jabr val-muqobala- "Aljabr almuqobala hisobi hakida qisqacha kitob"[2].)ning kasallikda uylanish haqidagi bob"i va uning fan tarixidagi o'rni xususida to'xtalmoqchimiz.

Islom dinida vorislik huquqi shariatga ko'ra belgilangan bo'lib, unga Qur'oni sharifdagi "Niso"surasining 11-, 12- va 176- oyatlarini asos qilib olingan [1]. Bu oyatlarning mazmuniga ko'ra, qonuniy vorislar va ularga tegadigan ulushlar quidagicha bo'ladi:
1. Voris - farzand. O'g'ilning ulushi qizning ulushidan ikki baravar ko'p bo'ladi.
2. Voris - er. Agar vafot etgan ayolning farzandlari bo'lmasa, u holda unga merosning yarmi,

agar farzandlari bo'lsa, u holda merosning to'rtdan biri tegadi.
3. Voris - xotin. Agar vafot etgan erkakning farzandlari bo'lmasa, u holda unga merosning to'rtdan biri, agar farzandlari bo'lsa, u holda unga merosning sakkizdan biri tegadi. Agar vorisning xotinlari ikki va undan ortiq bo'lsalar, ular merosning uchdan ikkisiga teng sherik bo'ladilar.
4. Voris - ota-ona. Agar vafot etgan erkak yoki ayolning farzandlari bo'lmasa, u holda merosning uchdan biri onasiga, qolgani otasiga tegadi. Agar vafot etganning aka yoki uka va opa yoki singillari bo'lsa, u holda merosning oltidan biri onasiga, qolgani otasiga tegadi. Agar vafot etganning farzandlari bo'lsa, u holda ularning har biriga merosning oltidan biri tegadi.
5. Voris - aka-uka va opa-singil. Agar vafot etgan erkak va ayolning ota-onasi bo'lmasa, u holda ular meros taqsimlashda voris sifatida ishtirok etadi. Agar vafot etganning farzandlari bo'lib, voris bitta bo'lsa, u holda unga merosning oltidan biri tegadi. Agar vorislar bittadan ortiq bo'lsalar, u holda ular merosning uchdan biriga teng sherik bo'ladilar. Agar farzandsiz yolg'iz erkak (ayol) vafot etgan bo'lsa, opa yoki singil (aka yoki uka) merosning yarmini (hammasini) oladi. Agar opa-singillar soni ikkitadan ortiq bo'lsa, u holda ularga akasi yoki ukasining merosini uchdan ikkisi tegadi. Agar vorislar aka yoki uka va opa yoki singil bo'lsa, u holda ularga meros taqsimlash erkakning ulushi ayolning ulushidan ikki baravar ko'p bo'lishlikka asoslanadi.

Izoh: Vorislarga yuqorida aytilgan barcha ulushlar vafot etganning vasiyat va qarzlari ado etilgandan so'ng taqsimlanadi. Bundan tashqari, vorislik huquqiga vafot etgan kishining vasiyatnomasida qayd qilingan kishilar ham ega bo'lishi mumkin. Bunday vorislarga vasiyat bo'yicha voris deyiladi. Shariat huquqiga ko'ra, vasiyat bo'yicha vorislarga merosning uchdan birigacha ulushni vasiyat etish durust bo'ladi. Qonuniy vorislarga tegadigan merosni zaruriy yoki kerakli meros deyiladi.

Xorazmiy masalasi: Bir kishi o'ladigan kasal bo'la turib, bir ayolga yuz dirhamga uylandi va uning bundan bo'lak moli yo'q edi, ayolning o'zi baravar mahri o'n dirham edi.So'ngra ayol o'ldi, u molining uchdan birini vasiyat qilgan edi. Keyin eri o'ldi.

Ayol vasiyat qilayotgan narsani x desak, mahri bilan birga $10+x$,bo'ladi, erining qaramog'idagi pul esa $100-(10+x)=90-x$ bo'ladi. Ayol o'z molining uchdan birini vasiyat qilishi mumkin, bu $\frac{1}{3}\cdot(10+x)$ bo'ladi. Eriga undan qolganining yarmi, ya'ni $\frac{1}{3}\cdot(10+x)$ tegadi, qolganining ikkinchi yarmini ayolning vorislari oladi. Shuning uchun erining vorislariga $90-x+\frac{1}{3}\cdot(10+x)$ tegadi. Boshqa jihatdan, xotin eridan qolganning faqat uchdan biriga egalik qilishi mumkin bo'lgani uchun erining vorislariga $2x$ tegadi. Shuning uchun $90-x+\frac{1}{3}\cdot(10+x)=2x$, ya'ni $x=35$ bo'ladi [2],[3].

Xorazmiy algebrasida yana shunday masalalardan 3 tasini keltirilgan.

Xorazmiy ko'rayotgan bu turdagi masalalarda "davr taqozasi" yoki "peshonadagiga" ko'ra masalada ishtirok etuvchi shaxslarning o'rni almashinib qolishi mumkin, ya'ni vasiyat qilayotgan kishi kutilmagan sharoitga unga vasiyat qilinayotgan kishining o'rnida bo'lib qolishi mumkin. Masalan, o'ladigan kasal - vasiyat qiluvchi kishi o'lmay, to'satdan unga vasiyat qilinayotgan kishi o'lib qolishi masala shartlarining o'zgarilishini talab qilgan. Yevropada bu turdagi masalalar "dov bo'linishi"haqidagi masalalarga olib kelgan bo'lib, bu masalalar ehtimollar nazariyasining yuzaga kelishida muhim rol o'ynagan [4].

ADABIYOTLAR

1. Qur'on. Tarjima va izohlar A.Mansurniki. Toshkent: "Cho'lpon 1990.
2. Muxammad Muso-al-Xorazmiy. Al-Kitab al-muxtasar fi-hisab al -jabr val-muqabala. Qo'lyozma. № Hunt 214, bb-34(arab tilida, foto nusxa)

3. Muhammad Muso al-Xorazmiy. Tanlangan asarlar, "Fan Toshkent:1983. Tarjimon A.Ahmedov
4. Maystrov L. Ye. Rol azartных igr v vozniknovenii teorii veroyatnostey, Acta Universitatis Debreceniensis. T,VII/2, 1961, pp. 3-24

TRACE IDENTITIES IN THE COORDINATE RING OF THE CALOGERO-MOSER SPACE $\mathcal{C}_4$

Normatov Z.
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
University 4b, Tashkent 100174, Uzbekistan.
e-mail z.normatov@mathinst.uz

Let $M_n := M_n(\mathbb{C})$ be the space of all $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$. The ***Calogero-Moser spaces*** $\mathcal{C}_n$ are algebraic varieties parametrizing the conjugacy classes of pairs of $n \times n$ matrices (X, Y) such that $[X, Y] + I_n$ has rank 1 , i.e.,

$$\mathcal{C}_n := \{(X, Y) \in M_n \times M_n \mid \operatorname{rank}([X, Y] + I_n) = 1\}//\mathrm{GL}_n,$$

where I_n is the identity $n \times n$ matrix.

Named after a class of integrable systems in classical mechanics, these varieties play an important role in several areas, especially in geometry and representation theory. It is known that $\mathcal{C}_n$ is a smooth irreducible affine algebraic variety of dimension $2n$ [2]. It is also rational and carries a symplectic structure [1].

We find some relations between the generators of the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$.

The minimal generating set of the coordinate ring of Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$ is given in [3]. We make the following notations for generators:

$$\begin{aligned}
&a_1 = \mathrm{Tr}(X),\ a_2 = \mathrm{Tr}(Y),\ a_3 = \mathrm{Tr}(A^2),\ a_4 = \mathrm{Tr}(AB),\ a_5 = \mathrm{Tr}(B^2),\\
&a_6 = \mathrm{Tr}(A^3),\ a_7 = \mathrm{Tr}(A^2B),\ a_8 = \mathrm{Tr}(AB^2),\ a_9 = \mathrm{Tr}(B^3),\\
&a_{10} = \mathrm{Tr}(A^4),\ a_{11} = \mathrm{Tr}(A^3B),\ a_{12} = \mathrm{Tr}(A^2B^2),\ a_{13} = \mathrm{Tr}(AB^3),\ a_{14} = \mathrm{Tr}(B^4),
\end{aligned}$$

where $A = X - \frac{1}{4}a_1 I_4,\ B = Y - \frac{1}{4}a_2 I_4$

Theorem Let $(X,Y)\in\mathcal{C}_4$. Then the following identities hold

$$
\begin{aligned}
0 &= -a_3^2a_5 + a_3a_4^2 + 2a_3a_{12} - 4a_4a_{11} + 2a_5a_{10} + 2a_6a_8 - 2a_7^2 + 8a_3,\\
0 &= -a_3a_4a_5 + a_4^3 + 2a_3a_{13} - 4a_4a_{12} + 2a_5a_{11} + a_6a_9 - a_7a_8 - 4a_4,\\
0 &= -a_3a_5^2 + a_4^2a_5 + 2a_3a_{14} - 4a_4a_{13} + 2a_5a_{12} + 2a_7a_9 - 2a_8^2 + 8a_5,\\
0 &= -3a_3^2a_8 + 6a_3a_4a_7 + a_3a_5a_6 - 4a_4^2a_6 + 12a_6a_{12} - 24a_7a_{11} + 12a_8a_{10} + 48a_6,\\
0 &= a_3a_5a_9 - 4a_4^2a_9 + 6a_4a_5a_8 - 3a_5^2a_7 + 12a_7a_{14} - 24a_8a_{13} + 12a_9a_{12} + 48a_9,\\
0 &= -a_3^2a_9 + 3a_3a_5a_7 - 2a_4a_5a_6 + 8a_6a_{13} - 12a_7a_{12} + 4a_9a_{10},\\
0 &= -2a_3a_4a_9 + 3a_3a_5a_8 - a_5^2a_6 + 4a_6a_{14} - 12a_8a_{12} + 8a_9a_{11},\\
0 &= 3a_3^3a_5 - 3a_3^2a_4^2 - 12a_3^2a_{12} + 24a_3a_4a_{11} - 6a_3a_5a_{10} + 2a_3a_6a_8 - 6a_4^2a_{10}\\
&\quad - 4a_4a_6a_7 + 2a_5a_6^2 - 6a_3^2 + 24a_{10}a_{12} - 24a_{11}^2 + 24a_{10},\\
0 &= 3a_3a_5^3 - 3a_4^2a_5^2 - 6a_3a_5a_{14} + 2a_3a_9^2 - 6a_4^2a_{14} + 24a_4a_5a_{13} - 4a_4a_8a_9\\
&\quad - 12a_5^2a_{12} + 2a_5a_7a_9 - 6a_5^2 + 24a_{12}a_{14} - 24a_{13}^2 + 24a_{14},\\
0 &= 4a_4a_5a_6 - 3a_3a_5a_7 - 12a_4^2a_7 + 18a_3a_4a_8 - 7a_3^2a_9 + 12a_9a_{10}\\
&\quad - 24a_8a_{11} + 12a_7a_{12} + 48a_7,\\
0 &= 4a_3a_4a_9 - 3a_3a_5a_8 - 12a_4^2a_8 + 18a_4a_5a_7 - 7a_5^2a_6 + 12a_6a_{14}\\
&\quad - 24a_7a_{13} + 12a_8a_{12} + 48a_8,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 3a_3^2a_4a_5 - 3a_3a_4^3 - 3a_3^2a_{13} - 3a_3a_4a_{12} + 3a_3a_5a_{11} + 2a_3a_6a_9 + 12a_4^2a_{11}\\
&\quad - 9a_4a_5a_{10} - 4a_4a_6a_8 + 2a_5a_6a_7 + 12a_3a_4 + 12a_{10}a_{13} - 12a_{11}a_{12} - 48a_{11},\\
0 &= 3a_3a_4a_5^2 - 3a_4^3a_5 - 9a_3a_4a_{14} + 3a_3a_5a_{13} + 2a_3a_8a_9 + 12a_4^2a_{13} - 3a_4a_5a_{12}\\
&\quad - 4a_4a_7a_9 - 3a_5^2a_{11} + 2a_5a_6a_9 + 12a_4a_5 + 12a_{11}a_{14} - 12a_{12}a_{13} - 48a_{13},\\
0 &= a_3^2a_5^2 + a_3a_4^2a_5 - 2a_4^4 - a_3^2a_{14} - 6a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 2a_3a_7a_9 + 10a_4^2a_{12}\\
&\quad - 2a_4a_5a_{11} - 4a_4a_7a_8 - 3a_5^2a_{10} + 2a_5a_7^2 + 10a_3a_5 + 32a_4^2 + 4a_{10}a_{14} + 8a_{11}a_{13}\\
&\quad - 12a_{12}^2 - 72a_{12} - 96,\\
0 &= a_3^2a_{14} - 4a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 4a_4^2a_{12} - 4a_4a_5a_{11} + a_5^2a_{10} + 12a_3a_5\\
&\quad - 4a_{10}a_{14} + 16a_{11}a_{13} - 12a_{12}^2 - 48a_{12}.
\end{aligned}
$$

References

1. P.Etingof, *Calogero-Moser systems and representation theory*, Zur. Lect. Adv. Math.(2007).
2. G.Wilson, *Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian* (with an Appendix by I. G. Macdonald), Invent. Math. **133** (1998), 1–41.
3. Z.Normatov, *On a minimal set of generators for Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$*, Uzbek Mathematical Journal, 2019. N 3, pp. 104-111.

ON CENTRAL EXTENSION OF 4-DIMENSIONAL NILPOTENT BINARY LEIBNIZ ALGEBRA

Normurodov Sh.M.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
shoxruxnormurodov1996@gmail.com

We know that in recent years a lot of work on non-associative algebras has been published. The algebraic classification (up to isomorphism) of algebras of dimension n from a certain variety defined by a certain family of polinomial identities is a classic problem in the theory of non-associative algebras. There are many results related to the algebraic classification of small-dimensional algebras in the varieties of Lie, binary Lie, Leibniz and many other algebras [1-3].

Binary Leibniz algebras were first organized in the article [4]. Note that the binary Leibniz algebras are generalization of Leibniz algebras. It is known that all complex Leibniz algebras are classified up to dimension four [3, 4]. The description of five-dimensional nilpotent Leibniz algebra can be find in [5].

This work is devoted to the central extension of 4-dimensional binary Leibniz algebras. We consider 4-dimensional Leibniz algebra with three dimensional center and show that any central extension of this algebra is a Leibniz algebra.

Definition. *L is called a binary Leibniz algebra if the algebra formed by any two generators of the algebra L is a Leibniz algebra.*

In [5] it is proved that binary Leibniz algebra is defined by the following identities:

1. $\big[x,[y,z]\big]-\big[[x,y],z\big]+\big[[x,z],y\big]+\big[y,[x,z]\big]-\big[[y,x],z\big]+\big[[y,z],x\big]=0,$
2. $\big[x,[y,z]\big]-\big[[x,y],z\big]+\big[[x,z],y\big]+\big[z,[y,x]\big]-\big[[z,y],x\big]+\big[[z,x],y\big]=0,$
3. $\big[x,[y,[z,t]]\big]-\big[[x,y],[z,t]\big]+\big[[x,[z,t]],y\big]+\big[x,[t,[z,y]]\big]-\big[[x,t],[z,y]\big]+\big[[x,[z,y]],t\big]+$
$\big[z,[y,[x,t]]\big]-\big[[z,y],[x,t]\big]+\big[[z,[x,t]],y\big]+\big[z,[t,[x,y]]\big]-\big[[z,t],[x,y]\big]+\big[[z,[x,y]],t\big]=0,$

It is obvious that any two-generated binary Leibniz algebra is a Leibniz algebra. Thus, in non-Leibniz binary Leibniz algebras, there should be at least three generators. Moreover, any 2-step nilpotent binary Leibniz algebra is also a Leibniz algebra. Therefore, non-Leibniz binary Leibniz algebras should be at least three generators and nilindex greater than 3.

We consider following 4-dimensional Leibniz algebra with three dimensional center

$$\mathbf{L}_2\oplus\mathbb{C}^2\ :\ [e_1,e_1]=e_2.$$

Since the algebra $\mathbf{L}_2\oplus\mathbb{C}^2$ has a nilindex 3 and three-generated its central extension will has a nilindex 4 and three generated.

Theorem. Any central extension of 4-dimensional binary Leibniz algebra $\mathbf{L}_2\oplus\mathbb{C}^2$ is a Leibniz algebra.

References

1. Abdelwahab H., Calderón A.J., Kaygorodov I., The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras // International Journal of Algebra and Computation, 29 (2019), 6, 1113–1129.

2. Adashev J., Camacho L., Omirov B., Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras // Journal of Algebra, 479 (2017), 461–486.

3. Albeverio S., Omirov B.A., Rakhimov I.S., Classification of 4-dimensional dilpotent complex Leibniz algebras // Extracta mathematicae Vol. 21 (2006), 3, 197–210.

4. Cañete E., Khudoyberdiyev A., The classification of 4-dimensional Leibniz algebras // Linear Algebra and its Applications, 439 (2013), 1, 273–288.

5. Ismailov N. A., Dzhumadil'daev A.S. Unary and binary Leibniz algebras // Mat. Zametki, 2021, Volume 110, Issue 3, P. 336–344.

6. Ismail D., Classification of 5-Dimensional Complex Nilpotent Leibniz Algebras // arXiv:1706.00951

TOG‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLAR MINKOVSKIY AYIRMASI HAQIDA

Nuritdinov J. T.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston,
nuritdinovjt@gmail.com

To‘plamlarning Minkovskiy ayirmasi amali zamonaviy geometriyaning ko‘pgina sohalarida muhim ahamiyatga ega. Ba’zi chegaralangan to‘plamlar ustida Minkovskiy amallarini bajarish qonuniyatlari [2,3] ishlarda o‘rganilgan. Chegaralanmagan to‘plamlar ustida, hususan tog‘ri chiziq va tekisliklar Minkovskiy yig’indisi masalalari D.Velichovaning ishlarida yoritilgan[1]. Lekin chegaralanmagan to‘plamlar Minkovskiy ayirmasi qanday topilishi haqida adabiyotlarda uchramaydi. Quyida to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar Minkovskiy ayirmasiga doir ba’zi teoremalarni keltiramiz.

1-ta’rif. n o‘lchovli $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosida berilgan ikkita P va Q to‘plamlarning Minkovskiy ayirmasi deb, quyidagi to‘plamga aytiladi:

$$D = P \overset{*}{-} Q = \{x \in \mathbb{R}^n | x + Q \subset P\}.$$

1-teorema. Agar P va Q lar koordinata boshidan o‘tmaydigan $\mathbb{R}^n$ fazodagi parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa u holda ularning Minkovskiy ayirmasi berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik $D = P \overset{*}{-} Q$ bo‘lsin. Bu to‘plamga tegishli ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtani olamiz, ya’ni $a \in P \overset{*}{-} Q$, u holda Minkovskiy ayirmasining ta‘rifidan $a + Q \subset P$ ekanligi kelib chiqadi. Q va P to‘plamlar $\mathbb{R}^n$da parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lgani uchun $a + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. Bu degani Q to‘g‘ri chiziqning a vektor bo‘ylab parallel ko‘chirishdagi obrazi P to‘g‘ri chiziqqa teng ekanligini anglatadi. a nuqta D to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lganligi uchun $D + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. [1, *Proposition 3.1.*] ga ko‘ra va $Q \parallel P$ ekanligidan, $Q \parallel P \parallel D$ ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar P va Q lar $\mathbb{R}^n$ fazodagi parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, Q to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tsa, u holda $P \overset{*}{-} Q$ Minkovskiy ayirma P to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik $D = P \overset{*}{-} Q$ bo‘lsin. Bu to‘plamga tegishli ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtani olamiz, ya’ni $a \in P \overset{*}{-} Q$, u holda $a + Q \subset P$ bo‘ladi. Q va P to‘plamlar $\mathbb{R}^n$da parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lgani uchun $a + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. a nuqta D to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lganligi uchun $D + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. Q to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tgani uchun koordinata boshini o‘z ichiga oladi, ya‘ni $o(0, 0, ..., 0) \in Q$ bo‘ladi. Shuning uchun $D + o = P$, bundan $D = P$ ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema. Agar P va Q lar $\mathbb{R}^n$ fazodagi parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, P to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tsa, u holda $P \overset{*}{-} Q$ Minkovskiy ayirma Q to‘g‘ri chiziqqa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik $D = P \overset{*}{-} Q$ bo‘lsin. Bu to‘plamga tegishli ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtani olamiz, ya‘ni $a \in P \overset{*}{-} Q$, u holda $a + Q \subset P$ bo‘ladi. Q va P to‘plamlar $\mathbb{R}^n$ parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lgani uchun $a + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. a nuqta D to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lganligi uchun $D + Q = P$ tenglikni yoza olamiz. Q to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tgani uchun koordinata boshini o‘z ichiga oladi, ya‘ni $o(0, 0, ..., 0) \in P$ bo‘ladi. Demak, har bir $a(x^1, x^2, ..., x^n) \in Q$ nuqta uchun D to‘plamda shunday $a'(-x^1, -x^2, ..., -x^n) \in D$ nuqta topiladiki $a + a' = o$ tenglik bajariladi va aksincha. Demak, D to‘g‘ri chiziq berilgan Q to‘g‘ri chiziqqa koordinata boshiga nisbatan simmetrik ekan.

Yuqoridagi ta’rifdan va teoremalardan bir-biriga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlarning Minkovskiy ayirmasi bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘lishi kelib chiqadi. Endi n o‘lchovli fazoda berilgan tekislik va to‘g‘ri chiziqlarning Minkovskiy ayirmasi haqidagi quyidagi teoremalarni ko‘rib o‘tamiz.

4-teorema. Agar α- $\mathbb{R}^n$ fazodagi koordinata boshidan o‘tmaydigan tekislik va P - shu fazoda α tekislikka parallel biror to‘g‘ri chiziq bo‘lsa ularning Minkovskiy ayirmasi $\alpha \overset{*}{-} P$ yana shu α tekislikka parallel tekislikdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik $\beta = \alpha \overset{*}{-} P$ bo‘lsin, ixtiyoriy $a \in \alpha \overset{*}{-} P$ nuqta uchun $a + P \subset \alpha$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. P to‘g‘ri chiziq α tekilikka parallel bo‘lgani uchun bu munosabatni qanoatlantiruvchi a nuqta mavjud. a nuqta β to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lgani uchun va P to‘g‘ri chiziqni α tekilikning istalgan nuqtasiga parallel ko‘chirish mumkin ekanligidan $\beta + P = \alpha$ tenglikni yoza olamiz. [1, *Proposition 3.4.*] ga ko‘ra β to‘plamning α tekislikka parallel tekislik ekanligi kelib chiqadi.

1-natija. Agar α- $\mathbb{R}^n$ fazodagi koordinata boshidan o‘tmaydigan tekislik va P - shu fazoda α tekislikda yotuvchi biror to‘g‘ri chiziq bo‘lsa ularning Minkovskiy ayirmasi $\alpha \overset{*}{-} P$ yana shu α tekislikan iborat bo‘ladi.

5-teorema. Agar α, β- $\mathbb{R}^n$ fazodagi koordinata boshidan o‘tmaydigan parallel tekisliklar bo‘lsa, ularning Minkovskiy ayirmasi $\alpha \overset{*}{-} \beta$ berilgan tekisliklarga parallel tekislik bo‘ladi.

6-teorema. Agar α va β lar $\mathbb{R}^n$ fazodagi parallel tekisliklar bo‘lib, β tekislik koordinata boshidan o‘tsa, u holda $\alpha \overset{*}{-} \beta$ Minkovskiy ayirma α tekislikdan iborat bo‘ladi.

7-teorema. Agar α va β lar $\mathbb{R}^n$ fazodagi parallel tekisliklar bo‘lib, α tekislik koordinata boshidan o‘tsa, u holda $\alpha \overset{*}{-} \beta$ Minkovskiy ayirma β tekislikka koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan tekislikdan iborat bo‘ladi.

Beshinchi, oltinchi va yettinchi teoremalarning isboti yuqoridagi birinchi, ikkinchi, uchinchi teoremalar isboti kabi ko‘rsatiladi. Bu isbotlarning asosida ikki parallel tekisliklarning Minkovskiy yig‘indisi natijasida shu tekisliklarga parallel tekislik hosil bo‘lishligi yotadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. D. Velichova. Notes on properties and applications of Minkowski point set operations// South Bohemia Mathematical Letters. 2016. Volume 24. №1. pp.57-71.

2. M.Mamatov, J.Nuritdinov. Some Properties of the Sum and Geometric Differences of Minkowski.//Journal of Applied Mathematics and Physics. 2020. Volume 8. pp.2241-2255. https://www.scirp.org/journal/jamp ISSN Online: 2327-4379 ISSN Print: 2327-4352

3. Nuritdinov J.T. About the Minkowski difference on a plane.// Scientific Reports of Bukhara State University. 2021. Volume 3. pp. 13-30.

THE LOCALLY LINDELOF PROPERTIES OF THE HATTORI SPACES

Ortikboyeva N. Z

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: ortiqboyevan95@gmail.com

Definition 1. [**1**] . Let A be a subset of R of the real number. Defined the topology τ_A on R as follows:

For each $x \in A$, $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\, ; \varepsilon > 0\}$ is the neighborhood base at x.

For each $x \in R\backslash A, \{[x, x+\varepsilon)\,; \varepsilon > 0\}$ is the neighborhood base at x.

Then (R, τ_A) is called H-space. The point x is called an R-point, if $x \in A$, otherwise, x is called an S-point.

Definition 2 . [**2**]**.** We say that a topological space X is a Lindelof space or has the Lindelof property, if X is regular and every open cover of X has a countable subcover. Clearly, a regular space X is a Lindelof space if and only if every open cover of X has a countable refinement.It follows from the definitions that every compact space is a Lindelof space.

Definition 3. [**3**]**.** X space is called local Lindelof, of it is found such neighbourhood of any point of this space, it must be possible to separate countable cover from the any open cover of the neighbourhood.

Theorem 1. [**4**]**.** H(A) is locally compact if and only if $R\backslash A$ is closed in R and discrete in S.

Proof: We again replace R by $[0, 1]$. Since H(A) is dense in $K(A)$, the space H(A) is locally compact if and only if it is open in $K(A)$, which is equivalent to say that A is open in R and $R\backslash A$ is descrete in S (see the comment after the definition of the space $K(A)$).

The following question is posed in [3] . What is the space $H(A)$ if $R\backslash A$ is countable and closed in ? Of course, A is open in R if and only if H(A) is locally compact at every $x \in A$, but in general there is no topological property of $H\left(A\right)$, in dependent from A, which is equivalent to the fact that $R\backslash A$ is countable and closed in R.

Theorem 2. H(A) is locally Lindelof space if and only if $R\backslash A$ is closed in R and discrete in S.

REFERENCES

1. Hattori Y. Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces /Y.Hattori //Memoirs of the Faculty of Science and Engineering Shimane University. Series. B.Mathematical Science.-2010.-Vol.43.-P.13-26.

2. Engelking R., General Topology, Heldermann Vergal, Berlin, 1989.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва: Наука, 1974.-424с.

4.Bouziad A. on Hattori spaces / A. Bouziad, E. Sukhacheva // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2017.- N2.-P. 213-223.- DOI 10.14712/1213-7243.2015.199.

KO‘PXILLIKDA CHIZIQLI BOG‘LANISH VA UNING XOSSALARI

Saitova S.S., QayumovaS.N.

National University of Uzbekistan , Tashkent, Uzbekistan
sitoraa.qayumovaa@mail.ru

Bugungi kunda ko’pchilik aniq fanlar, shu jumladan matematik tushuncha va nazariyalar jamiyatdagi jarayonlardan ancha uzilgandek. Lekin aslida unday emas. Ma’lumki, matematik formula va asosiy tushunchalar masalaning to’liq yechimini topishga qaratilgan. Jamiyatda ham insonlar mukammallikka intiladi, demak biz fandagi qonuniyatlar asosida jamiyatda harakat qilsak, jamiyat taraqqiyoti jarayonlarini sof ilmiy kuzatishimiz mumkin. Avvalgi tezisimizda ko’pxilliklarga oid asosiy matematik tushunchalarni jamiyatdagi jarayonlarga interperitatsiya qilgan edik. Quyida shu mavzuni davom ettiramiz.

Bizga M va N silliq ko'pxilliklar berilgan bo'lsin, $\varphi : M \to N$ akslantirish diffeomorfizm bo'lishi uchun, φ akslantirish silliq, teskarisi mavjud va silliq bo'lishi kerak. $\varphi : M \to N$ diffeomorfizm mavjud bo'lsa, M va N ko'pxilliklar diffeomorf ko'pxilliklar deyiladi.

$\gamma : [a, b] \to M$ silliq akslantirish, boshi $\gamma(a)$, oxiri $\gamma(b)$bo'lgan M ko'pxillikda berilgan yo'l deyiladi.

M silliq ko'pxillikda $\gamma : [a, b] \to M$ yo'l berilgan bo'lsin. $\gamma(t) \in M$, $t = t_0$,$p = \gamma(t_0)$,$p \in M$. p nuqta atrofida aniqlangan $\forall f$ silliq akslantirish uchun γ yo'lning $t = t_0$ nuqtasidagi urinma vektori $\gamma^{'}(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}|_{t=t_0}$, $\gamma^{'}$- M ko'pxillikning p nuqtasidagi urinma vektori deyiladi.

M ko'pxillikdagi p nuqtadan o'tuvchi barcha yo'llarning urinma vektorlaridan tashkil topgan chiziqli fazo p nuqtadagi urinma fazo deyiladi va T_pM kabi belgilanadi. Urinma fazo o'lchami ko'pxillik o'lchami bilan bir xil bo'ladi: $\dim T_pM = \dim M$.

Vektor maydon deb $X_p : p \to X_p$ $(X_p \in T_pM)$ akslantirishni qaraymiz, agar vektor maydon akslantirish sifatida silliq bo'lsa, u holda vektor maydon silliq vektor maydon deyiladi.

Yuqoridagi tushunchalarni jamiyatdagi jarayonlarga interperetatsiya qilamiz. Jamiyatdagi shaxslar uchun urinma vektorlar tanlangan shaxsning "fazilat"va "illatlari"bo'ladi. Har bir inson o'z fazilat va illatlariga ko'ra γ chiziq bo'ylab hayot yo'lini yuradi. Yuqoridagilarga ko'ra, vektor fazo sifatida har bir inson dunyoqarashini olishimiz mumkin.

M silliq ko'pxillikda ∇akslantirishni aniqlaylik: $\nabla : T_pM \times T_pM \to T_pM(p \in M)$;X, Y,Z silliq vektor maydonlar va f,h funksiyalar berilgan bo'lsin. ∇ akslantirish uchun

1) $\nabla_{fX+hY}Z = f(\nabla_X Z) + h(\nabla_Y Z)$

2) $\nabla_X (fX + hZ) = f\nabla_X Y + h\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xh)Z$shartlar qanoatlantirilsa ∇- kovariant differensial yoki chiziqli bog'lanish deb ataladi: $\nabla : (X, Y) \to \nabla_X Y$.

Jamiyatda insonlar dunyoqarashi, fikrlashi orqali o'zaro muloqotga kirishadi va ma'lum bir jabhalarda ikki va undan ortiq inson fikrlari orqali biror to'xtamga kelinib, masalalar hal etiladi. Ya'ni, insonlar dunyoqarashi o'rtasida ∇ chiziqli bog'lanish kabi bog'liqlik mavjud. Va bu bog'liqlik chiziqli bog'lanishning 2 ta shartini qanoatlantiradi. Jamiyatda ikki inson boshqa inson bilan biror masalada muloqotga kirishganda ularning ikkalasining ham asosiy maqsadi bitta bo'lgani bilan lekin sabablari turli xil (ya'ni f va h funksiyalar) bo'lishi mumkin va ularning muammolarini hal qilish uchun uchinchi inson ikki shaxsning har biriga o'ziga xos tarzda yondoshsa asosiy masala hal bo'ladi.

M-silliq ko'pxillik, ∇- chiziqli bog'lanish bo'lsa, quyidagicha aniqlangan (1,3) tipdagi tenzor riman egriligining tenzori deyiladi:

$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$

Mos ravishda buralish tenzori: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ (1,2) tipdagi tenzordir.

Agar T=0 bo'lsa, ∇- simmetrik bog'lanish (buralishsiz bog'lanish) deyiladi.

Riman egriligining tenzori shaxslar fikrlash farqining ko'rsatkichini ifolasa, buralish tenzorlari fikrlashdagi ziddiyatlar ko'rsatkichini ifodalaydi. Agarda buralish tenzori 0 ga teng bo'lsa bog'lanish simmetrik bog'lanish edi. Demak, jamiyatda simmetrik bog'lanishda aynan biror vaziyatda ikki inson dunyoqarashi o'zaro moslashgan bo'lib, fikrlari o'rtasida keskin ziddiyatlar yuzaga kelmaydi va masalalar ham oson hal etiladi.

(M,g)-riman ko'pxilligidagi g metrik tenzor va ∇ uchun

$(\nabla_X g)(X, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ tenglik bajarilsa, (M,g) da ∇chiziqli bog'lanish moslashgan deyiladi

Teorema.[3] (M,g) da quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ∇chiziqli bog'lanish mavjud:

1) ∇-simmetrik;

2) ∇- g bilan moslashgan

bunday bog'lanish Levi-Chivita bog'lanishi deyiladi.

Levi-Chivita bog'lanishi quyidagi xossalarga ega:

1) Koszul formulasi:

$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)$

2) Biyanki ayniyati:

$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

$(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0.$

Xulosa qilsak, har qanday jamiyatda insonlar dunyoqarashi o'rtasida o'zaro bog'liqlik mavjuddir. Jamiyat a'zolari bog'liqlikda o'zaro bir-birlarining fikrlarini inobatga olib harakat qilsalar jamiyat yanada taraqqiy topib boradi.

ADABIYOTLAR

1. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo'limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz 1. T., O'zbekiston, 2017.

2. Xirsh M. Differinsialnaya topologiya. M., Mir, 1979.

3. Бураго Ю.Д, Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. Наука, 1994.

INVARIANTS OF m-TUPLES FOR THE GROUP OF SPECIAL-ORTHOGONAL IN THE TWO-DIMENSIONAL BILINEAR-METRIC SPACE WITH THE FORM $x_1y_1 + 13x_2y_2$ OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

Sadullayeva M. S.[1] Beshimov G. R.[2],

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[1]maftunasadullayeva1997@gmail.com

[2]gayratbeshimov@gmail.com

Let Q^2 be the two-dimensional vector space over the field Q of rational numbers. For $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in Q^2$, we put $\sigma(a,b) = a_1b_1 + 13a_2b_2$. Then $\sigma(x,y)$ is a bilinear form on Q^2 and (Q^2, σ) is a two-dimensional bilinear-metric space over Q. Denote by M_a the following matrix $\begin{pmatrix} a_1 & -13a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$. Put $SO(\sigma, Q) = \{M_a | a \in Q^2, a \neq 0\}$. The set $SO(\sigma, Q)$ is a group with respect to the multiplication of matrices. The group $SO(\sigma, Q)$ is an analog of the group of all special-orthogonal in the two-dimensional Euclidean space.

Let N be the set of all natural numbers and $m \in N$. Put $N_m = \{k \in N | 1 \leq k \leq m\}$. A mapping $u : N_m \to Q^2$ will be called m-tuple in Q^2. Denote it in the following form $u = (u_1, u_2, \ldots u_m)$, where $u_j \in Q^2, \forall j \in N_m$. Two m-tuples $u = (u_1, u_2, \ldots u_m)$ and $v = (v_1, v_2, \ldots v_m)$ are called $SO(\sigma, Q))$-equivalent if there exists $H \in SO(\sigma, Q)$ such that $v_j = Hu_j, \forall j \in N_m$. This equivalence denoted by $u \overset{SO(\sigma,Q))}{\sim} v$. A function $f : Q^2 \to Q$ is called $SO(\sigma, Q)$-invariant on Q^2 if $f(Ha) = f(a), \forall a \in Q^2, \forall H \in SO(\sigma, Q)$. For $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in Q^2$, put $[a\,b] = a_1b_2 - a_2b_1$. Functions $\sigma(a,b) = a_1b_1 + 13a_2b_2$ and $[a\,b] = a_1b_2 - a_2b_1$ are $SO(\sigma, Q)$-invariant functions for all $a, b \in Q^2$ such that $a \neq 0, b \neq 0$.

Let $u, v \in Q^2$. In the case $u = 0, v \neq 0$, they are not $SO(\sigma, Q))$-equivalent. In the case $u \neq 0, v \neq 0$, they are $SO(\sigma, Q))$-equivalent. In the case $u = 0, v = 0$, they are $SO(\sigma, Q))$-equivalent.

Theorem 1. Let $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m), v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ be two m-tuples in Q^2 such that $u_1 \neq 0, v_1 \neq 0$, where $m > 1$. (i). Assume that $u \overset{SO(\sigma,Q)}{\sim} v$. Then the following equalities hold

$$\begin{cases} \sigma(u_1, u_j) = \sigma(v_1, v_j), \forall j = 1, \ldots, m; \\ [u_1 u_j] = [v_1 v_j], \forall j = 2, \ldots, m. \end{cases}$$

(ii). Conversely, assume that above equalities hold. Then there exists the unique matrix $H \in SO(\sigma, Q)$ such that $v_j = Hu_j, \forall j \in N_m$.

BOUNDED GEOMETRY FOR CRITICAL CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH BREAKS

Safarov U.A.
Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: safarovua@mail.ru

Let f be a circle homeomorphism of the circle S^1 with lift $F(x)$, $x \in R^1$, i.e. $f(x) = F(x)\,(mod\,1)$, $x \in S^1$, where $F(x)$ is continuous, strictly increasing and $F(x+1) = F(x)+1$, $x \in R^1$. The most important arithmetic characteristic of the homeomorphism f is the rotation number (see [1]):

$$\rho_f := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}(mod\,1).$$

Henceforth, F^n denotes the nth iterate of the function F. The rotation number ρ_f is rational if and only if f has periodic orbits.

We consider an orientation preserving circle homeomorphism f that rotation number ρ_f is irrational. We denote by $\{a_n,\, n \in N\}$ the sequence of entries in the continued fraction expansion of ρ_f, i.e. $\rho_f = [a_1, a_2, ..., a_n, ...]$. Denote by $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $n \geq 1$ the convergence of ρ_f. Their denominators q_n satisfy the recurrence relation, that is

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ n \geq 2,\ q_0 = 0,\ q_1 = a_1.$$

For an arbitrary point $x_0 \in S^1$ we define $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ the closed interval on S^1 with end points x_0 and $x_{q_n} = f^{q_n}(x_0)$. Note that for odd n the point x_{q_n} lies to the left of x_0 and for even n to the right. Denote by $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ the iterates of the interval $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ under f:$\Delta_i^{(n)}(x_0) := f^i(\Delta_0^{(n)}(x_0)), i \geq 1$.

Lemma([1]). *Consider an arbitrary point $x_0 \in S^1$. A finite piece $\{x_i,\, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ of the trajectory of this point divides the circle into the following disjoint (except for the endpoints)intervals: $\Delta_i^{(n-1)}(x_0),\ 0 \leq i < q_n,\ \Delta_j^{(n)}(x_0),\ 0 \leq j < q_{n-1}$.*

We denote the obtaned partition by $\xi_n(x_0)$ and call it n-th **dynamical partition** of the circle. We now briefly describe the process of transition from $\xi_n(x_0)$ to $\xi_{n+1}(x_0)$. All intervals $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j < q_{n-1}$, are preserved, and each of the intervals $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ is divided into $a_{n+1} + 1$ sub intervals:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{a_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

Definition. *Let $K > 1$ be a constant. We call two intervals I_1 and I_2 of S^1 are $K-$* ***comparable****, if the inequalities $K^{-1}\ell(I_2) \leq \ell(I_1) \leq K\ell(I_2)$ hold.*

One of the important class of circle homeomorphisms are piecewise smooth homeomorphisms with break points or shortly, the class of P-homeomorphisms.

This class of **P-homeomorphisms** consists of orientation preserving circle homeomorphisms f which are differentiable except at a finite number of break points, at which the one-sided positive derivatives f'_- and f'_+ exist, which do not coincide and for which there exist constants $0 < c_1 < c_2 < \infty$, such that

• $c_1 < f'_-(x_b) < c_2$ and $c_1 < f'_+(x_b) < c_2$ for all $x_b \in B(f)$, the set of break points of f in S^1;

• $c_1 < f'(x) < c_2$ for all $x \in S^1 \backslash B(f)$;

• $\log f'$ has bounded variation in S^1 i.e. $v := var_{S^1} \log f' < \infty$.

Now we consider an orientation preserving circle homeomorphisms f, that have a critical point.The point $x_{cr} \in S^1$ is called non-flat critical point of a homeomorphism f with order $d > 1$, if for a some $\delta-$ neighborhood $U_\delta(x_{cr})$ such that $f(x) = \phi(x)|\phi(x)|^{d-1} + f(x_{cr})$ for all $x \in U_\delta(x_{cr})$, where $\phi : U_\delta(x_{cr}) \to \phi(U_\delta(x_{cr}))$ is a C^3 diffeomorphism such that $\phi(x_{cr}) = 0$.

Let $x_{cr} \in S^1$ be a critical point of homeomorphism f. For any $x_0 \in S^1$, consider the dynamical partition $\xi_n(x_0)$. For definiteness we assume that n is odd. Then $x_{q_n} \prec x_0 \prec x_{q_{n-1}}$. The structure of the dynamical partition implies that $\overline{x}_{cr} = f^{-p}(x_{cr}) \in [x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$, for some p, $0 < p < q_n$. Let I_1 and I_2 be any elements of a dynamical partition $\xi_m(\overline{x}_{cr})$, $m \geq n$ having common endpoints.

Next we formulate the main result of this work.

Theorem. *Let f be a P-homeomorphism with critical point of the order $d > 1$ and irrational rotation number. Then there exists a constant $K > 1$ depending only on f such that the intervals I_1 and I_2 are K -comparable.*

Note that the result of Theorem was obtained by Dzhalilov, Noorani and Akhatkulov [2] for P homeomorphisms with odd order of critical point. In our case the order of critical point can be any real number bigger than 2.

REFERENCE

1. Cornfeld I.P., Fomin S.V., Sinai Ya.G.: Ergodic Theory. Berlin.:Springer Verlag, (1982).
2. Dzhalilov A., M. Salmi Md Noorani and Akhatkulov S.: Critical Circle Homeomorphisms with Infinite Number of Break Points. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis. 2014, pp.1-6.

2-LOCAL DERIVATION ON SOME SOLVABLE LIE ALGEBRAS

Sobirob B. K.[1], Yusupov B.B.[2]

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan, baxtiyor.sobirov93@mail.ru;
Institute of Mathematics of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notions of local derivations were introduced in 1990 by R.V.Kadison [3] and D.R.Larson, A.R.Sourour [4]. Later in 1997, P.Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras [2]. The main problems concerning these notions are to find conditions under which all local (2-local) derivations become (global)derivations and to present examples of algebras with local (2-local) derivations that are not derivations.

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in papers in [1]. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. In this work we investigate 2-local derivations of some solvable Lie algebras.

Definition 1. An algebra L over a field $\mathbb{K}$ is called a Lie algebra if its multiplication (denoted by $(x,y)\mapsto[x,y]$) satisfies the identities:

(1) $[x,x]=0$,

(2) $\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0$,

for all $x,y,z\in L$. Identity (2) is called the Jacobi identity.

Definition 2. A linear map $d\colon L\to L$ of a Leibniz algebra $(L,[\cdot,\cdot])$ is said to be a derivation if for all $x,y\in L$, the following condition holds:

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)].$$

The set of all derivations of L is denoted by $Der(L)$, which is a Lie algebra with respect to the commutator.

For a given element x of a Leibniz algebra L, the right multiplication operator $\mathcal{R}_x\colon L\to L$, defined by $\mathcal{R}_x(y)=[y,x], y\in L$ is a derivation. In fact, Leibniz algebras are characterized by this property regarding right multiplication operators. As in the Lie case, these kinds of derivations are said to be inner derivations.

Definition 3. A map $\nabla:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ (not necessary linear) is called 2-*local derivation* if for any $x,y\in\mathcal{L}$ there exists a derivation $D_{x,y}\in Der(\mathcal{L})$ such that

$$\nabla(x)=D_{x,y}(x),\quad \nabla(y)=D_{x,y}(y).$$

For a given Leibniz algebra L *the lower central* and *derived series* defined as follows:

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k,L],\ k\geq 1,\qquad\qquad L^{[1]}=L,\ L^{[s+1]}=[L^{[s]},L^{[s]}],\ s\geq 1,$$

respectively.

Definition 4. A Leibniz algebra L is said to be *nilpotent* (respectively, *solvable*), if there exists $k\in\mathbb{N}$ $(s\in\mathbb{N})$ such that $L^k=\{0\}$ (respectively, $L^{[s]}=\{0\}$). The minimal number k with such property is said to be the *index of nilpotency* of the algebra L.

Definition 5. An n-dimensional Leibniz algebra is called *quasi-filiform* if its index of nilpotency is equal to $n-1$.

A Leibniz algebra L is $\mathbb{Z}$-graded, if $L=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}V_i$, where $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$ for any $i,j\in\mathbb{Z}$ with a finite number of non-null spaces V_i.

We say that a nilpotent Leibniz algebra L admits *the connected gradation* $L=V_{k_1}\oplus\cdots\oplus V_{k_t}$, if $V_{k_i}\neq\{0\}$ for any i $(1\leq i\leq t)$.

Definition 6. The number $l(\oplus L)=l(V_{k_1}\oplus\cdots\oplus V_{k_t})=k_t-k_1+1$ is called *the length of gradation.* A gradation is called *of maximum length*, if $l(\oplus L)=\dim(L)$.

We denote by $l(L)=\max\{l(\oplus L)$ such that $L=V_{k_1}\oplus\cdots\oplus V_{k_t}$ is a connected gradation$\}$ *the length of an algebra L.*

Definition 7. A Leibniz algebra L is called of maximum length if $l(L)=\dim(L)$.

Theorem 1.[5] Any element of $R(g^i_{(n,1)},2),\ i=1,2$ is isomorphic to one of the following Lie algebras:

$$R(g^1_{(n,1)},2):\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_{n-i}]=(-1)^ie_n, & 2\ \leq i\leq \frac{n-1}{2},\ n\geq 5\ \ and\ \ n\ is\ odd;\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & \\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, & 2\leq i\leq n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-4)e_n, & \\ [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, & 2\leq i\leq n-1,\\ [e_n,y]=-[y,e_n]=2e_n, & \end{cases}$$

$$R(g^2_{(n,1)},2):\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_n]=e_{i+2}, & 2\leq i\leq n-3,\ n\geq 5;\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & \\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, & 2\leq i\leq n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, & \\ [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, & 2\leq i\leq n-1.\end{cases}$$

Now we shall give the main result concerning 2-local derivations of solvable Lie algebra $R(g^i_{(n,1)},2),\ i=1,2.$

Theorem 2. Any 2-local derivation on the algebra $R(g^i_{(n,1)},2),\ i=1,2$ is a derivation.

References

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivation on finite dimensional Lie algebras, // Linear Algebra and its Applications. **493**, 381-398 (2016).

2. Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$, // Proceedings of the American Mathematical Society. **125**, 2677–2680 (1997).

3. Kadison R.V., Local derivations, // Journal of Algebra. Vol. **130**, p. 494–509 (1990).

4. Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,// Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **51** Part 2, Provodence, Rhode Island, p. 187–194 (1990).

5. Muratova Kh. A., Ladra M., Omirov B. A., Sattarov A. M., Solvable Leibniz algebras with quasi-filiform Lie algebras of maximum length nilradicals,// Communications in Algebra, **48**, pp. 3525–3542 (2020).

$\mathbb{C}_p$ DA NORMASI BIRDAN KATTA BO'LMAGAN, $\mathbb{Z}_p$ GA TEGISHLI BO'LMAGAN ELEMENTLARNING MAVJUDLIGI

Tursunov M. M.[1]

Namangan Davlat Universiteti, Namangan, O'zbekiston,
musohontursunov42@gmail.com

F – maydon bo‘lsin. F maydonni qism maydon sifatida o‘z ichiga oluvchi har qanday K maydon *F maydonning kengaytmasi* deyiladi[1].

Ta'rif 1. Agar K kengaytmaning har qanday $\alpha\in K$ elementi koeffisientlari F maydondan olingan biror $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=0,\quad a_i\in F, i=\overline{0,n}$, ko‘phadning ildizi bo‘lsa, u holda K maydon *F maydonning algebraik kengaytmasi* deyiladi.

F maydonning har qanday K kengaytmasini F maydon ustidagi vektor fazo sifatida ham qarashimiz mumkin. Agar F maydon ustidagi K vektor fazo chekli o'lchamli bo'lsa, u holda K maydon F maydonning algebraik kengaytmasi bo'ladi. Bu holda K vektor fazoning o'lchami K *kengaytmaning darajasi* deyiladi va $[K : F]$ kabi belgilanadi.

F maydonning chekli algebraik kengaytmalarining darajalari orasida quyidagicha bog'lanish mavjud. Agar K' maydon K maydonning algebraik kengaytmasi, K maydon esa F maydonning algebraik kengaytmasi bo'lsa, u holda K' maydon F maydonning ham algebraik kengaytmasi bo'ladi va quyidagi tenglik o'rinli: $[K' : F] = [K' : K] \cdot [K : F]$.

Agar K maydonning ixtiyoriy elementini koeffisientlari F maydonga tegishli bo'lgan ratsional funksiyaning biror $\alpha \in K$ dagi qiymati ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda K maydon α elementni F maydonga qo'shilishidan hosil qilingan deyiladi va $K = F(\alpha)$ ko'rinishida belgilanadi.

K maydon F maydonning algebraik kengaytmasi bo'lib, $\alpha \in K$ bo'lsin. U holda bosh koeffisienti 1 ga teng va keltirilmaydigan yagona ko'phad mavjud bo'lib, α shu ko'phadning ildizi bo'ladi, ya'ni $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0, \quad a_i \in F$. Odatda bu ko'phad α ning F ga nisbatan minimal ko'phadi deyiladi, n esa α elementning darajasi ham deyiladi. Bu vaqtda $F(\alpha)$ maydon F maydonning n-darajali kengaytmasi bo'ladi.

Endi quyidagi ikkita fundamental teoremalarni keltiraylik. Bu teoremalarni isbotini [1] kitobdan topishingiz mumkin.

Teorema 1. (Krullning mavjudlik teoremasi) $(F, |\cdot|_F)$ *noarximed normalangan maydon va K uning kengaytmasi bo'lsin. U holda K maydonda $|\cdot|_F$ normaning davomi bo'lgan $|\cdot|_K$ noarximed norma mavjud.*

Teorema 2. (Yagonalik teoremasi) *F va K Teorema 12.1 ning shartlarini qanoatlantirsin. Agar F maydon $|\cdot|_F$ normaga nisbatan to'la va K maydon F ning algebraik kengaytmasi bo'lsa, u holda $|\cdot|_F$ normaning K maydonga davomi yagona bo'ladi.*

Bundan keyingi hamma joyda K orqali $\mathbb{Q}_p$ maydonning chekli kengaytmasini belgilaymiz. $m = [K : \mathbb{Q}_p]$, ya'ni K – bu $\mathbb{Q}_p$ maydon ustidagi m o'lchamli vektor fazo bo'lsin. U holda p-adik normaning K gacha noarximed davomi mavjud va yaqona ekani yuqoridagi teoremalardan ma'lum.

Faraz qilaylik, L va K maydonlar $\mathbb{Q}_p \subset K \subset L$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\mathbb{Q}_p$ maydonning ikkita chekli kengaytmalari bo'lsin. Hamda $|\cdot|_L$ va $|\cdot|_K$ normalar p-adik normaning mos ravishda L va K maydonlargacha davomi bo'lsin. U holda bu davomlarning yagonaligidan ixtiyoriy $x \in K$ uchun $|x|_L = |x|_K$ kelib chiqadi. Demak, x ning normasi davom ettirish usuliga bog'liq emas.

Biz K maydonga p-adik normaning davomi mavjud va yagonaligini bildik, ammo davom ettirishning qanday usullari bor? Shu savolga javob berishga harakat qilaylik.

Bizga $K \setminus \mathbb{Q}_p$ to'plamdagi elementlarning p-adik normasini hisoblash uchun $N_{K\setminus\mathbb{Q}_p}(xy) = N_{K\setminus\mathbb{Q}_p}(x)N_{K\setminus\mathbb{Q}_p}(y)$ tenglikni qanoatlantiradigan $N_{K\setminus\mathbb{Q}_p} : K \to \mathbb{Q}_p$ funksiya kerak.

Teorema 2. *K maydon $\mathbb{Q}_p$ ning chekli kengaytmasi bo'lib, $n = [K : \mathbb{Q}_p]$ bo'lsin. U holda p-adik normaning K maydongacha davomi ushbu $|x|_p = \sqrt[n]{\left|N_{K\setminus\mathbb{Q}_p}(x)\right|_p}$ ko'rinishdagi $|\cdot|_p : K \to \mathbb{R}_+$ funksiya bilan aniqlanadi.*

Demak, agar K maydon $\mathbb{Q}_p$ ning chekli kengaytmasi bo'lib, $n = [K : \mathbb{Q}_p]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in K$ uchun $ord_p(x) = \frac{1}{n} ord_p(N_{K\setminus\mathbb{Q}_p}(x))$ bo'lib, yuqoridagi formula yordamida aniqlangan normaning qiymatlari $\{p^{-ord_p(x)} : ord_p(x) \in n^{-1}\mathbb{Z}\}$ to'plamda bo'ladi.

Endi koeffisientlari $\mathbb{Q}_p$ dan olingan har qanday ko'phadning barcha ildizlarini o'z ichiga olgan maydon quramiz.

Ta'rif 2. *K maydon bo'lsin. Agar $K[x]$ halqadan olingan har qanday ko'phad ildizlari K da mavjud bo'lsa, u holda K maydon algebraik yopiq deyiladi. Agar K maydon F maydonning kengaytmasi bo'lib, algebraik yopiq bo'lsa, u holda K maydon F maydonning algebraik yopilmasi deyiladi va $K = F^{ac}$ kabi belgilanadi.*

Faraz qilaylik U to'plam $\mathbb{Q}_p$ maydonning barcha chekli kengaytmalarini birlashmasi bo'lsin. Bu to'plam $\mathbb{Q}_p$ ning algebraik yopilmasi ekanini isbotlash mumkin, ya'ni $U = \mathbb{Q}_p^{ac}$. Haqiqatan, agar $x \in \mathbb{Q}_p^{ac}$ bo'lsa, u holda x element $\mathbb{Q}_p(x)$ chekli kengaytmaga tegishli bo'ladi.

Biz $|\cdot|_p$ normani p-adik normaning $\mathbb{Q}_p(x)$ kengaytmagacha yagona davomi sifatida aniqlaylik. Bu normaning aniqlanishi $\mathbb{Q}_p(x)$ chekli kengaytmaning tanlanishiga bog'liq emas. Shuning uchun uni $\mathbb{Q}_p^{ac}$ dagi p-adik normaning yagona davomi deyish mantiqan to'g'ri. Demak, biz p-adik normaning $\mathbb{Q}_p^{ac}$ maydongacha davomiga ega bo'ldik. Endi, bu normaning qiymatlari qanday bo'ladi degan savolga javob beramiz.

Ma'lumki, K maydon $\mathbb{Q}_p$ ning chekli kengaytmasi bo'lib, $n = [K : \mathbb{Q}_p]$ bo'lsa, u holda K maydonda aniqlangan normaning qiymatlari $\{p^{-ord_p(x)} : ord_p(x) \in n^{-1}\mathbb{Z}\}$ to'plamda bo'lar edi. $\mathbb{Q}_p$ maydonning algebraik yopilishi cheksiz kengayishdir, bu $\mathbb{Q}_p$ ga nisbatan har qanday darajadagi keltirilmaydigan ko'phadlar mavjudligidan kelib chiqadi. Demak, $x \in \mathbb{Q}_p^{ac}$ elementning normasi $\{p^{-ord_p(x)} : ord_p(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbb{Z}\} = \{p^r : \ r \in \mathbb{Q}\}$ to'plamning elementi bo'lar ekan.

Afsuski $\mathbb{Q}_p^{ac}$ maydonning p-adik norma bo'yicha davomi to'liq emas. Biz $\mathbb{Q}_p^{ac}$ ni to'ldirib, yangi algebraik yopiq bo'lgan $\mathbb{C}_p$ maydonni hosil qilamiz. Bu fakt Krasner teoremasi bilan ma'lum. Biz $\mathbb{C}_p$ ni *kompleks p-adik sonlar maydoni* deb ataymiz.

Endi biz $\mathbb{C}_p$ elementlarini ichida normasi birdan kichik, ammo $\mathbb{Z}_p$ ning elementi bo'lmagan sonning mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\mathbb{Q}_p$ da yechilmaydigan, $x^2 = a$ ko'phadni qaraymiz va uni shu ko'phadning ildizi yordamida F maydonga kengaytiramiz. U holda $[K : \mathbb{Q}_p] = 2$ bo'ladi. Endi, faraz qilaylik $|a|_p = p^l$ bo'lsin. $p^{-l/2} \cdot x$ elementni qarasak, bu F da mavjud va uning normasi $|p^{-l/2} \cdot x|_p = p^{-l/2} \cdot p^{l/2} = 1$ bunda norma sifatida F dagi normani oldik. **Tasdiq .** $\mathbb{C}_p$ da normasi 1 dan katta bo'lmagan, ammo $\mathbb{Z}_p$ ga tegishli bo'lmagan cheksiz ko'p elementlar mavjud.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Schikhof W.H.** *Ultrametric calculus, An introduction to p-adic analysis* **Cambridge University Press, Cambridge, 1984.**

LOCAL DERIVATION ON NILPOTENT LEIBNIZ ALGEBRAS

Yusupov B. B.[1,2], Yusupov F. A.[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

baxtiyor_yusupov_93@mail.ru;

[2] Urgench State University, Urgench, Uzbekistan

In recent years non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. The notions of local and 2-local derivations are also become popular for some non-associative algebras such as the Lie and Leibniz algebras.

The notions of local derivations were introduced in 1990 by R.V.Kadison [7] and D.R.Larson, A.R.Sourour [8]. Later in 1997, P.Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras [6]. The main problems concerning these notions are to find conditions under which all local (2-local) derivations become (global)derivations and to present examples of algebras with local (2-local) derivations that are not derivations.

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in paper in [2]. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. In [3] local derivations and automorphism of complex finite-dimensional simple Leibniz algebras are investigated, and it is proved that all local derivations on a finite-dimensional complex simple Leibniz algebras are automatically derivations and it is shown that filiform Leibniz algebras admit local derivations which are not derivations. The results of the paper [4] shows have proved that p-filiform Leibniz algebras as a rule admit local derivations which are not derivations. The results of the paper [1] shows have proved that quasi-filiform Leibniz algebra as a rule admit local derivations which are not derivations.

In the present paper we describe local derivations of $NF_k \oplus NF_s$ Leibniz algebra and show the existence of local derivation on $NF_k \oplus NF_s$ Leibniz algebra which is not derivations.

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(L, [\cdot,\cdot])$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the so-called Leibniz identity

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big],$$

holds.

For a given Leibniz algebra $(L, [\cdot,\cdot])$, the sequence of two-sided ideals are defined recursively as follows:

$$L^1 = L, \ L^{k+1} = [L^k, L], \ k \geq 1.$$

This sequence is said to be the lower central series of L.

Definition 2. A Leibniz algebra L is said to be nilpotent, if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $L^n = \{0\}$.

Definition 3. A linear map $d \colon L \to L$ of a Leibniz algebra $(L, [\cdot,\cdot])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in L$, the following condition holds:

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]\,. \tag{2}$$

The set of all derivations of L is denoted by $Der(L)$, which is a Lie algebra with respect to the commutator.

For a given element x of a Leibniz algebra L, the right multiplication operator $\mathcal{R}_x \colon L \to L$, defined by $\mathcal{R}_x(y) = [y,x], y \in L$ is a derivation. In fact, Leibniz algebras are characterized by this property regarding right multiplication operators. As in the Lie case, these kinds of derivations are said to be inner derivations.

Definition 4. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$.

Definition 5. An n-dimensional Leibniz algebra is called null-filiform if $\dim L^i = n+1-i, \quad 1 \leq i \leq n+1$.

Let NF_k be an k-dimensional null-filiform Leibniz algebra with a basis $e_1, e_2, ..., e_k$ and NF_s an s-dimensional null-filiform Leibniz algebra with a basis $f_1, f_2, ..., f_s$ then we have the following multiplication[5]:

$$NF_k : \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq k-1; \quad NF_s : \ [f_i, f_1] = f_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1.$$

Let us consider the direct sum of these algebras $\mathfrak{L} = NF_k \oplus NF_s$. The following proposition describes derivations of the algebra $\mathfrak{L}$.

Proposition 1. Any derivation of the algebra $\mathfrak{L} = NF_k \oplus NF_s$ has the following matrix form:

$$D(e_j) = j\alpha_1 e_j + \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_{i-j+1} e_i, \quad 1 \leq j \leq k,$$
$$D(f_j) = j\beta_1 f_j + \sum_{i=j+1}^{s} \beta_{i-j+1} f_i, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Theorem 1. Let Δ be a linear operator on $\mathfrak{L}$. Then Δ is a local derivation, if and only if its matrix has the form:

$$\Delta(e_i) = \sum_{j=i}^{k} \gamma_{j,i} e_j, \quad 1 \leq i \leq k.$$
$$\Delta(f_j) = \sum_{t=k+j}^{k+s} \gamma_{t,k+j} f_{t-k}, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Corollary 1. The algebra $\mathfrak{L}$ admit local derivations which are not derivations.

REFERENCES

1. Adashev J.Q., Yusupov B.B., Local derivation of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.// Uzbek Mathematical Journal, 2021, No 2, pp.1-15.
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. // Linear and Multilinear Algebra, 2016, Vol.493, p. 381–388.
3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov B. A., Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2020, pp.2199–2234.
4. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B., Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras. // Journal of Mathematical Sciences, 245(3), 2020, pp.359-367.
5. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.K., Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. // Linear and Multilinear Algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758–774.
6. Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$. // Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 1997, pp.2677-2680.
7. Kadison R.V., Local derivations.// Journal of Algebra., 1990, Vol. 130, p. 494–509.
8. Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$.// Proc. Sympos. Pure Math. 51 Part 2, Provodence, Rhode Island 1990, p. 187–194.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ ГРАДИУРОВАННЫХ 2-ФИЛИФОРМНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Адашев Ж. К.[1], Эгамберганова Г. Ш.[2]

Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан,
adashevjq@mail.ru;
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.

В данной работе рассматриваются центральные расширения естественным образом градиуированных 2-филиформных алгебр Лейбница. Фактически метод центральных расширений алгебр Ли был адаптирован для алгебр Лейбница в [2]. Отметим, что одномерные центральные расширения нуль-филиформной алгебры Лейбница и естественным образом градуированной филиформной алгебры Ли были описаны в [2], [3].

Пусть L–градуированная 2-филиформная неразложимая нелиевая алгебра Лейбница. Тогда согласно работе [3] она изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned}
&\mu_1: \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3, \quad [e_1,f_1]=f_2,\\
&\mu_2: \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3, \quad [e_1,f_1]=e_2+f_2, \quad [e_i,f_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-3,
\end{aligned}$$

где $\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-2},f_1,f_2\}$ базис алгебры.

Основные результаты данной работы состоят из классификации одномерных центральных расширений естественным образом градуированных 2-филиформных алгебр Лейбница μ_1.

Пусть L–n-мерная алгебра Лейбница и пусть $V=\langle x\rangle$–абелева алгебра.

Центральным 2-коциклом на L называется билинейное отображение $\theta: L\otimes L\longrightarrow V$ такое, что для любой тройки элементов $x,y,z\in L$ выполняется равенство

$$\theta(x,[y,z])=\theta([x,y],z)-\theta([x,z],y).$$

Через $ZL^2(L,V)$ обозначим множество всех 2-коциклов из L на V. Если для линейного отображения $\varphi: L\longrightarrow V$ имеем $\theta(x,y)=\varphi([x,y])$, то θ называется кограницей. Через $BL^2(L,V)$ обозначим множество всех 2-кограниц из L на V. Множество $HL^2(L,V):=ZL^2(L,V)/BL^2(L,V)$ называется 2-ой группой когомологий. Если $\theta_1-\theta_2$ кограница, то θ_1 и θ_2 называются когомологичными.

Для $\theta\in C^2(L,V)$ построим центральное расширение L_θ. По определению, это векторное пространство $L_\theta=L\oplus V$ со следующим умножением:

$$[x+u,y+v]=[x,y]_L+\theta(x,y), \quad \text{для} \quad x,y\in L, \quad u,v\in V.$$

Алгебра L_θ является алгеброй Лейбница тогда и только тогда, когда $\theta\in ZL^2(L,V)$. Алгебра L_θ называется *центральным расширением алгебры L по центру V.*

Пусть L – n-мерная естественным образом градуированная 2-филиформная алгебра Лейбница μ_1.

Предложение.

- Следующие коциклы

$$\triangle_i(e_i,e_1)=x, \ 1\le i\le n-1, \ \triangle_n(e_n,e_1)=x, \ \triangle_n(e_2,e_{n-1})=x,$$

$$\triangle_{n+1}(e_1,e_{n-1})=x, \ \triangle_{n+2}(e_{n-1},e_{n-1})=x, \ \triangle_{n+3}(e_n,e_{n-1})=x,$$

образуют базис пространства $ZL^2(\mu_1,V)$;

- Следующие кограницы

$$\triangle_i(e_i,e_1)=x, \ 1\le i\le n-3, \ \triangle_{n-2}(e_1,e_{n-1})=x,$$

образуют базис пространства $BL^2(\mu_1,V)$;

- Следующие коциклы

$$[\triangle_1](e_{n-2}, e_1) = x,\ [\triangle_2](e_{n-1}, e_1) = x,\ [\triangle_3](e_{n-1}, e_{n-1}) = x,$$

$$[\triangle_4](e_n, e_1) = x,\ [\triangle_5](e_n, e_{n-1}) = x,$$

образуют базис пространства $HL^2(\mu_1, V)$.

Из Предложения вытекает, что таблица умножений одномерного центрального расширения алгебры Лейбница μ_1 имеет вид $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$:

$$\begin{array}{llll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, & [e_1, e_{n-1}] = e_n, & [e_{n-2}, e_1] = \alpha_1 x, \\ [e_{n-1}, e_1] = \alpha_2 x, & [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_3 x, & [e_n, e_1] = \alpha_4 x, & [e_n, e_{n-1}] = \alpha_5 x. \end{array}$$

Теорема. Одномерное центральное расширение 2-филиформной алгебры Лейбница μ_1 изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{array}{llll} L_1(1,0,0,0,0), & L_2(1,0,1,0,0), & L_3(1,0,\alpha,1,0), & L_4(1,0,0,0,1), \\ L_5(0,0,0,1,0), & L_6(0,0,1,1,0), & L_7(0,0,0,1,1), & L_8(0,\alpha,0,0,1), \\ L_9(0,0,1,0,0), & L_{10}(0,1,0,0,0), & \alpha \in \mathbb{C}. & \end{array}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Camacho L.M., Gomez J.R., Gonzalez A.J., Omirov B.A. Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras. Communications in Algebra. –2010. -Vol. 38(10). –P. 3671-3685.
2. Rakhimov I.S., Hassan. M.S. On one-dimensional Leibniz central extension of a filiform Lie algebra. Bulletin of the Australian Mathematical Society. –2011. -Vol. 84. –P. 205-224.
3. Skjelbred T., Sund T. On the Classification of Nilpotent Lie Algebras. Technical Report, Mathematisk Institutt, Universitetet i Oslo. –1977. 24 p.

ОПИСАНИЕ БИ-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НУЛЬ-ФИЛИФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

Адашев Ж. К.[1], Абраев Д. Ш.[2]

Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан, adashevjq@mail.ru;

Чирчикский государственный педагогический институт, Ташкент, Узбекистан.

В этой работе мы определяем понятие би-дифференцирования алгебры Лейбница и опишем би-дифференцирования нуль-филиформной алгебры Лейбница.

Пусть L – алгебра Лейбница над полем F.

Определение 1. Линейное отображение $d : L \to L$ называется дифференцированием, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Оператор правого умножение $R_x(y) = [y, x]$ является дифференцированием и такие дифференцирования называются *внутренними.*

Понятия би-дифференцирования для алгебр Лейбница определяются аналогично, как и в случае для алгебр Ли [2].

Определение 2. Билинейное отображение $\varphi : L \times L \longrightarrow L$ называется би-дифференцированием, если оно является дифференцированием по обеим аргументам, т.е.

$$\varphi([x,y],z) = [x,\varphi(y,z)] + [\varphi(x,z),y] \quad \text{и} \quad \varphi(x,[y,z]) = [y,\varphi(x,z)] + [\varphi(x,y),z],$$

для всех $x, y, z \in L$.

Если L – алгебра Ли, то отображение $\varphi(x,y) = \lambda[x,y]$ для всех $x, y \in L$, является примером би-дифференцирований и такие би-дифференцирования называются *внутренними*, где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теперь приведем классификацию дифференцирований и би-дифференцирований нуль-филиформной алгебры Лейбница. Известно, что в каждой размерности с точностью до изоморфизма существует единственная нуль-филиформная алгебра Лейбница [1], и в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ умножение алгебры имеет вид:

$$NF_n: \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

В работе [3] описаны дифференцирования нуль-филиформной алгебры Лейбница. Следовательно, любое дифференцирование алгебры NF_n имеет следующий вид:

$$d(e_i) = iA_1 e_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{j-i+1} e_j, \quad 1 \le i \le n.$$

В следующей теореме сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. Произвольное би-дифференцирование алгебры NF_n имеет вид:

$$\varphi(e_i, e_k) = \varphi(e_k, e_i) = iA_1 e_{i+k-1} + \sum_{t=i+k}^{n} A_{t-i-k+2} e_t, \quad 1 \le k \le i \le n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал. –2001. Т. 42. –С. 18-29.
2. Bresar M. On generalized biderivations and related maps. Journal of Algebra. –1995. –Vol. 172. –P. 764-786.
3. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. Linear and Multilinear Algebra. –2013. –Vol. 61(6). –P. 758-774.

Об оценках преобразования Фурье мер, сосредоточенных на выпуклых кривых

Баракаев А.М.[1]

[1]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
azamat1_9@mail.ru1;

Пусть в пространстве $OXYZ$ дана гладкая поверхность S которая задано в явном виде $z = F(x,y)$. Отмечем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$на этой поверхности. Проведем касательную плоскость α и нормаль M_0N через этой точки. Далее проведчм нормальную сечению βто есть плоскость проходящий через нормаль. Ясно, что эта сечения отсекает от поверхности S гладкую кривую L которую можно задать с функцией $z = f(x)$.Кроме того прямая l по которому пересекается касательная плоскость α и нормальное сечение β является касательной прямой к кривой L в точке M_0.

Определения-1. Если существует нормальное сечение в точке M_0, для которого,в малый окрестности U точки M_0 для расстояние $d(M,l)$ от линии L до касательного l выполняется условия

$$C_1|M - M_0|^k \leq d(M,l) \leq C_2|M - M_0|^k,$$

где C_1 и C_2 положительные числа или все равно существует такое число $k \in N$, что при всех $i = 0, 1, ..., k - 1 f^{(i)}(M_0) = 0, f^{(k)}(M_0) \neq 0$ то сечение L поверхности S называется сечением конечного типа- k.

Определения-2[**IS**]. Если любое нормальное сечение является сечением конечного типа, то поверхность S называется поверхностью конечного линейного типа.

Пример на поверхность имеющей конечной линейной тип будет сфера. Цилиндр не будет поскольку у поперечного сечения получиться прямая что означает невозможно найти такое k в **определение** -1.

Пусть $S \subset R^2$- гладкая кривая ограничивающая выпуклую область и пусть $d\sigma$ мера индуцированной длине на кривой S. Пусть T_{x_0} есть аффинная касательная к кривой S в точке x_0 и пусть

$$\widetilde{B}(x_0, \delta) = \{x \in S : dist(x, T_{x_0}) < \delta\},$$

$\widetilde{B}$ называется "чашкой" с высотой δ.

Теорема-1. Пусть S будет гладкая замкнутая кривая на R^2 ограничившая выпуклую область. Далее пусть $\eta \in R^2$ с $|\eta| = 1$ и пусть $x_0 \in S$, η ортогонален к S в точке x_0.Кроме этого пусть $\chi \in BV(S)$ сосредоточено в малой окрестности точки x_0.Положим

$$H(\lambda) = \int_S e^{i\lambda\langle x,\eta\rangle}\chi(x)d\sigma(x).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$|H(\lambda)| \leq C|\sigma(\widetilde{B}(x_0, \frac{1}{\lambda}))|,$$

Где C константа зависящейся только от S, BV- норми χ' и норми χ и σ- индуцированная Лебеговая мера.

Доказательства этой теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма -1.Пусть $\psi(t)$ есть гладкая выпуклая функция с условиями $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0$ и пусть $\chi \in BV(S)$. Тогда

$$|\int_0^\infty e^{i\lambda\psi(t)}\chi(t)dt| \leq 4Cmes\{x : x \in \psi^{-1}(0, \frac{1}{|\lambda|})\}$$

где C зависить только от BV- нормы χ.

ЛИТЕРАТУРА

1[IS].Iosevich A.,Sawyer E. "Maximal Averages over surfaces Adv. in Math., -132. (1997), $119 - 187$.

2.Nagel A.,Seeger A.and Wainger S. "Averages over convex hypersurfaces Amer.J.Math., 115.-4 (1993), $903 - 927$.

3.William P.Ziemer."Weakly Differentiable Functions"(1989),$221 - 225$.

ЧЕТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

Бекниязов А., Санакулова С.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
bekniyazov.asan@mail.ru;

Известно, что для произвольного многообразия алгебр, посредством оболочки Грассмана, можно определить Z_2-градуированные алгебры, которые называются супералгебрами этого многообразия. Обычно в Z_2-градуированных пространствах одно из пространств называется четной частью, а второе – нечетной частью. Характерной чертой многообразий суперeалгебр является то, что четная часть есть не что иное, как многообразие этих алгебр. В частности, четная часть суперaлгебр Ли и суперaлгебр Лейбница является алгеброй Ли и алгеброй Лейбница, соответственно.

Определение 1. Z_2-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ называется суперaлгеброй Лейбница, если она снабжена произведением $[-,-]$ которое удовлетворяет следующему условию:

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - (-1)^{\alpha\beta}\big[[x,z],y\big] - \text{супертождество Лейбница}$$

для любых $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$.

Для определения понятия нильпотентности суперaлгебры Лейбница определим следующий нижний центральный ряд:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной*, если существует $k \in N$ такое, что $L^k = \{0\}$. Минимальное число k с таким свойством называется *индексом нильпотентности* алгебры L.

Определим понятие дифференцирования для суперaлгебр Лейбница. Отметим, что понятие дифференцирования суперaлгебр отличается от обычного дифференцирования алгебр, и как в Z_2-градуированной алгебре пространство дифференцирований состоит также из четной и нечетной подпространств.

Определение 2. Дифференцированием суперaлгебры L степени $s,\ s \in Z_2$ называется линейное преобразование $D : L \to L$ удовлетворяющее следующему условию:

$$D([x,y]) = [x, D(y)] + (-1)^{s\cdot\beta}[D(x), y],$$

где $x \in L, y \in L_\beta$.

В работе [2] приведены нильпотентные суперaлгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ и характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$. В случае $m = n+1$ суперaлгебра

L в базисе $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$ имеет следующие произведения:

$$\begin{array}{ll}
[x_i, x_1] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-1,\\
[y_j, x_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le n-1,\\
[x_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1,\\
[y_j, y_1] = x_j, & 1 \le j \le n,\\
[y_{n+1}, y_{n+1}] = \gamma x_n, & \\
[x_i, y_{n+1}] = \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+1-i} \beta_k y_{k-1+i}, & 1 \le i \le [\frac{n-1}{2}],\\
[y_1, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n} \beta_k x_{k-1} + \beta x_n, & \\
[y_j, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+2-j} \beta_k x_{k-2+j}, & 2 \le j \le [\frac{n+1}{2}].
\end{array}$$

При $n = 8$ таблица умножений такой супералгебры Лейбница имеет следующий вид:

$$L : \begin{cases}
[x_i, x_1] = x_{i+1}, & 1 \le i \le 7,\\
[y_j, x_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le 7,\\
[x_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \le i \le 7,\\
[y_j, y_1] = x_j, & 1 \le j \le 8,\\
[x_i, y_9] = \sum\limits_{k=6}^{9-i} \beta_k y_{k-1+i}, & 1 \le i \le 3,\\
[y_1, y_9] = -2\beta_6 x_5 - 2\beta_7 x_6 - 2\beta_8 x_7 + \beta x_8, & [y_9, y_9] = \gamma x_8,\\
[y_j, y_9] = -2 \sum\limits_{k=6}^{10-j} \beta_k x_{k-2+j}, & 2 \le j \le 4.
\end{cases}$$

В следующем предложении опишем пространство четных дифференцирований суперлагебры Лейбница L.

Предложение. Четное дифференцирование супералгебры Лейбница L имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
d(x_1) = 2b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_8 x_8, & \\
d(x_i) = 2ib_1 x_i + b_2 x_{i+1} + \cdots + b_{9-i} x_i, & 2 \le i \le 8,\\
d(y_i) = (2i-1) b_1 y_i + b_2 y_{i+1} + \cdots + b_{9-i} y_8, & 2 \le i \le 8,\\
d(y_1) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_9 y_9, & d(y_9) = c_9 y_9,
\end{cases}$$

где

$$b_9 \beta_i = 0, \quad 6 \le i \le 8, \quad \beta_i((2i-3)b_1 - 1) = 0, \quad 6 \le i \le 8,$$
$$\beta(15b_1 - 1) = \gamma b_9, \quad \gamma(c_9 - 8b_1) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. in Algebra. Vol.33. N.1. P.159-172 (2005).
2. Camacho L.M., Gomez J.R., Navarro R.M., Omirov B.A. Classification of some nilpotent class of Leibniz superalgebras. Acta Math. Sinica (English Series), Vol. 26, Issue 5, 799-816 (2010).

ПРИМЕРЫ ИНДЕКСОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ W*-ПОДАЛГЕБР КОМПЛЕКСНОГО ФАКТОРА ТИПА I_n (n=2, 12)

Болтаев Х. Х., Хусанбаева З. Х.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекситан.

bkhabibzhan2020@mail.ru, Zulfizarxon2809@gmail.com

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая *-подалгебра M в $B(H)$, содержашая единичный оператор e называется W^*- алгеброй. Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ называется *вещественной* W^*- алгеброй, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$. Вещественная W^*-алгебра R называется *вещественой фактором*, если ее центр $Z(R)$ совпадает с $\{\lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Мы скажем, что вещественная W*-алгебра R имеет тип I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞ или III_λ, $(0 \le \lambda \le 1)$, если ее обвертывающая W*-алгебра $M = R + iR$ имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W*-алгебр. Линейное отображение $\alpha : M \to M$ с $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ называется **-автоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$; **-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$; *инволютивным*, $\alpha^2(x) = x$, для всех $x, y \in M$. Известно [1], что если α инволютивный *-антиавтоморфизмом W*-алгебры M, то

$$(M, \alpha) = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\} \tag{3}$$

является вещественной W*-алгеброй. Верно и обратное утверждение, т.е. всякая вещественная W*-алгебра R имеет вид (3), где $M = R + iR$ и α-инволютивный *-антиавтоморфизм M, определенный как $\alpha(x + iy) = x^* + iy^*$. Поэтому мы можем отождествлять вещественную W*-алгебру R с парой (M, α). Пусть M $(\subset B(H))$ - конечный фактор и пусть α - инволютивный *-антиавтоморфизм M. Известно [2], что если $B(H) = B(H_r) + iB(H_r)$ и $(M, \alpha) \subset B(H_r)$, где H_r – вещественное гильбертово пространтсво с $H_r + iH_r = H$, тогда

$$dim_M(H) = dim_{(M,\alpha)}(H_r) = \frac{1}{2} dim_{(M,\alpha)}(H). \tag{4}$$

Пусть N – подфактор фактора M, такой что $\alpha(N) \subset N$. *Индексом* N в M называется число $\dim_N(L^2(M)$ и обозначается как $[M : N]$, где $L^2(M)$ – пополнение алгебры M относительно нормы $\|x\|_2 = \mathrm{tr}(x^*x)^{1/2}$ [3]. Аналогично, *индексом* (N, α) в (M, α) называется число $\dim_{(N,\alpha)}(L^2(M, \alpha))$ и обозначается как $[(M, \alpha) : (N, \alpha)]$, где $L^2(M, \alpha)$ – пополнение вещественного фактора (M, α) относительно нормы $\|\cdot\|_2$. Между вещественным и комплексным индексами имеется следующая связь.

$$[(M, \alpha) : (N, \alpha)] = [(M : N], \text{ т.е. } [R : Q] = [R + iR : Q + iQ].$$

Рассматривая комплексный фактор M как вещественную W*-алгебру, в силу (2) мы можем полагать $[M : (M, \alpha)] = 2[(M, \alpha) : (M, \alpha)] = 2$, т.е. $[M : R] = 2$.

Теперь рассмотрим некоторые примеры индекса вещественных W*-подалгебр комплексного фактора типов I_2 и I_{12}. Пусть, в дальнейшем, M - (комплексный) фактор типа I_n.

1). Пусть $n = 2$. Тогда $M = M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$, и алгебра M имеет, с точностью до изоморфизма, четыре вещественных W*-подалгебры, отличные от M, являющихся вещественным или комплексным подфактором M. Это $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{H}$ - тело кватернионов.

Тогда индексы соответствующих вещественных W*-подалгебр вычисляются следующим образом:

$$[M_2(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = \frac{dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2}{dim_{M_2(\mathbb{R})}\mathbb{C}^2} = \frac{dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2}{\frac{dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2}{2^2}} = 4;$$

$$[\mathbb{H} : \mathbb{R}] = \frac{dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2}{dim_{\mathbb{H}}\mathbb{C}^2} = \frac{4}{1} = 4;$$

Тогда $[M : \mathbb{R}] = [M_2(\mathbb{C}) : \mathbb{R}] = 2 \cdot [M_2(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = 8$, $[M_2(\mathbb{C}) : \mathbb{H}] = [M_2(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{R})] = 2$ и $[M_2(\mathbb{C}) : \mathbb{C}] = 4$.

2). Если M - фактор типа I_{12} (т.е. $M \cong M_{12}(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^{12})$), тогда M имеет, с точностью до изоморфизма, следующие пятнадцать вещественных W*-подалгебры, являющихся вещественным или комплексным подфактором M: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$, $M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{C})$, $M_2(\mathbb{H})$, $M_3(\mathbb{R})$, $M_3(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{H})$, $M_4(\mathbb{R})$, $M_4(\mathbb{C})$, $M_6(\mathbb{R})$, $M_6(\mathbb{C})$, $M_6(\mathbb{H})$ и $M_{12}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{H}$ - множество кватернионных чисел. Индексы этих вещественных W*-подалгебр равны:

$$\begin{aligned}
&[M_{12}(\mathbb{C}) : \mathbb{C}] = [M_{12}(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = [M_6(\mathbb{H}) : \mathbb{R}] = 144,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{C})] = [M_{12}(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R})] = [M_6(\mathbb{H}) : \mathbb{H}] = [M_6(\mathbb{H}) : M_2(\mathbb{R})] = 36,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_3(\mathbb{C})] = [M_{12}(\mathbb{R}) : M_3(\mathbb{R})] = [M_6(\mathbb{H}) : M_3(\mathbb{R})] = 16,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_4(\mathbb{C})] = [M_{12}(\mathbb{R}) : M_4(\mathbb{R})] = [M_6(\mathbb{H}) : M_4(\mathbb{R})] = 9,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_6(\mathbb{C})] = [M_{12}(\mathbb{R}) : M_6(\mathbb{R})] = [M_6(\mathbb{H}) : M_6(\mathbb{R})] = 4,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{R})] = [M_{12}(\mathbb{C}) : \mathbb{H}] = 72,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_3(\mathbb{R})] = 32,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_4(\mathbb{R})] = [M_{12}(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{H}]) = 18,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_6(\mathbb{R})] = [M_{12}(\mathbb{C}) : M_3(\mathbb{H}]) = 8,\\
&[M_{12}(\mathbb{C}) : M_{12}(\mathbb{R})] = [M_{12}(\mathbb{C}) : M_6(\mathbb{H}]) = 2.
\end{aligned}$$

В общем случае имеет место: $[M_n(\mathbb{R}) : M_m(\mathbb{R})] = (\frac{n}{m})^2$ и $[M_n(\mathbb{C}) : M_m(\mathbb{R})] = 2(\frac{n}{m})^2$.

Таким образом, из примеров видим, что, комплексный фактор имеет большее колличество вещественных W*-подалгебр, чем комплексные W*-подалгебр. Поэтому комплексный фактор может содержат лишь вещественную W*-подалгебру с заданным значением индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. and Usmanov Sh.M., Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras, Kluw.Acad.Pub.,MAIA. 418 (1997) 235p.

2. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Dadakhodjaev R. A. On Jones' Index for Real W*-algebras. Eurasian Math. J., 1:4 (2010), 5-19.

3. Jones V.F.R., Index for Subfactors, Inventiones Math. 72 (1983) 1-25.

О НЕКОТОРОМ СВОЙСТВЕ ГРАФА ВЕЩЕСТВЕННЫХ W*-ПОДАЛГЕБР

Болтаев Х. Х., Шарибаева Т. Р.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекситан.

bkhabibzhan2020@mail.ru

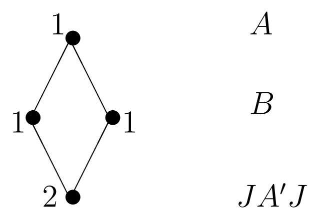
Исследуя свойства индексов для W^*-подалгебр, В. Джонс [1] описал множество всех возможных значений индекса подфактора конечного фактора. При этом, он дал доказательство существования Марковского следа на алгебре $H_\infty(q) = \cup_m H_m$ и, комбинируя эти Марковские следы с описанием узлов в $\mathbb{R}^3$, на основе группы кос B_n он построил новый полиномиальный инвариант для узлов. Кроме того, сопоставляя каждой паре W^*-алгебр $N \subset M$ некоторый двудольный граф, он получил необходимое и достаточное условия существования Марковского следа, и тем самым открыл возможность изучения W^*-подалгебр на языке графов.

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая *-подалгебра M в $B(H)$, содержащая единичный оператор е, называется W* алгеброй. Вещественная $*$-подалгебра $R \subset B(H)$ с e называется *вещественной* W*-*алгеброй*, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$. Комплексная или вещественная W^*-алгебра R называется *фактором*, если ее центр тривиален, т.е. состоит из скалярных кратных единичного оператора e. Коммутант *-алгебры R определяется следующим образом: $R' = \{a \in B(H) : \ ab = ba, \ \forall b \in R\}$. Пусть $A \subseteq B$ - конечномерные вещественные W^*-алгебры. Тогда $A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(F)$ и $B \cong \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j}(F)$, где $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$ - тело кватернионов. Предположим, что $\overrightarrow{n} = (n_1, ..., n_k)$ и $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_l)$ и назовем их вектор-размерностями A и B соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B как: Λ_{ij} - число i-го слагаемого в представлении A в j-м слагаемом B. [см. 2-3].

Теорема. *Если A и B слабо замкнуты, то $\Lambda_B^{JA'J} = (\Lambda_A^B)^t$, где J - модулярная инволюция и $A \subset B \subset JA'J$, t означает транспонирование матрицы.*

Для ясности продемонстрируем это на следующем примере.

Пример. Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и $JA'J = M_2(\mathbb{R})$. Вложение $A \subset B \subset JA'J$ имеет следующий граф:



Так как $\overrightarrow{n} = (1)$, $\overrightarrow{m} = (1,1)$ и $\overrightarrow{k} = (2)$, следовательно получим $\Lambda_A^B = (1,1)$ и $\Lambda_B^{JA'J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отсюда имеем $\Lambda_B^{JA'J} = (\Lambda_A^B)^t$.

Следствие. *Пусть $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset$ последовательность W^* - подалгебр, тогда $\Lambda_{A_i}^{A_{i+1}} = (\Lambda_{A_{i-1}}^{A_i})^t$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones V. F. R. Index for Subfactors, Inventiones Math., 1983, vol. 72, p. 1–25.

2. Рахимов А. А., Болтаев Х. Х. Индекс вещественных подфакторов W*-алгебр, Дальневосточный математический журнал, - 2020, Т. 20, № 2, - С. 234-246.

3. Болтаев Х. Х. Вещественные W* - подалгебры и их графы, Док. Акад. Наук. РУз, - 2013, № 3, С. 3–5.

ПОНЯТИЕ О ИНДЕКСАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Тураева Н.А.[1],Тураев Ж.Ф.[2]

Доцент кафеедры "Дифференциальные уравнения"Бухарского государсвенного университета[1]

Студент напровления математики физико-математического факультета Бухарского государственного университета[2]

Подобно понятию логорифма, в теории сравнений вводиться понятие индекса, играющего роль логарифма.

Так как степени первообразного корня $g^0, g^1, , g^{p-2}$ по модулю p образуют систему положительных вычетов (только не наименьших) по модулю p, то для всякого числа A, не делящегося на p, непременно будет иметь место сравнение

$$A \equiv g^k (modp)$$

где k-одно из значений $0, 1, 2, , p - 2$.

В этом случае показатель k называется индексом числа A при основании g по модулю p и записывается это так:

$$k = ind_g A,$$

или часто без указания основания $k = indA$.

Свойства индексов

1. Если $g^s \equiv g^t (modp)$,то $s \equiv t(modp - 1)$.
2. $Ind1 = 0$, так как всегда $1 \equiv g^0 (modp)$.
3. $Ind(AB) \equiv indA + indB(modp - 1)$.
4. $IndA^n \equiv nindA(modp - 1)$.
5.$Ind\frac{A}{B} \equiv indA - indB(modp - 1)$.
6. $Ind_g A \equiv ind_q Aind_g q(modp - 1)$.

Применение оперативных свойств индексов (2-5) будем называть индексированием. Для каждого простого модуля p по таблице индексов находятся индексы данных чисел, а по таблице антииндексов находятся числа по данным индексам.

Каждая из таблиц расположена в виде прямоугольника; в заглавной строке стоят цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; в заглавном столбце цифры $0, 1, 2, \ldots$; сначала (для небольших модулей) их немного.

Чтобы найти индекс данного числа, отыскиваются десятки этого числа в заглавном столбце, а единицы - в заглавной строке. На пересечении строки и столбца, идущих от этих десяток и единиц, внутри таблицы и находятся искомый индекс данного числа. Аналогично находится и число по данному индексу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулеков Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва "Высшая школа"1979г.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел Москва. 1966г.

ГЕОМЕТРИЯ РИМАНОВЫХ СУБМЕРСИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

Турсунов Б. А.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан,
bakbarovich@mail.ru;

В этой работе изучена геометрия некоторых субмерсий, которые возникают при исследовании геометрии орбит векторных полей Киллинга. Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи ее важностью в геометрии и других областях математики [1-3].

В работе [1] рассмотрена n векторных полей Киллинга в R^n, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n = 2k + l$, построена следующая риманова субмерсия $\pi : R^{n+k} \to R^n$ формулой:

$$\pi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{n+k} \in R^{n+k}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^n$ и

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= t_{2i-1}\cos t_{n+i} - t_{2i}\sin t_{n+i}, & \\ x_{2i} &= t_{2i-1}\sin t_{n+i} + t_{2i}\cos t_{n+i}, & i = \overline{1,k} \\ x_{2k+j} &= t_{2k+j}, & j = \overline{1,l} \end{aligned}$$

и изучена ее геометрия:

Теорема. Композиция римановых субмерсий является тоже римановым.

В [3] доказана что, $\pi : R^3 \to R^2 : \pi(t_1, t_2, t_3) = \{t_1 cost_3 - t_2 sint_3, t_1 sint_3 + t_2 cost_3\}$ является риманова субмерсия и изучена ее геометрия. В силу теоремы, $\pi : R^3 \to R^1 : \pi(t_1, t_2, t_3) = \{t_1 cost_3 - t_2 sint_3\}$ или $\pi : R^3 \to R^2 : \pi(t_1, t_2, t_3) = \{t_1 sint_3 + t_2 cost_3\}$ также является риманова субмерсия, т.е. проекция – самый простой пример для римановой субмерсий. Кстати, для эти субмерсии выполнено условии 1-4 теоремы 2 в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга. //Узбекский математический журнал. Ташкент. 2017. №2. С. 76–83.

2. Tursunov B.A. Geometry of submersions generated by killing vector fields. //International journal of physics and mathematical sciences. India. 2016. vol. 6 (1). p. 6–10.

3. Зойидов А.Н., Турсунов Б.А. О геометрии субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны. //Узбекский математический журнал. Ташкент. 2015, №2. С. 27–34.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ГРУПП $Sp(n)$

Муминов.К К.[1], Журабоев С. С.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
m.muminov@rambler.ru;
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Как известно, одной из важных задач классической теории инвариантов являлась проблема классификации элементов конечномерного векторного пространства V над полем k относительно действия алгебраической линейной группы $G \subset GL(n, K)$. При этом, инвариантами такого действия называли не произвольные функции на V, постоянные на орбитах группы G, а лишь полиномиальные (т. е. записываемыев координатах как многочлены) или, более обще, рациональные функции. Полиномиальные инварианты группы

G образуют подалгебру в алгебре $k\,[V]$ всех полиномиальных функций на V . Эту подалгебра называют алгеброй инвариантов, и обозначают через $k[V]^G$. В задачу теории инвариантов входит построение образующих алгебры $k[V]^G$ и нахождение определяющих соотношений между ними. Решения этих задач называются соответственно первой и второй основными теоремами теории инвариантнов [1]. Первая и вторая основные теоремы и методы их доказательства для классических групп, включая линейные, специальные линейные, ортогональные и симплектические группы, приведены в книге Вейля [2].

В данной работе рассматривается проблема построения система образующих алгебры $k[V]^G$ инвариантных алгебраических функций относительно действия группы вещественным представлением $Sp\,(n)$.

Пусть H^n- n-мерное векторное пространство над телом кватернионов H, и пусть $GL\,(H^n)$ группу всех обратимих линейных преобразований H^n и

$$Sp\,(n) = \{\sigma \in GL\,(H^n) : \langle \sigma x, \sigma y\rangle = \langle x, y\rangle\}\,,$$

где $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{l=1}^{n} x_l \bar{y}_l$, $x, y \in H^n$, а $\bar{y}_l-$эрмитово сопряженный элемент к y_l. Теперь, H^n можно рассматривать как $4n-$мерное вещественное векторное пространство. Обозначим это вещественное векторное пространство через V. Как множество, H^n совпадает с V. Тогда каждый элемент $\sigma \in GL\,(H^n)$ определяет линейное преобразование $\sigma' \in GL\,(V)$, и $GL\,(H^n)$ можно рассматривать как подгруппу группы $GL\,(V)$ с помощью изоморфизма в $\sigma \to \sigma'$. Тогда $Sp\,(n)$ можно рассматривать также как подгруппу в $GL\,(V)$. Это подгруппа называется *вещественным представлением* $Sp\,(n)$. Далее мы рассматриваем только вещественное представление $Sp\,(n)$, которое обозначается Γ.

Обозначим через $\Omega_1\,(\vec{x}, \vec{y})\,,\ \Omega_i\,(\vec{x}, \vec{y})\,,\ \Omega_j\,(\vec{x}, \vec{y})$и $\Omega_k\,(\vec{x}, \vec{y})$ коэффициенты при $1,\ i,\ j,\ k$ в метрической форме $\langle x, y\rangle$ соответственно $\langle x, y\rangle = \Omega_1\,(\vec{x}, \vec{y}) - \Omega_i\,(\vec{x}, \vec{y})\,i - \Omega_j\,(\vec{x}, \vec{y})\,j - \Omega_k\,(\vec{x}, \vec{y})\,k$. где $x, y \in H^n$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $x \approx \vec{x}$, $y \approx \vec{y}$, ($\approx -$ операция овеществления).

Тогда, как легко видеть, $\Omega_1\,(\vec{x}, \vec{y})$ (соответственно $\Omega_\alpha\,(\vec{x}, \vec{y})\,,\ \alpha \in i, j, k$) является *симметричной* (соответственно *кососимметричной*) вещественнозначный билинейной формой на вещественно векторном пространстве V . Согласно этих утверждениях можно определяет группы Γ следующим образом,[1]:

$$\Gamma = \{\sigma' \in GL\,(V) : \Omega_\alpha\,(\sigma'\vec{x}, \sigma'\vec{y}) = \Omega_\alpha\,(\vec{x}, \vec{y})\,,\ \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \alpha \in \{1, i, j, k\}\}$$

Теорема 1.*Пусть $k = R$ и $G = \Gamma$. В этом случае, конечный система $G-$инвариантных многочленов в виде $\Omega_\alpha\,(x_l, x_m)$ является систему образующих алгебры $k[V]^G$, где $\alpha \in \{1, i, j, k\}$, $x_l, x_m \in V$, $l, m = \overline{1, 4n}$.*

Пусть S_n - это группа подстановок, составленная из элементов множества $I = \{1, 2, ..., n\}$. Известно, что любой элемент $\sigma \in S_n$ можно выразить через в виде разложение независимых циклов. Через ρ_τ, обозначаем отображения что, однозначное сопоставить множество I к σ_τ. т.е.

$$\rho_1 = \{(1, 1)\,,\,(2, 2)\,,\,...,(n, n)\}\,, ..., \rho_{n!} = \{(1, n)\,,\,(n, n-1)\,,\,...,(2, 1)\}$$

где $\tau = \overline{1, n!}$. Таким образом, обозначим через A_ρ множество всех такое отображение, а также через $F_{\rho_\tau}^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n}$ обозначаем следующие выражение

$$\Omega_{\alpha_1}\left(x_{m_{l_1}}, x_{m'_{l_1}}\right) \cdot \Omega_{\alpha_2}\left(x_{m_{l_2}}, x_{m'_{l_2}}\right) \cdot ... \cdot \Omega_{\alpha_n}\left(x_{m_{l_n}}, x_{m'_{l_n}}\right)$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_{n!} \in \{1, i, j, k\}$,$\left\{m_{l_s}, m'_{l_s}\right\} = \rho_\tau^{-1}(l_s)$, $l_s \in I,\ \tau = \overline{1, n!}$.

Теорема 2. *Пусть система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n \in V$ - это система действительных векторов, соответствующая системе линейных независимых векторов $x_1, x_2, ..., x_n \in H^n$. В этом случае следующая соотнешени справедливо всякий для $\alpha_s \in \{1, i, j, k\}$, что удовлетворяющего условию $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n = \pm 1$:*

$$F(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = \sum_{\rho_\tau \in A_\rho} (-1)^{n-r} c_\rho^\alpha F_\rho^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n} = 0$$

где $r-$ число циклов в разложении σ_τ, соответствующем отображению ρ_τ, а также

$$c_{\rho_\tau}^\alpha = sign\left\{\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n\right\} sign\left\{\Omega_{\alpha_1}\left(\vec{x}_{m_{l_1}}, \vec{x}_{m'_{l_1}}\right) \cdot ... \cdot \Omega_{\alpha_n}\left(\vec{x}_{m_{l_n}}, \vec{x}_{m'_{l_n}}\right)\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг Э. Б. , Попов В. Л. Теория инвариантов, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1989.
2. Weyl H. The classical groups. Their invariants and representation. Princeton. Univ. Press. 1997.
3. Nagayoshi Iwahori. Some remarks on tensor invariants of O(n), U(n), Sp(n). Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 10, No. 2, 1958.
4.Муминов К. К. , Чилин В. И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.

КОМПАКТНОСТЬ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Заитов А. А.[1], Бешимова Д. Р.[2]

[1] Ташкентский архитектурно строительный институт, Ташкент, Узбекистан, adilbek_zaitov@mail.ru;
[2] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан, dilorom.beshimova@mail.ru

Исследование воздействий функторов на топологическую группу преобразований началось в работе [1]. Авторы отмеченной работы установили результаты в этом направлении, касающиеся воздействию функтора вероятностных мер на топологическую группу преобразований. В данной работе мы установим некоторые результаты, относящиеся воздействию функтора гиперпространства на топологическую группу преобразований.

Группа топологических преобразований есть тройка (G, X, α), где G – топологическая группа, X – хаусдорфово топологическое пространство, $\alpha\colon\ G \times X \to X$ – такое непрерывное отображение, что

1) $\alpha(g_1,\ \alpha(g_2,\ x)) = \alpha(g_1 g_2,\ x)$ для всех $g_1,\ g_2 \in G$ и $x \in X$;

2) $\alpha(e,\ x) = x$ для всех $x \in X$, где e – единица группы G [2].

Отображение $\alpha\colon\ G \times X \to X$ называется действием группы G на пространстве X. Пространство X фиксированным действием α группы G считается G-пространством.

Пусть X – некоторое G-пространство и $x \in X$. Подмножество

$$G(x) = \{g(x) \in X : g \in G\}$$

называется [3] орбитой точки x (относительно действия группы G). Если $g(x) = h(y)$ для некоторых g, $h \in G$, x, $y \in X$, то $G(x) = G(y)$. Таким образом, орбиты $G(x)$ и $G(y)$ любых двух точек x, $y \in X$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Через X/G обозначается множество, элементами которого являются орбиты $G(x)$ действия группы G на X, т. е.

$$X/G = \{G(x) : x \in X\}.$$

Пусть $\pi\colon X \to X/G$ – естественное отображение, сопоставляющее точке x ее орбиту $G(x)$:

$$\pi(x) = G(x).$$

Тогда X/G обычным образом наделяется фактортопологией (множество $U \subset X/G$ отрыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}U$ открыто в X). Полученное топологическое пространство X/G называется пространством орбит (пространства X относительно действия группы G).

Если $A \subset X$, то множество $\pi^{-1}\pi(A) = \{g(a) : g \in G, a \in A\}$ является объединением орбит элементов из A и называется насыщением множества A. Для открытого $V \subset X$ множество $\pi^{-1}\pi(V) = \underset{x\in V}{\cup} G(x) = G(V)$ тоже открыто, что по определению означает, что множество $\pi(V)$ открыто в X/G. Следовательно, проекция $\pi\colon X \to X/G$ – непрерывное открытое отображение.

Рассмотрим множество $\exp X$ всех непустых замкнутых подмножеств тихоновского пространства X с топологией Виеториса. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств положим

$$(\exp f)(F) = f(F), \qquad F \in \exp X.$$

Этим равенством определено отображение $\exp f : \exp X \to \exp Y$. Это отображение непрерывно.

Для топологической группы G преобразований (G, X, α) положим

$$\exp(G) = \{\exp(\alpha_g) : g \in G\}.$$

Множество $\exp(G)$ является [4] группой относительно операции

$$\exp(\alpha_{g_1})\exp(\alpha_{g_2}) = \exp(\alpha_{g_1g_2}).$$

При этом $\exp(\alpha_e)$ – единица группы $\exp(G)$.

Для действия $\alpha\colon G \times X \to X$ можно определить действие

$$\alpha^{\exp}\colon \exp G \times \exp X \to \exp X$$

по правилу

$$\alpha^{\exp}(\exp(\alpha_g), F) = \exp(\alpha_g)(F).$$

Для топологической группы (G, X, α) преобразований тройка $(\exp(G), \exp X, \alpha^{\exp})$ является [4] топологической группой преобразований.

Следующее утверждение является основным результатом настоящей заметки.

Теорема 1. Пусть группа G компактна и X – некоторое G-пространство. Тогда:

1) пространство $\exp X/\exp(G)$ хаусдорфово;

2) проекция $\pi\colon \exp X \to \exp X/\exp(G)$ – замкнутое отображение;

3) проекция $\pi\colon \exp X \to \exp X/\exp(G)$ – собственное отображение (т. е. прообраз любого компактного множества компактен);

4) компактность пространства $\exp X$ равносильна компактности пространства $\exp X/\exp(G)$;

5) локальная компактность пространства $\exp X$ равносильна локальной компактности пространства $\exp X/\exp(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Madirimov M., Zaitov A. A. Equivariant maps of probability measures space. *Bull. Inst. Math.*, 2021, Vol.4, №3, pp. 66-74. [In Russian]

2. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. – Москва, Наука, 1980. – 440 с.

3. Мадиримов М. Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований. – Ташкент, Фан, 1987. – 144 с.

4. Жумаев Д. И., Бешимова Д. Р. Эквивариантные отображения гиперпространства. //Бюллетень института математики (сдано в печать).

III SHO'BA: DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKA

СЕКЦИЯ № 3: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

SECTION No. 3: DIFFERENTIAL EQUATION AND MATHEMATICAL PHYSICS

ON A PROBLEM FOR TIME-FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION ON A METRIC STAR GRAPH.

Abdullaev O. Kh.[1], **Djumaniyazova Kh. A.**[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
obidjon.mth@gmail.com

[2] Tashkent financial institute, Tashkent, Uzbekistan
kuchkarova-91@mail.ru

Let $\Gamma = V \cup E$ be a metric star graph, consisting of a finite set of vertices (nodes) $V = V_i \cup O$ where $V_i = \{v_k\}_{k=1}^{3}$ is set of boundary vertices and at one point O, we call a set of interior vertices of the graph. Besides, a finite set of edges $E = \{B_k\}_{k=1}^{3}$ (such as heat conducting elements) connecting these nodes.

We define coordinate x_k on the each bound B_k of the graph with isometric mapping it to the line intervals $(0, L_k)$ such that $L_k < \infty$, $(k = 1, 2, 3)$.

We consider the following time fractional equation

$$0 = \begin{cases} D_{t_0 t}^{\alpha-1} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & T > t > t_0 \\ D_{0t}^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & 0 < t < t_0 \end{cases} \tag{1}$$

on the each edges $(B_k\{\, x_k : 0 \le x \le L_k\})$ of the over defined metric graph, where $1 < \alpha < 2$, and $D_{ax}^{\alpha} f$ is the Riemann-Liouville fractional derivatives [1]:

$$\left(D_{ax}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int\limits_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1, \alpha > 0, x > a.$$

Problem formulation: To find a solution $u^{(k)}(x,t)$ of the equation (1) in domain $B_k \times (0, T)$, with the following conditions:

1. solution $u^{(k)}(x,t)$ belongs to the class:

$$u^{(k)}(x,t) \in C\left([0, L] \times (0, T]\right) \cap C_{x,t}^{2,0}\left((0, L) \times (0, T)\right)$$

2. takes places initial-boundary and gluing conditions:

$$u^{(1)}(0,\mathrm{t}) = u^{(2)}(0,t) = u^{(3)}(0,t)\,, \quad t \in [0, T]\,; \tag{2}$$

$$u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + u_x^{(3)}(0,t) = 0, \;\; t \in (0, T)\,; \tag{3}$$

$$u^{(k)}\left(\mathrm{L}_k,t\right)=0,\;\; t\in[0,T]\,,\;\; k=1,2,3; \tag{4}$$
$$\lim_{t\to t_0+0} D_{t_0t}^{\alpha-2}u^{(k)}(x,t)=\lim_{t\to t_0-0}u^{(k)}(x,t),\;\; x\in B_k;$$
$$\lim_{t\to t_0+0} D_{t_0t}^{\alpha-1}u^{(k)}(x,t)=\lim_{t\to t_0-0}u_t^{(k)}(x,t),\;\; x\in B_k;$$
$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u^{(k)}(x,t)=\varphi^{(k)}\left(x\right),\;\; x\in B_k;$$

where $\varphi^{(k)}\left(x\right),\;\; k=1,2,3$ are sufficiently smooth functions.

Discussion

Using by the separate variables method for the equation (1) we will get ODE integer order:

$$\frac{d^2}{dx^2}X^{(k)}(x)+\lambda^2X^{(k)}(x)=0,\quad \lambda\in R\backslash\{0\},\quad k=1,2,3 \tag{5}$$

and ODE fractional order

$$D_{t_0t}^{\alpha-1}T^k(t)+\lambda^2T^k(t)=0,\;\; T>t>t_0 \;\text{ and }\; D_{ot}^{\alpha}T(t)+\lambda^2T(t)=0,\;\; 0<t<t_0 \tag{6}$$

moreover, from the conditions (2)-(4), we receive

$$X^{(1)}\left(0\right)=X^{(2)}\left(0\right)=X^{(3)}\left(0\right),$$
$$\frac{d}{dx}X^{(1)}(0)+\frac{d}{dx}X^{(2)}(0)+\frac{d}{dx}X^{(3)}(0)=0,$$
$$X^{(k)}\left(L_k\right)=0,\quad k=1,2,3.$$

We would like to note, that eigenvalues and corresponding orthonormal eigenfunctions of the Eq.(5), was found in work [2], in case $L_1=L_2=L_3=L$.

On the other hand, we recall, that a solution of the Eq.(6) will be represented on the form (see [3]):

$$T_n^{(k)}(t)=C_1t^{\alpha-2}E_{\alpha-1,\alpha-1}\left(-\lambda_k^2t^{\alpha-1}\right),\;\; t_0<t<T;$$
$$T_n^{(k)}(t)=C_2t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda^2t^{\alpha}\right)+C_3t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda_k^2t^{\alpha}\right),\;\; 0<t<t_0.$$

Hence, solution of the investigate problem we will present, as

$$u^{(k)}\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left(C_1t^{\alpha-2}E_{\alpha-1,\alpha-1}\left(-\lambda^2t^{\alpha-1}\right)\right),\;\; \textit{for}\; t_0<t<T;$$

$$u^{(k)}\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left(C_2t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda^2t^{\alpha}\right)+C_3t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda^2t^{\alpha}\right)\right),\;\; \textit{for}\; 0<t<t_0.$$

Under certain conditions to the given function unique solvability of the investigated problem is proved.

REFERENCES

1. A.A Kilbas, H.M Srivstava, J.J Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science. B.V., Amsterdam. (2006).

2. Abdullaev O. Kh., Khujakulov J.R. On a problem for the time–fractional diffusion equation on a metric graph. Uzbek Mathematical Journal. 2017. 4. pp. 3- 12.

3. Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation. Vestnik KRAUNC. Fiz – mat. nauki. 2018. 1. pp. 21-31.

ON THE NOLOCAL PROBLEMS IN TIME FOR TIME-FRACTIONAL SUBDIFFUSION EQUATION

Ashurov R. R.[1], **Fayziev Yu. E.**[2]
[1]The Institute of Mathematics of Uznekistan, Tashkent, Uzbekistan,
ashurovr@gmail.com;
[2]National University of Uznekistan, Tashkent, Uzbekistan,
fayziev.yusuf@mail.ru

The nonlocal boundary value problem, $d_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t)$ $(0 < \rho < 1,\ 0 < t \leq T)$, $u(\xi) = \alpha u(0) + \varphi$ (α is a constant and $0 < \xi \leq T$), in an arbitrary separable Hilbert space H with the strongly positive selfadjoint operator A, is considered. The operator d_t on the left hand side of the equation expresses either the Gerasimov-Caputo derivative or the Riemann-Liouville derivative; naturally, in the case of the Riemann - Liouville derivatives, the nonlocal boundary condition should be slightly changed. Existence and uniqueness theorems for solutions of the problems under consideration are proved. The influence of the constant α on the existence of a solution to problems is investigated. Inequalities of coercivity are obtained and it is shown that these inequalities differ depending on the considered type of fractional derivatives. The inverse problems of determining the right-hand side of the equation and the function φ in the boundary conditions are investigated.

If $\alpha = 0$ (and $\xi = T$), then these problems are called *the backward problems*. The backward problems in case of the Gerasimov-Caputo derivatives were studied in detail in [1]. The work [2] is devoted to the study of the backward problems in case of the Riemann-Liouville derivatives. It is well known, that regardless of the fact that the classical or fractional derivative is taken into the equation, this problem is ill-possed in the sense of Hadamard.

In case of the classical derivative: $d_t^\rho u(t) = u'(t)$ the above nonlocal boundary value problem has been extensively studied by A. O. Ashyralyev et al. (see, for example, [3]). As shown in this paper the problem, in contrast to the backward problem, is coercively solvable in some spaces of differentiable functions.

REFERENCES

1. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, J. Math. Anal. Appl., 382, 2011, 426-447.
2. Alimov Sh.A., Ashurov R.R. On the backward problems in time for time-fractional subdiffusion equations, 2020, https://www.researchgate.net/ publication/351575279
3. Ashyralyev A. O., Hanalyev A. Sobolevskii P. E. Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations, Abstract and Applied Analysis 6 (1), 2001, 53Џ61.

PROBLEM OF REGULARIZATION FOR GROWING POLYHARMONIC FUNCTIONS OF SOME CLASS.

Ashurova Z. R.[1], **Jurayeva N. Y.**[2]
[1]Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
zashurova@mail.ru
[2]Samarkand branch of Tashkent university of information technologies, Samarkand, Uzbekistan
nodira8181@mail.ru

In this work we get theorems for some polyharmonic functions, which determined in a unlimited strip. In this work is discussed continuations polyharmonic function $u(x)$, on its meanings, and meanings of its normal derivative, on a smooth part of border S, of infinite domain D. Let R^m - material space, $x = (x_1, x_2, ...x_m)$, $y = (y_1, y_2, ...y_m)$,$x, y \in R^m$,
$x' = (x_1, .., x_{m-1}, 0)$,$y' = (y_1, .., y_{m-1}, 0)$,
$r = |x - y|$,$s = |x' - y'|$, $h = \frac{\pi}{\rho}$,$\rho > 0$,$\alpha^2 = s$.

D -the unlimited domain lying in a layer $\{y : y = (y_1, y_2, ...y_m), y_j \in R, j = 1, 2, ..m - 1; 0 < y_m < h\}$ with border, $\partial D = \{y : y = (y_1, y_2, ...y_m), y_m = 0\} \cup S$, $S = \{y : y_m = f(y_1, .., y_{m-1})\}$ where $f(y_1, .., y_{m-1})$ has limited first order private derivative.

Cauchy problem: Let

$$u \in C^{2n}(D) \quad \Delta^n u(y) = 0, y \in D$$

$$u(y) = F_0(y), \Delta u(y) = F_1(y), ..., \Delta^{n-1}u(y) = F_{n-1}(y), y \in S$$

$$\frac{du(y)}{d\bar{n}} = G_0(y)\frac{d\Delta u(y)}{d\bar{n}} = G_1(y), ..., \frac{d\Delta^{n-1}u(y)}{d\bar{n}} = G_{n-1}(y), y \in S \tag{1}$$

Where $F_i(y)$, $G_i(y)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, given on $S(S \subset \partial D)$ continuous function, $\bar{n}$ -external normal to ∂D . It is required to restore $u(y)$ in D.
Let's assume, that the solution $u(y)$ of problem (1) is exist and differentiable to endpoints of border up to $2n-1$ order and satisfies to the certain condition of growth (class of a correctness), which provides uniqueness of the solution.
Let us define $\varphi_\sigma(y, x)$ and $\Phi_\sigma(y, x)$: if $m = 2k, k = 2, 3, ...$ than

$$(-1)^k(k - 2)!\varphi_\sigma(y, x)K(x_m) = \frac{d^{k-2}}{ds^{k-2}}Im[\frac{K(\omega)}{\sqrt{s}(\omega - x_m)}], \omega = i\sqrt{s} + y_m, \tag{2}$$

if $m = 2k + 1, k = 2, 3, ..$ than

$$(-1)^{k-1}2^{-k}(k - 2)!!\varphi_\sigma(y, x)K(x_m) = \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}Im\int_0^\infty[\frac{K(\omega)}{(\omega - x_m)}]\frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \omega = i\sqrt{s + u^2} + y_m. \tag{3}$$

At all odd $m \geq 3$, and also even m with a condition $2n < m$, the function $K(\omega)$ satisfies

$$K(\omega) = \frac{exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2))}{(\omega + x_m + 3h)^{n+1}} \quad m = 2n + 1, n \geq 1$$

$$K(\omega) = \frac{exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2))}{(\omega + x_m + 3h)^n} \quad m = 2n, n \geq 2.$$

Theorem 1. Function $\Phi_\sigma(y, x)$ defined by formula (2)-(3) is polyharmonic function order n, $s > 0$.

Let $B_\rho(D)$ is the space of polyharmonic functions in D which have continuous private derivatives to endpoints of border up to $2n - 1$ order and satisfying a condition:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(|\Delta^k u(y)| + |grad\Delta^{n-k-1}u(y)|) \leq Cexp(exp\rho_2(y')). \tag{4}$$

Theorem 1. Let function $u \in B_\rho(D)$ for any point $y \in \partial D$ satisfies the inequality

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^k u(y)| + |\frac{\partial \Delta^{n-1-k} u(y)}{\partial \overline{n}}| \leq C exp(a cos \rho_3 (y_1 - \frac{h}{2}) exp \rho_3 |y'|), \tag{5}$$

where $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho$.
Then for any point $x_0 \in D$ takes place

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D} [\Delta^k \Phi(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{n-1-k} u(y)}{\partial \overline{n}} - \Delta^{n-1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi(y, x_0)}{\partial \overline{n}}] ds.$$

Theorem 2. Let $u(x)$ be solution of (1)-(2). If $u \in B_{\rho_2}(D_1)$ and for any $y \in \partial D$ satisfies conditions of growth (5). Suppose

$$\forall y \in \partial D \setminus S \quad |\frac{\partial \Delta^{n-1-k} u(y)}{\partial \overline{n}}| + |\Delta^{n-1-k} u(y)| \leq M$$

then

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C_\rho M C(\sigma) exp(-\sigma x_m - a ch \rho_1 \alpha cos \frac{\rho_1 h}{2}), \sigma \geq \sigma_0 > 0, x \in D,$$

where

$$u_\sigma(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_S [G_{n-k-1}(y) \Delta^k \Phi_\sigma(y, x) - F_{n-k-1}(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n}] ds$$

and $C(\rho)$ -constant which depends only from ρ and dimension of space R_m.

REFERENCES

1. Yarmukhamedov. Sh. Ya. a Task Cashy for polyharmonic of the equation.// The reports of WOUNDS. 2003. Volume 388, №2. p 102-115.
2.Ashurova.Z.R., Jurayeva.N.YU., Jurayeva U.Yu., Task Cauchy and Carleman function, // Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. 5 may, 2020. http://saarj.com, Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra India p.371-378
3.Г. М.Голузин. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций, // Мат. сборник.1933. №40. С.144-149.

SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL IN THREE - DIMENSIONAL TIME-OPTIMAL PROBLEM

Bakhramov J. A.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
bahramovjasurbek@gmail.com

We consider the time-optimal equation for the equation

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A[u(\cdot, \cdot)](t, x) + v(t, x) \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad Mu(t,s) = w(t,s), \tag{2}$$

where A is a uniformly elliptic differential operator, $t \geq 0$, $x \in D$, D – regular domain with Lyapunov boundary Γ, $s \in \Gamma$, M is a differential operator whose order is less than the order A.

It is hard task to apply Pontryagin maximum principle to problem (1) and (2). So, Chernousko applied the method of expansion in the system of eigenfunctions of the operator A [1]. As a result of this decomposition, the problem reduces to a system

$$\frac{d}{dt} y_k = -\lambda_k y_k + v_k, \qquad y_k(0) = y_{k0}\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

In this work, to construct suboptimal control, is used the method of grouping terms of a Fourier series. Unfortunately, its effectiveness is strictly related to the specific type of eigenfunctions $\varphi_k(x)$, therefore, here the method is demonstrated for the operator $A = \frac{d^2}{dx^2}$.

Thus, consider the problem

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(t,x), & |v(t,x)| \leq v_0, \quad t \geq 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,x) = u_0(x), & u(t,0) = 0, & u(t,\pi) = 0. \end{array} \tag{4}$$

Then the eigenvalues are equal $\lambda_k = -k^2$ and the system of eigenfunctions consists of $\varphi_k(x) = \sin kx$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, which will be a complete orthogonal basis of the space $L_2[0,\pi]$.

Consider such a constraint

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |\ a_k \sin kx + b_k \sin 2kx + c_k \sin 3kx\ | \leq \mu_k, \qquad k \in L, \tag{5}$$

where the sequence μ_k is chosen so that $\sum\limits_{k \in L} \mu_k = v_0$ condition is satisfied. The set (a_k, b_k, c_k) satisfying inequality (5) is denoted by P_k. Let

$$P = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \max_{0 \leq t \leq \pi} |a \sin t + b \sin 2t + c \sin 3t\,| \leq 1 \right\}.$$

Then $P_k = \mu_k P$. As a result, the problem of constructing a suboptimal control is reduced to the time-optimal control problem for a three-dimensional system

$$\dot{x} = -x + a,\ \dot{y} = -4y + b,\ \dot{z} = -9z + c,\ (a,b,c) \in P. \tag{6}$$

First of all, we note that in auxiliary problem (6), for each initial point (x_0, y_0, z_0), there is a unique time-optimal control [2]. Therefore, the optimal controls of problem (6) coincide with the extremal controls of the Pontryagin maximum principle [3].

Theorem The function

$$\hat{v}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k^0(t) \sin kx$$

will be a suboptimal control in the problem (4) for the initial state $u_0(x)$.

REFERENCES

1. Chernousko F.L. Bounded controls in distributed-parameter systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1992, Vol.56, No.5, pp.810–826.

2. Ladyzhenskaya O.A. The boundary value problems of mathematical physics. New York: Springer, 1985.

3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, 1962.

ON SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION

Dekhkonov F. N.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
f.n.dehqonov@mail.ru;

Definition. Let $A \subset \mathbb{R}$ be a set containing more that one point and $f : A \to A$ a function such that f is not the *identity* Id. Then f is an *involution* if

$$f^2 \equiv f \circ f = Id$$

or, equivalently, if

$$f = f^{-1}.$$

If $A = \mathbb{R}$, we say that f is a strong involution [1].

Example 1. The following involutions are the most common examples:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ is an involution known as *reflection*.
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ known as *inversion*.
3. Let $a, b, c \in \mathbb{R}$, $cb + a^2 \neq 0$, $c \neq 0$,

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx-a},$$

is a family of functions known as *bilinear involutions*.

Differential equations with involutions were introduced for the first time [1] and [2] and since then have become an important part in the general theory of functional differential equations, with applications to certain biomedical models [3], stability of motion [4], and the pantograph equation [5]. They can be transformed into ordinary differential equations and thus provide an abundant source of relations with analytic solutions, as well as heuristic ideas for equations of more general nature.

Example 2. The solution of the initial-valu problem for the differential equation with reflection of the argument,

$$y'(x) = a\, y(-x), \quad y(0) = y_0.$$

Theorem 1. Let the initial value problem

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(t, x(t), y(t), y(f(t))), \\ y'(t) = F_2(t, x(t), y(t), x(f(t))), \end{cases} \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

satisfy the following hypotheses:

(1) The function $f(t)$ is a continuously differentiable strong involution with a fixed point t_0.

(2) The functions F_1, F_2 are defined and are continuously differentiable in the whole space of its arguments.

(3) The given equations are uniquely solvable with respect to $y(f(t))$, $x(f(t))$:

$$y(f(t)) = G_1(t, x(t), y(t), x'(t)),$$

$$x(f(t)) = G_2(t, x(t), y(t), y'(t)).$$

Then the solution of the system of ordinary differential equations

$$x''(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x(f(t))}\, f'(t)\, F_1(f(t), x(f(t)), y(f(t)), y(t)),$$

and

$$y''(t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(f(t))}\, f'(t)\, F_2(f(t), x(f(t)), y(f(t)), x(t)),$$

with the initial conditions

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = F_1(t_0, x_0, y_0, y_0),$$

and

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = F_2(t_0, x_0, y_0, x_0).$$

Example 3. We consider the following initial value problem

$$\begin{cases} x'(t) = y(f(t)), \\ y'(t) = x(f(t)), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad f(t) = -t.$$

REFERENCES

1. Wiener J. Differential equations with Involutions, Differential Equations, №5, pp. 1131-1137, 1969.

2. Wiener J. Differential equations in Partial Derivatives with Involutions, Differential Equations, №6, pp. 1320-1322, 1970.

3. Busenberg S., Travis C. On the Use of Reducible-Functional Differential Equations in Biological Modeles, J. Math. Anal. Appl, №89, pp. 46-66, 1982.

4. Castelan W.G., Infante E.F. On a Functional Equation Arising in the Stability Theory of Difference-Differential Equations, Quart. Appl. Math, №35, pp. 311-319, 1977.

5. Derfel G., Iserles C. The Pantograph Equation in the Complex Plane, J. Math. Anal. Appl, №213, pp. 117-132, 1997.

PROBLEM OF DETERMINING TWO RELAXATION FUNCTIONS IN THE INTEGRO - DIFFERENTIAL EQUATION OF RIGID HEAT CONDUCTOR

Durdiev D.K.[1], Jumaev J.J.[2]

Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan,
Bukhara, Uzbekistan
[1]d.durdiev@mathinst.ru, [2]jonibekjj@mail.ru

We consider the following one-dimensional integro-differential equation of the heat conduction

$$\theta_t(t,x) = -\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)}\theta(t,x) + \frac{k(0)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(t,x) +$$
$$+\int_0^t \left[\frac{k'(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(\tau,x) - \frac{\alpha''(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta(\tau,x)\right] d\tau + \frac{r(t,x)}{\alpha(0)}. \quad (1)$$

It is supposed $\alpha(0)$ and $k(0)$ are given numbers such that $k(0) > 0$, $\alpha(0) \neq 0$. Rewrite the equation (1) in the compact form:

$$\theta_t(t,x) = f(t,x) + C\theta_{xx}(t,x) - a(0)\theta(t,x) + \int_0^t \left[Cb(t-\tau)\theta_{xx}(\tau,x) - a'(t-\tau)\theta(\tau,x)\right] d\tau \quad (2)$$

for all $t \geq 0, x \in (0;l)$ and consider the initial-boundary value problem with

$$\theta(0,x) = \theta_0(x), \quad (3)$$

$$\theta(t,0) = \mu_1(t); \quad \theta(t,l) = \mu_2(t); \quad \theta_0(0) = \mu_1(0); \quad \theta_0(l) = \mu_2(0); \quad (4)$$

the initial and boundary conditions, where

$$C = \frac{k(0)}{\alpha(0)},\ a(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)},\ b(t) = \frac{k'(t)}{k(0)},\ f(t,x) = \frac{r(t,x)}{\alpha(0)}.$$

In equalities (3) and (4) $\theta_0(x)$, $\mu_1(t)$ and $\mu_1(t)$ are given functions. If $r(t,x)$, $\theta_0(x)$, $\alpha(t)$, $k(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ are given functions, then finding the function $\theta(t,x)$ from (2)-(4) is called as a direct problem.

We pose the inverse problem. For given functions $r(t,x)$, $\theta_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ it is required to determine the functions $k(t)$, $\alpha(t)$, $t > 0$ of the integral term in (2) using additional informations about the solution of the direct problem (2)-(4):

$$\theta\mid_{x=x_0} = \psi_0(t), \theta\mid_{x=x_1} = \psi_1(t),\ x_0, x_1 \in (0,l),\ t > 0 \quad (5)$$

In this case $\psi_0(t), \psi_1(t)$, $t > 0$ are assumed to be given functions.

Since the method for studying the inverse problem allow to find simultaneously the solution to the inverse problem and the solution to the direct problem, then in the sequel, we will call the inverse problem as a problem of determining functions $\theta(t,x), k(t), \alpha(t)$ from equations (2)-(5).

Theorem(existence and uniqueness). *Assume the conditions* $\theta_0(x) \in C^2(0,l)$, $(\psi_0(t), \psi_1(t)) \in C^2[0;T]$, $\mu_i(t) \in C^2[0,T]$, $i = 1,2$, $\theta_0(x_0) = \psi_1(0)$, $\theta_0(x_1) = \psi_2(0)$, $\Delta \neq 0$, $\theta_0(0) = \mu_1(0)$, $\theta_0(l) = \mu_2(0)$ *are hold. Then there exists sufficiently small number* $T^* \in (0,T)$ *that the solution to the equations (2)-(5) in the class of functions* $\vartheta(t,x) \in C^{1,2}(D_{T^*})$, $a(t) \in C^2[0,T^*]$, $b(t) \in C^1[0;T^*]$ *exist and unique, where* $D_{T^*} = \{(x,t) | x \in (0,l), t \in [0,T^*]\}$.

REFERENCES

1. R.K. Miller , An integro–differential equation for rigid heat conductors with memory // *Journal of mathematical analysis and applications, 66 (1978), 313–332.*

2. D.K. Durdiev , Zh.Zh. Zhumaev, Problem of Determining the Thermal Memory of a Conducting Medium // *Differential Equations,56:6(2020), 785–796.*

APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION WITH A VARYING DIRECTION OF TIME BY THE QUASI-INVERSE METHOD

Fayazov K. S.[1], Rakhmatov Kh. Ch.[2]
Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan
[1]kudratillo52@mail.ru, [2]khondamir.rakhmatov@gmail.com

Consider parabolic equation

$$u_t\left(x,t\right)=sign\left(x\right)u_{xx}\left(x,t\right)+f(x,t). \tag{1}$$

in the $D=D_1\cup D_2$, where $D_1=\left\{(x,t):\ -1<x<0\right\},\ D_2=\left\{(x,t):\ 0<x<1\right\}$.

Problem. Find the function $u\left(x,t\right)\in W_2^{2,1}\left(D\right)\cap C^{1,0}\left(\bar{D}\right)$ which is solution of the equation (1) in the domain D and satisfies following initial

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ -1\leq x\leq 1, \tag{2}$$

boundary

$$u(-1,t)=0,u(1,t)=0,0\leq t\leq T \tag{3}$$

and gluing conditions

$$u\left(-0,t\right)=u\left(+0,t\right),u_x\left(-0,t\right)=u_x\left(+0,t\right),0\leq t\leq T, \tag{4}$$

where $\varphi\left(x\right),\ f\left(x,t\right)$ - sufficiently smooth functions.

Problems for equations with a varying direction of time have been considered in many works. In [1] the author considers the first boundary value problem for one parabolic equation, in the case when the gluing conditions on the hyperplane must be specified with a weight to ensure the uniqueness of the solution.

The problem under study belongs to the class of ill-posed problems of mathematical physics, namely, in this problem there is no continuous dependence of the solution on the initial data. Ill-posed problems for such equations were considered in the works of A.L. Bukhgeim, K.S. Fayazov [2], K.S. Fayazov and I.O. Khazhiev [3] and others.

An approximate solution of the problem (1) - (4) will be constructed in the form of a solution to a boundary value problem for a pseudo-parabolic equation. In this paper, we prove the existence and uniqueness of a solution for the initial-boundary value problem for the inhomogeneous pseudo-parabolic equation with a varying direction of time.

REFERENCES

1. Tersenon S.A. (1996) On the first boundary value problem for a parabolic equation with changing direction of time. *Dokl. Akad. Nauk,* 1996, Volume 348, Number 1, 27 – 29.
2. Fayazov, K.S. A certain ill-posed Cauchy problem for first-order and second-order differential equations with operator coefficients *Siberian Math. J.* 1994. Vol. 35, No.3. P. 631–635.
3. Fayazov, K.S., Khazhiev, I.O. Conditional correctness of boundary-value problem for a composite fourth-order differential equation *Izvestiya VUZ. Matematika.* 2015. Vol. 59(4). P. 54–62.

ESTIMATION OF THE STABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HOPF SYSTEM

Imomnazarov Kh. Kh.[1], Mukimov A.[2], Tordeux S.[3]

[1]Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
imom@omzg.sscc.ru
[2]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
asqarmuqumov@gmail.com
[3]Universite de Pau - IPRA, Pau, France;
sebastien.tordeux@inria.fr

In recent decades, mathematicians have become increasingly interested in the problems associated with the behavior of solutions to systems of partial differential equations with a small parameter in high derivatives with allowance for the kinetic parameters. These problems arise from the physical applications, mostly from contemporary hydrodynamics (compressible multiphase fluids with low viscosity). An analog to the Burgers equation arises, for example, in studying a weak nonlinear one-dimensional acoustic wave moving with a linear velocity of sound. In this case, the nonlinear velocity terms in the system of the Burgers equations come from the sound velocity depending on the amplitude of the sound wave, on the second derivative terms and on the difference in the velocities representing the sound waves attenuation associated with energy dissipation. In other words, these terms provide the continuity of solutions and are dissipative processes associated with the production of entropy. These terms in turn provide the non-roll waves [1]. The system under consideration is a special case of a two-velocity system of hydrodynamics equations [2-8]. A one-dimensional analog of the Navier-Stokes equations for a compressible fluid can be considered as a system of the Hopfs equations which is a system of nonlinear convection-diffusion equations [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{b}(v-u), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} = b(u-v), \tag{2}$$

where the quantities u and v can be regarded as velocity subsystems with the dimension $[x]/[t]$, constituting two-velocity components with the corresponding partial continuum densities ρ_1 and ρ_2, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ is the common density of the continuum, $\tilde{b} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\,b$, $b > 0$ is the coefficient of friction with the dimension $1/[t]$, which is an analog to the Darcy factor for porous media.

A two-velocity system of hydrodynamic equations and a system of the Hopfs equations have much in common. For example, the quadratic nonlinearity with respect to the terms u and v with advective terms corresponding to the sound, depending on the amplitude of the sound waves and the linear coefficient of friction b of the right-hand side is responsible for the attenuation of the sound waves [1]. With regard to the properties of the solutions, they are totally different. The system of the Hopfs equations in the vanishing coefficient b is formed of both strong (shock waves), and weak discontinuities, while the solution of the system of two-velocity hydrodynamics does not have such features. However, the range of applicability of this system is by no means limited to the above example. These systems arise in many problems, thus confirming their significance.

For system (1), (2) in the domain $\Omega_T = \{(t, x) : 0 \le t \le T, x \in R\}$, let us consider the Cauchy problem with the following initial data

$$u\mid_{t=0} = u_0(x), \quad v\mid_{t=0} = v_0(x), \quad x \in R. \tag{3}$$

We are interested in the classical solution of the Cauchy problem for the system of the Hopfs equations (1), (2), namely, u, $v \in C^1(\Omega_T)$ is the class of functions once continuously differentiable with respect to t and to x.
Theorem. Let $u_0(x)$, $v_0(x) \in C^1(R) \bigcap W_2^1(R)$, where $W_2^1(R)$ is the Sobolev space. Then the Cauchy problem (1)-(3) has in the class $C^1(\Omega_T)$ a unique solution, and the following estimation of stability holds

$$\int_{\Omega_T} \left(u^2(t, x) + v^2(t, x)\right) dxdt \le T \, \frac{max\{b, \tilde{b}\}}{min\{b, \tilde{b}\}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_0^2(x) + v_0^2(x)\right) dx.$$

The reported study was funded by RFBR and CNRS according to the research project No. 21-51-15002.

REFERENCES

1. Kulikovskii A.G., Sveshnikov E.I., Chugaynova A.P. Mathematical Methods for Studying Discontinuous Solutions of Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations. Moscow: Steklov Math. Inst. RAS, 2010. (Lekts. Kursy NOC; 16) (In Russian).
2. Dorovsky V.N. Continual theory of filtration // Geologiya i Geofisika. 1989. No. 7. P. 39–45.
3. Imomnazarov Kh.Kh., Mamasoliyev B.Zh. The estimate of the Cauchy problem stability for one-dimensional system of the Burgers type equations // Abstracts Int. Sci. Conf. "Modern Methods of Mathematical Physics and Applications". Tashkent, 2015. P. 167–168 (In Russian).
4. Imomnazarov Kh, Mamasoliyev B.,Vasiliev G. On one system of the Burgers equations arising in the two-velocity hydrodynamics // Journal of Physics: Conference Series (JPCS) (indexed in SCOPUS and Web of Science), 2016, v. 697, 012024.
5. Vasiliev G., Imomnazarov Kh., Kalimoldayev M., Mamasoliyev B. Cauchy Problem for System of the Burgers Equations Arising in the Two-velocity Hydrodynamics // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2017, 12(3), P. 134–138.
6. Urev M.V., Imomnazarov Kh.Kh., Tang J.-G. A Boundary Value Problem for an Overdetermined Steady System in Two-Velocity Hydrodynamics
Numerical Analysis and Applications, 2017, 10(4), P. 347–357. 7. Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E. Modeling and investigation of direct and inverse dynamic problems of poroelasticity, Izd. University, Tashkent, 2012, 120 p.
8. Imomnazarov Kh.Kh., Vasiliev G.S., Mamasoliev B.Zh. Mathematical modeling of dynamic processes in a two-fluid medium with one pressure. Izd. University, Tashkent, 2020, 102 p.

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN NOMA'LUM BOSHLANG‘ICH SHARTLI MASALA

Jumayev J.A.

Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston
jumayevjavlonbek@mail.ru

Kasr tartibli differensial tenglamalar ko‘plab fizik, mexanik va biologik jarayonlarni matematik modellarini mukammalashtirish, ba’zi holatlarda butun tartibli differensial tenglamalar orqali ifodalash qiyin bo‘lgan jarayonlarning matematik modellarida muvaffaqiyatli ishlatilmoqda [1]. Kasr tartibli hosilalarning ham turlari ko‘p bo‘lib, eng ko‘p ishlatiladigani Riman-Liuvill va Kaputo-Gerasimov ma’nosidagi kasr tartibli hosilalardir [2]. Bu ikki turdagi hosilalarni umumlashtiruvchi Hilfer kasr tartibli hosilasi nafaqat matematik umumlashma, balki amaliy ahamiyatga ham ega [3]. Keyinchalik, [4] ishda bu hosila ham yana umumlashtirilgan bo‘lib, undan xususiy hollarda turli tartibli Riman-Liuvill va Kaputo-Gerasimov hosilalarini keltirib chiqarish mumkin bo‘ladi. Aytish kerakki, bu kiritilgan hosilalarni aslida avvalroq kiritilgan Djrbashyan-Nersesyan kasr tartibli diffe-
rensial operatorlarning xususiy holi sifatida qaralishi mumkin [5].

Biz qarayotgan kasr tartibli differensial tenglama uchun teskari masalada, qo‘shimcha shart yordamida noma’lum boshlang‘ich shart ham topiladi. Masalani tadqiq etishda qaralayotgan tenglama uchun Koshi masalasi yechimidan foydalanilgan [6].

Masala. Shunday $u(t)$ funksiya va ξ_1 son topilsinki, $u(t)$ funksiya $[0;T]$ kesmada ushbu

$$D_{0+}^{(\gamma,\beta)}u(t) - \lambda u(t) = f(t), \qquad 1 < \gamma, \beta \leq 2 \qquad 0 \leq \mu \leq 1 \tag{1}$$

tenglamani va

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)}u(t) = \xi_0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)}u(t) = \xi_1, \tag{3}$$

$$u(T) = \eta. \tag{4}$$

shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda $f(t)$ berilgan funksiya, λ, ξ_0, η berilgan haqiqiy sonlar, ξ_1 – noma’lum son.

$$D_{0+}^{(\gamma,\beta)}u(t) = I_{0+}^{\mu(n-\gamma)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{0+}^{(1-\mu)(n-\beta)} f(t), \qquad n-1 < \gamma < n,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

–umumlashgan Hilfer operatori,

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int\limits_0^t f(z)(t-z)^{\alpha-1}dz, \quad t > 0$$

Riman-Liuvill kasr tartibli integrali.

Dastlab, (1) tenglamaning (2) va (3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topib olamiz. Bunda biz ξ_1 qiymatni ma‘lum deb turamiz. Bu masala ekvivalent ravishda 2-tur Volterra integral tenglamasiga keltiriladi [6]. Buning uchun tenglamadagi kasr tartibli hosilani $D_{0+}^{(\gamma,\beta)}u(t) = I_{0+}^{\gamma-\delta} D_{0+}^{\gamma} u(t)$ ko‘rinishda yozib olib, (1) tenglamaga olib borib qo‘ysak,

$$I_{0+}^{\gamma-\delta} D_{0+}^{\gamma} u(t) = \lambda u(t) + f(t)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bu yerda $\gamma = \beta + \mu(n-\beta)$, $\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta)$, $(n = 2)$. So‘ngra tenglikning har ikki tomoniga I_{0+}^{δ} operatorni ta‘sir qildiramiz hamda

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{(\alpha-j+1)} \left[\lim_{t\to a+} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\right]$$

tenglikni e'tiborga olsak, tenglama shunday ko'rinishga keladi:

$$I_{0+}^{\gamma} D_{0+}^{\gamma} u(t) = u(t) - \sum_{j=1}^{2} \frac{t^{\alpha-j}}{(\gamma - j + 1)} \left[\lim_{t \to 0+} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2-j} I_{0+}^{2-\alpha} u(t) \right],$$

$$u(t) = I_{0+}^{\delta} \lambda u(t) + I_{0+}^{\delta} f(t) + \sum_{j=1}^{2} \frac{t^{\alpha-j}}{(\gamma - j + 1)} \left[\lim_{t \to 0+} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2-j} I_{0+}^{2-\alpha} u(t) \right].$$

Bu integral tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$u(t) = \xi_0 t^{\gamma-1} E_{\delta,\gamma}(\lambda t^{\delta}) + \xi_1 t^{\gamma-2} E_{\delta,\gamma-1}(\lambda t^{\delta}) + \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1} E_{\delta,\delta} \left[\lambda (t-s)^{\delta} \right] f(s) ds.$$

Topilgan umumiy yechimni (4) shartga bo'ysundiramiz. $t = T$ desak,

$$u(T) = \xi_0 T^{\gamma-1} E_{\delta,\gamma}(\lambda T^{\delta}) + \xi_1 T^{\gamma-2} E_{\delta,\gamma-1}(\lambda T^{\delta}) + \int\limits_0^T (T-s)^{\delta-1} E_{\delta\delta} \left[\lambda (T-s)^{\delta} \right] f(s) ds = \eta.$$

Bu tenglikdan $E_{\delta,\gamma-1} \lambda T^{\delta} \neq 0$ shart asosida ξ_1 noma'lumni quyidagicha topamiz:

$$\xi_1 = \left[\eta - \int\limits_0^T (T-s)^{\delta-1} E_{\delta\delta} \left[\lambda (T-s)^{\delta} \right] f(s) ds - \xi_0 T^{\gamma-1} E_{\delta,\gamma}(\lambda T^{\delta}) \right] \cdot \left[T^{\gamma-2} E_{\delta,\gamma-1}(\lambda T^{\delta}) \right]^{-1}.$$

ADABIYOTLAR

1. V.V.Uchaikin. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
2. A.A.Kilbas, H.M.Srivastava, JJ.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier: Amsterdam, 2006.
3. R. Hilfer. Fractional calculus and regular variation in thermodynamics. In R. Hilfer, editor, Applications of Fractional Calculus in Physics, page 429, Singapore, 2000. World Scientific.
4. V.M.Bulavatsky. Closed form of the Solutions of some Boundary-Value Problems for Anomalous Diffusion Equation with Hilfer's Generalized Derivative. Cybernetics and Systems Analysis// 2014. vol. 50, pp.570-577.
5. Dzherbashian, M.M. and Nersesian, A.B.. "Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order"Fractional Calculus and Applied Analysis// 2020. vol. 23, no. 6, pp. 1810-1836.
6. E.T.Karimov, B.H.Toshtemirov. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators // 2021, Vol.65, issue 2, pp.61-77.

CAUCHY PROBLEM FOR MATRIX FACTORIZATIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL BOUNDED DOMAIN

Juraev D. A.

[1]Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan, Karshi, Uzbekistan;
[2]Anand International College of Engineering, Rajasthan, India,
juraev_davron@list.ru

In this paper, the problem of continuation of the solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain is studied. It is assumed that the solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established, as well as a regularization formula for the case when, under the indicated conditions, instead of the Cauchy data, their continuous approximations with a given error in the uniform metric are given. A stability estimate for the solution of the Cauchy problem in the classical sense is obtained.

This problem concerns ill-posed problems, i.e., it is unstable. It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is unstable relatively small change in the data, i.e., incorrect (example Hadamard, see, for instance [2], p. 39). In unstable problems, the image of the operator is not is closed, therefore, the solvability condition can not be is written in terms of continuous linear functionals. So, in the Cauchy problem for elliptic equations with data on part of the boundary of the domain the solution is usually unique, the problem is solvable for everywhere dense a set of data, but this set is not closed. Consequently, the theory of solvability of such problems is much more difficult and deeper than theory of solvability of Fredholm equations. The first results in this direction appeared only in the mid-1980s in the works of L.A. Aizenberg, A.M. Kytmanov, N.N. Tarkhanov (see, for instance [3]). At present, special attention is paid to topical aspects of differential equations and mathematical physics, which have scientific and practical applications in the fundamental sciences. In particular, special attention is paid to the study of various ill-posed boundary value problems for partial differential equations of elliptic type, which have practical application in applied sciences. As a result, significant results were obtained in studies of ill-posed boundary value problems for partial differential equations, that is, approximate solutions were constructed using Carleman matrices in explicit form from approximate data in special domains, estimates of conditional stability and solvability criteria were established. The first results, from the point of view of practical importance, for ill-posed problems and for reducing the class of possible solutions to a compact set and reducing problems to stable ones were obtained in the works of A.N. Tikhonov (see [1]).

In many well-posed problems for systems of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients that factorize the Helmholtz operator, it is not possible to calculate the values of the vector function on the entire boundary. Therefore, the problem of reconstructing the solution of systems of equations of first order elliptic type with constant coefficients, factorizing the Helmholtz operator (see, for instance [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] and [13]), is one of the topical problems in the theory of differential equations.

In this paper, we present an explicit formula for the approximate solution of the Cauchy problem for the matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain. The odd dimensional case requires special consideration, in contrast to even dimensions in many mathematical problems. The even dimensional case will be further considered in other works of the author. Our formula for an approximate solution also includes the construction of a family of fundamental solutions for the Helmholtz operator a multidimensional bounded domain. This family is parametrized by some entire function $K(w)$, the choice of which depends on the dimension of the space (see, [4]-[13]). This motivates a separate study of regularization formulas in odd dimensional spatial domains.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1963. V.151, №3. Pp. 501–504.

2. Hadamard J. The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type. Moscow.: Nauka, 1978.
3. Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Berlin.: Akad. Verl., V. 7, 1995.
4. Juraev D.A. The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. V.14. Pp. 752–764.
5. Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. V.15. Pp. 11–20.
6. Juraev D.A. The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ // Journal of Universal Mathematics. 2018. V.1, №3. Pp. 312–319.
7. Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. V.15. Pp. 1865–1877.
8. Juraev D.A. Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. V.69, №10. Pp. 1583–1592.
9. Juraev D.A. On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Advanced Mathematical Models & Applications. 2019. V.4, №1. Pp. 86–96.
10. Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Journal of Universal Mathematics. 2019. V.2, №2. Pp. 113–126.
11. Juraev D.A. The solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Advanced Mathematical Models & Applications. 2020. V.5, №2. Pp. 205–221.
12. Juraev D.A., Noeiaghdam S. Regularization of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation on the plane // Axioms. 2021. V.10, №2. Pp. 1–14.
13. Juraev D.A. Solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation on the plane // Global and Stochastic Analysis. 2021. V.8, №3. Pp. 1–17.

SOLVABILITY OF A PROBLEM FOR A TIME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE HILFER OPERATOR ON METRIC GRAPHS

Karimov E. T.[1,2], Abdullaev O. Kh.[2], Khujakulov J. R.[3]

[1]Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan
erkinjon@gmail.com
[2,3]V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.
[2]obidjon.mth@gmail.com, [3]jonibek.16@mail.ru

Consider a simple star graph (metric graph), which is obtained by connecting three finite segments $B_k = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}, (k = 1, 2, 3)$, at one point $O(0, 0)$, called the vertex of the graph. Line segments are called bonds of the graph. On the each edges of the over defined graph, we consider fractional differential equations

$$D_{0+}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x, t) - u_{xx}^{(k)}(x, t) = f^{(k)}(x, t), \quad x \in B_k, \tag{1}$$

where $0 < \alpha < 1$, , $0 \leq \mu \leq 1$, $f^{(k)}(x, t)$, $k = 1, 2, 3$ are known functions and $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ is Hilfer operator:

$$\left(D_{0+}^{\alpha,\mu} u\right)(t) = I_{0+}^{\mu(n-\alpha)} D^{(n)} \left(I_{0+}^{(1-\mu)(n-\alpha)} u\right)(t), n - 1 < \alpha < n, 0 \leq \mu \leq 1.$$

Where $I_{0+}^{\alpha}$the Riemann-Liouville (R-L) fractional integrals with order α of a function $f(x)$ is defined by[2]

$$\left(I_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,(x>a,\quad \alpha>0).$$

We will study the following problem for the equation (1) in Γ.

Problem To find functions $u^{(k)}(x,t)$ in the domain $B_k\times(0,T)$, satisfy an equation (1) for $0<\alpha<1$ with the following properties:
1.

$$t^{1-\alpha-\mu+\alpha\mu}u^{(k)}(x,t)\in C([0,L_k]\times[0,T]),$$
$$u_{xx}^{(k)}(x,t),D_{0+}^{\alpha,\mu}u^{(k)}\left(x{,}t\right)\in C\left((0,L_k)\times(0,T)\right).$$

2. Local conditions:

$$I_{0+}^{(1-\mu)(l-\alpha)}u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi^{(k)}(x),,k=1,2,3\ x\in B_k$$

3. vertex conditions

$$u^{(1)}(0,t)=u^{(2)}(0,t)=u^{(3)}(0,t),t\in[0,T],$$
$$u_x^{(1)}(0,t)+u_x^{(2)}(0,t)+u_x^{(3)}(0,t)=0,\ \ t\in[0,T],\ \ k=1,2,3$$

and boundary conditions

$$u^{(k)}(L_k,t)=0,\ \ t\in[0,T],\ \ k=1,2,3.$$

where $\varphi^{(k)}\left(x\right)$ are sufficiently smooth given functions.

Using the method of separations of variables for the homogeneous equation corresponding Eq(1), we will get ODE of integer order

$$\frac{d^2}{dx^2}X^{(k)}(x)+\lambda^2X^{(k)}(x)=0,\ \ \lambda\in R\backslash\{0\},\ k=1,2,3 \tag{2}$$

and ODE of fractional order

$$D_{0+}^{(\alpha,\mu)}T(t)+\lambda^2T(t)=0,\ \ l-1<\alpha<l,\ \ 0\le\mu\le1. \tag{3}$$

We would like to note, that the Eigenfunctions and eigenvalues at the formulated problem are the some as in work[1].
Using properties of the Mittag-Leffler function, we prove the uniform convergence of the obtained Fourier series. The uniqueness of the solution of the problem is also proved.

REFERENCES

1. Abdullaev O.Kh, Khujakulov J.R. On a problem for the time-fractional diffusion equation on a metric graphs. Uzbek Mathematical Journal. No.4, 3-12 (2017).

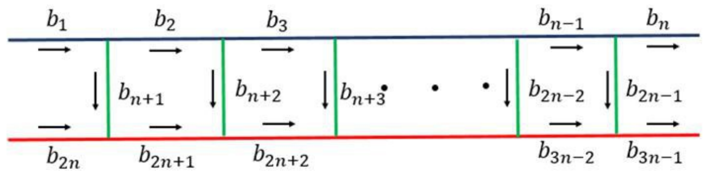
2. A.A Kilbas, H. M Srivstava, J. J Trujillo. Integraly I proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya. in North-Holland Matematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science. B.V., Amsterdam. (2006) (in russian).

ZINAPOYASIMON GRAFLARDA TO'LQIN TARQALISH TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDAGI TEOREMA

Kenjaboyeva M
Qarshi davlat universiteti, Qarshi, Uzbekistan,
mkenjaboyeva@inbox.ru

Ushbu ishda biz zinapoyasimon graflarda (1-chizma) to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz. Ma'lumki, bunday graflar DNK, RNK molekulalarida kechadigan impuls transportini tadqiq qilishda model vazifasini bajaradi [1,2].

Bizga qirralari teng uzunliklarga ega bo'lgan zinapoyasimon graf berilgan bo'lsin.



$1 - chizma$

Har bir qirraga $(0, L)$ kesmani mos qo'yamiz, ya'ni $b_k \sim (0, L), k = 1, 2, ..., 3n - 1.$

Grafning har bir qirrasida quyidagi

$$u_{ktt} = a^2 u_{kxx} + f_k(x, t),\ x \in (0, L), t > 0, k = 1, 2, ..., 3n - 1, \qquad (1)$$

to'lqin tarqalish tenglamasining

$$u_k|_{t=0} = \varphi_k(x),\ u_{kt}|_{t=0} = \psi_k(x),\ x \in [0, L], k = 1, 2, ..., 3n - 1, \qquad (2)$$

boshlang'ich shartlarni

$$u_j|_{x=0} = 0, j \in \{1, 2n\},\ u_l|_{x=L} = 0,\ l \in \{n, 3n - 1\}, t \geq 0, \qquad (3)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni va

$$u_k|_{x=L} = u_{k+1}|_{x=0} = u_{k+n}|_{x=0},$$
$$u_{kx}|_{x=L} = u_{(k+1)x}|_{x=0} + u_{(k+n)x}|_{x=0}, k = 1, 2, ..., n - 1 \qquad (4)$$

$$u_{k-(n-1)}|_{x=L} = u_k|_{x=L} = u_{k+1}|_{x=0},$$
$$u_{(k-n+1)x}|_{x=L} + u_{kx}|_{x=L} = u_{(k+1)x}|_{x=0}, k = 2n, 2n + 1, ..., 3n - 2, t \geq 0 \qquad (5)$$

ulanish shartlarini qanoatlantiruvchi regulyar yechimini topish masalasini qaraymiz. (4), (5) ulanish shartlari odatda oqim saqlanish yoki Kirxgoff shartlari deb ham yuritiladi.

Teorema. $\varphi_k(x), \psi_k(x), k = 1, 2, ..., 3n-1$, funksiyalar $(0, L)$ kesmada uzluksiz funksiyalar, $f_k(x, t), k = 1, 2, ..., 3n - 1$ funksiyalar $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ sohada uzluksiz, chegaralangan funksiyalar bo'lsin. U holda $(1) - (5)$ masala ko'pi bilan bitta regulyar yechimga ega bo'ladi.

Teorema energiya integrallari usulida isbotlangan.

Adabiyotlar

1. Eshimbetov M.R. Initial-boundary value problem for heat equation on ladder-type graphs. // Bulletin of the Institute of Mathematics. Ц No. 5, 2020, pp. 11-19.
2. Khujakulov J. R. On inverse source problem for time fractional diffusion equation on simplemetric graphs. Uzbek Mathematical Journal. No. 2, 2000, pp. 99-108.

THE EXISTENCE OF EIGENVALUE OF THE GENERALIZED FRRIEDRICHS MODEL UNDER RANK THREE PERTURBATION

Kurbanov Sh. H[1]**, Eshmurodov O. A.**[2]
Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
e-mail:kurbanov-shaxzod@mail.ru[1]
e-mail: eshmurodovodil@mail.ru[2]

Let $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ be the three dimensional torus (Brillion zone) and let $L^2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$. We consider the Generalized Friedrichs model associated to a sistem of two identical quantum particles as follows:

$$H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p) = H_0(p) - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3, \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0. \tag{5}$$

here $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3)$$

. and $V_i, i = 1, 2, 3$ are integral operators i.e.

$$(V_i f)(q) = \varphi_i(q_i) \int\limits_{\mathbb{T}^3} \varphi_i(s_i) f(s) ds, \quad i = 1, 2, 3$$

Hypothesis 1. (i) The functions $\varphi_i(\cdot), i = 1, 2, 3$ are real valued and belong to $C^{(1)}(\mathbb{T}^1)$

(ii) The function $w(\cdot, \cdot)$ is real analytic in $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ and has a unique non-degenerate minimum at $(0, 0) \in (\mathbb{T}^3)^2$.

The perturbation V is positive operator of rank three. So, by the well-known Weyl theorem [1] the essential spectrum of the operator $H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p)$ coincides with the spectrum of $H_0(p)$ and fills the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p)) = [m(p), M(p)],$$

here

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

Hypothesis 2. For each $z < m(p)$ the following relations are true

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_i(s_i)\varphi_j(s_j)}{w_p(s) - z} ds = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Observe that by Hypothesis 1 there exist such δ-neighborhood $U_\delta(0) \subset \mathbb{T}^3$ of the point $p = 0 \in \mathbb{T}^3$ and analytic function $q_0 : U_\delta(0) \to \mathbb{T}^3$ that for any $p \in U_\delta(0)$ the point $q_0(p) = (q_0^{(1)}(p), q_0^{(2)}(p), q_0^{(3)}(p)) \in \mathbb{T}^3$ is a unique non degenerated minimum of the function $w_p(\cdot)$ as well as the following integrals exist:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_i^2(s_i) ds}{w_p(s) - m(p)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

We set

$$\mu_i(p) = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_i^2(s_i)ds}{w_p(s) - m(p)} \right)^{-1} > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

The main result is the following theorem

Theorem. The operator $H_{\mu_1,\mu_2,\mu_2}(p)$ has unique eigevalue $E_i(\mu_i, p)$ below $m(p)$ if and only if $\mu_i > \mu_i(p)$, $0 < \mu_j < \mu_j(p)$, $0 < \mu_k < \mu_k(p)$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j, i \neq k$. The function $E_i(\mu_i, p)$ is monotonously decreasing in $(\mu_i(p), +\infty)$ by μ_i and real analytic on $U_\delta(0)$ by p. Associated eigenfunction has of the form

$$\Psi_i(\mu_i, p, \cdot, E_i(\mu_i, p)) = \frac{C_i \mu_i \varphi_i(q_i)}{w_p(q) - E_i(\mu_i, p)}$$

Generalized Friedrichs model has been considered also in [2,3].

REFERENCES

1.M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators.// Academic Press, N.Y., 1978.

2. Lakaev S., Ibrahim A., Kurbanov Sh.: Threshold Effects for the Generalized Friedrichs model with the perturbation of rank one, // Abstract and Applied Analysis 2012(2012)

3. Lakaev S., Darus M. and Kurbanov Sh.: Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one// J. Phys. A: Math. Theor. 46(2013)

VISUAL MODELING OF THERMAL CONDUCTIVITY PROCESSES IN DIFFERENT ENVIRONMENTS IN THE PRESENCE OF WELDING

Mamatov A. U.[1], Xamidov A. S.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
mmtovabrorjon1995@gmail.com

[2]66-secondary school of general education, Kattakurgan district, Samarkand, Uzbekistan
abboshamidov92@mail.ru

In this paper, in order to study visual modeling of heat generation processes at industrial enterprises in the presence of a source, we look at the following problem in $Q = \{(t, x) : t \in R_+,\ x \in R\}$ area:

$$\begin{cases} |x|^k \frac{\partial u}{\partial t} = div\left(|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u^l\right) + \gamma(t) u^{q_1} v^{r_1} |x|^k \\ |x|^k \frac{\partial v}{\partial t} = div\left(|x|^n v^{m_2-1} |\nabla v|^{p-2} \nabla v^l\right) + \gamma(t) u^{q_2} v^{r_2} |x|^k \end{cases} \tag{1}$$

with initial (Cauchy) condition

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0,\ v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \tag{2}$$

where $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, $p > 2$, q_1, q_2, r_1, $r_2 \geq 1$, $k, l \in R$ is the parameters, $u_0(x)$, $v_0(x)$ is the initial conditions, $|x|^n$, $|x|^k$ is the density of the medium, $0 < \gamma(t) \in C(0, \infty)$ is the specified function.

Before constructing a self-similar solution of the system of equations (1), let us consider some cases of diffusion, for example: $m_i + p - 3 > 0,\ i = 1,2$-the state of slow diffusion, $m_i + p - 3 = 0,\ i = 1,2$-the critical state(the asymptotic is summed up depending on its solutions), $m_i + p - 3 < 0,\ i = 1,2$ is called the state of fast diffusion. An asymptotic solution is usually understood as a solution of a system of nonlinear equations that can satisfy certain conditions.

(1) the equation represents a number of physical processes [1]: the reaction diffusion process in a nonlinear environment, the heat dissipation process in a nonlinear environment, the filtration of liquid and gas in a nonlinear environment, they represent the existence of the law of polypore and other nonlinear displacements [1-3].

(1) the Cauchy problem and boundary value problems for the equation were observed by many authors in one-dimensional and multi-dimensional cases [2-4].

We can translate the system of equations (1) into a system of radial-symmetric equations so that we can find a solution to a self-similar or an approximately self-similar. To do this, we first introduce the notation as$r = |x|$, so that we can translate the system of equations (1) into a radial-symmetric system:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^k \frac{\partial u}{\partial t} = div\left(r^{n+N-1} u^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r}^l \right) + \gamma(t)\, u^{q_1} v^{r_1} r^k, \\ r^k \frac{\partial v}{\partial t} = div\left(r^{n+N-1} v^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial r}^l \right) + \gamma(t)\, u^{q_1} v^{r_1} r^k \end{array} \right. . \tag{3}$$

After performing the substitution (3), to find a self-similar solution of the system of equations (1) and the solution of the approximately self-similar, we use the following method:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t,r) = \bar{u}(t) \cdot \omega(\tau(t), \varphi(r)), \\ v(t,r) = \bar{v}(t) \cdot z(\tau(t), \varphi(r)) \end{array} \right. . \tag{4}$$

Now we calculate the initial part of the system of equations (1), as required, as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{dt} = \gamma(t) \cdot \bar{u}^{q_1} \bar{v}^{r_1} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} = \gamma(t) \cdot \bar{u}^{q_2} \bar{v}^{r_2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(t) = A_1 \left[T_0 + \int_0^t \gamma(\eta)\, d\eta \right]^{\alpha_1} \\ \bar{v}(t) = A_2 \left[T_0 + \int_0^t \gamma(\eta)\, d\eta \right]^{\alpha_2} \end{array} \right. \quad | \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1 - r_2 + r_1}{(q_1-1)(r_2-1) - r_1 q_2} \\ \alpha_2 = \frac{1 - q_1 + q_2}{(q_1-1)(r_2-1) - r_1 q_2} \end{array} \right.$$

After performing the calculations, the system of equations (3) takes the following form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} \omega^{m_1-1} \left| \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}^l \right) + \gamma(t)\, \bar{u}^{q_1(m_1+p+l-3)} \bar{v}^{r_1} \left(\omega^{q_1} z^{r_1} - \omega \right), \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} = \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} z^{m_1-1} \left| \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial z}{\partial \varphi}^l \right) + \gamma(t)\, \bar{u}^{q_2} \bar{v}^{r_2(m_2+p+l-3)} \left(\omega^{q_2} z^{r_2} - z \right) \end{array} \right. . \tag{5}$$

From the system of equations (4)-(5) (1)-(2) there are important considerations on the question: if $m_i + p + l \neq 4;\ \ i = 1,2$

$$\tau(t) = \int_0^t \left[\bar{u}(\eta) \right]^{m_1+p+l-4} d\eta = \int_0^t \left[\bar{v}(\eta) \right]^{m_2+p+l-4} d\eta$$

or if $m_i + p + l = 4;\ \ i \neq 1,2$ is equal to $\tau(t) = T + t$.

We form a system of equations of a new form:

$$\begin{cases} \xi^{1-s}\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\,f^{m_1-1}\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{p}\gamma\left(t\right)\tau\bar{u}^{q_1-(m_1+p+l-3)}\bar{v}^{r_1}\left(f^{q_1}g^{r_1}-f\right)=0, \\ \xi^{1-s}\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\,g^{m_2-1}\left|\frac{dg}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dg^l}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{p}\gamma\left(t\right)\tau\bar{u}^{q_2}\bar{v}^{r_2-(m_2+p+l-3)}\left(f^{q_2}g^{r_2}-g\right)=0 \end{cases}. \tag{6}$$

To find a solution to this system of equations (6), we introduce another repeating self-similar pattern:

$$\begin{cases} \bar{f}\left(\xi\right)=A\left(a_1-\xi^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2} \\ \bar{g}\left(\xi\right)=B\left(a_2-\xi^{\gamma_3}\right)^{\gamma_4} \end{cases}$$

where$a_i\geq 0;\;\; i=1,2,\; \gamma_i\geq 0;\;\; i=1,4$ is equal.

Combining all the calculated equalities, we get the integral self-similar solution we are looking for:

$$\begin{cases} u_A\left(t,x\right)=\left[\alpha_2\,\alpha_1^{\frac{1-r_2}{r_1}}\right]^{-\frac{r_1}{(q_1-1)(r_2-1)-r_1q_2}}\left[T_0+\int_0^t\gamma\left(\eta\right)d\eta\right]^{\alpha_1}A\left(a_1-\xi^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2}, \\ v_A\left(t,x\right)=\left[A_1^{1-q_1}\,\alpha_1\right]^{\frac{1}{r_1}}\left[T_0+\int_0^t\gamma\left(\eta\right)d\eta\right]^{\alpha_2}B\left(a_2-\xi^{\gamma_3}\right)^{\gamma_4} \end{cases}.$$

REFERENCES

1. Angar Jungel. *Cross-Diffusion systems with entropy structure.* arXiv:1710.01623v1 [math.AP] 4 Oct 2017. Proceedings of EQUADIFF, (2017).

2. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. and Samarsky A.A. *Oncomparison of solutions of parabolic equations.* DAN an SSSR. Vol. 248, No.3,586–589 (1979).

3. Kurdyumov S.P., Zmitrenko N.V. *N-and S-modes of compression of the finalplasma mass and features of modes with sharpening.* PMTF, No.1, 3–23 (1977)

4. Mamatov A.U. *Modeling the effect of the two-fold nonlinear heat dissipationequation on biological population with ambient density.* Scientific Journal ofSamarkand University(2020)

GIPERBOLIK TIPDAGI BUZILADIGAN IKKINCHI TUR TENGLAMA UCHUN KOSHI-GURSA MASALASI

O‘rinov A.Q.[1], Usmonov D. A.[2]

Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston,
[1]:urinovak.@mail.ru;
[2]:usmonov-doniyor@inbox.ru

Giperpolik tipdagi ushbu

$$u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\alpha(-y)^{m-1}u_y-\lambda^2 u=0,\; y<0 \tag{1}$$

buziladigan ikkinchi tur tenglamani $AC\;:\;x-2(2-m)^{-1}(-y)^{(2-m)/2}\;=\;0,\;BC\;:\;x+2(2-m)^{-1}(-y)^{(2-m)/2}\;=\;1$ va $AB\;:\;y\;=\;0$ xaraktiristikalar bilan chegaralangan D sohada qaraylik, bu yerda m, α hamda λ berilgan haqiqiy sonlar, $m \in (1,2)$, $\alpha < (3m-4)/2$, $\alpha \neq -n\,(2-m)+m/2\,, \alpha \neq -n\,(2-m)+m-1\,,\, n \in N$.

Koshi-Gursa masalasi. D sohada (1) tenglamani hamda

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha}\,(\partial/\partial y)\left\{u\,(x,y) - A_{\alpha}^{-}\,[\tau(t),\lambda]\right\} = \nu\,(x)\,,\; x \in (0,1)\,, \tag{2}$$

$$u\,(x,y)|_{\overline{AC}} = \varphi_0\,(x)\,, \forall\; x \in [0,\; 1/2] \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya topilsin, bu yerda $\nu\,(x)$, $\varphi_0\,(x)$ $-$ berilgan funksiyalar, $\tau\,(x) = u\,(x,0)$,

$$A_{\alpha}^{-}\,[\tau(t),\,\lambda] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_1(-4)^k(-y)^{(2-m)k}C_n^k}{(2-m)^{2k}(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k} \times$$

$$\times \int_0^1 \Phi_k\,[\tau(t),\lambda]\,[z\,(1-z)]^{n+k+\beta-1}\overline{J}_{n+k+\beta-1}\,(\sigma)\,dz, \tag{4}$$

$\gamma_1 = \Gamma\,(2\beta+2n)\,\Gamma^{-2}\,(n+\beta)$, $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$; $(a)_k$ - Poxgammer belgisi: $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+k-1)$, $k \in N$, $\Gamma\,(z)$ - Eylerning gamma funksiyasi, $\beta = (2\alpha-m)/[2\,(2-m)]$, $\Phi_k\,[\tau(t),\lambda] = (\lambda^2 - d^2/dt^2)^k\tau(t)$, $t = x+2(2-m)^{-1}(-y)^{\frac{2-m}{2}} \times \times (2z-1)$, $\overline{J}_{\gamma}\,(z) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l(z/2)^{2l}}{l!(\gamma+1)_l}$, $\gamma \neq -1,-2,-3,..$, $\sigma = 4\lambda(2-m)^{-1}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\sqrt{z\,(1-z)}$.

Eslatib o‘tish joyizki bu masalaning $\alpha \in ((3m-4)\,/2;\; m-1)$ bo‘lgan holi [1] maqolada o‘rganilgan.

Qo‘yilgan masalani yechishda (1) tenglama uchun qo‘yilgan ko‘rinishi o‘zgargan Koshi masalasi va uning R_{0k}^{λ} sinfdagi yechimidan foydalanamiz. Bu masala quyidagicha bayon qilinadi: D sohada (1) tenglamani hamda (2) va

$$u\,(x,0) = \tau(x), \forall\; x \in [0,1] \tag{5}$$

shartlarni qanoatiruvchi $u\,(x,y) \in C\,[a,b] \cap C^2\,(0,1)$ funksiya topilsin, bu yerda $\tau(x)$ va $\nu(x)$- berilgan funksiyalar. $\{(1),\,(2),\,(5)\}$ masalaning yechimi

$$u(x,y) = A_{\alpha}^{-}\,[\tau(t),\lambda] - \gamma_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu\,(t)\,[z(1-z)]^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\,(\sigma)\,dz, \tag{6}$$

formula bilan aniqlanadi [2], bu yerda $\gamma_2 = (1-\alpha)^{-1}\Gamma\,(2-2\beta)\,\Gamma^{-2}\,(1-\beta)$.

Quyidagi lemma o'rinli [2].

1-lemma. Agar $\tau\,(x) \in C^{2n+2}\,[0,1]$ va $\nu\,(x) \in C\,(0,1) \cap L\,(0,1)$ bo'lsa, u holda (6) formula bilan aniqlangan $u\,(x,y)$ funksiya $\{(1),\,(2),\,(5)\}$ masalaning yechimi bo'ladi.

1-tarif. Agar $\tau\,(x)$ funksiya

$$\tau\,(x) = sign\,(x-k)\int_k^x (x-\theta)^{-2\beta}\overline{I}_{-\beta}\,[\lambda\,(x-\theta)]\,T\,(\theta)\,d\theta \tag{7}$$

ko'rinishga ega bo'lib, $\nu\,(x)$ va $T\,(x)$ funksiyalar $(0,1)$ oraliqda uzluksiz va integrallanuvchi bo'lsa, u holda (6) ko'rinishdagi $u\,(x,y)$ funksiya (1) tenglamaning R_{0k}^{λ} sinfga tegishli yechimi deyiladi, bu yerda $\overline{I}_{\gamma}(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left[(z/2)^{2j}\right]/\left[j!(1+\gamma)_{j}\right]$, k parametr 0 yoki 1 qiymatlardan biriga teng.

1-teorema. Agar $\nu(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$ va $\varphi_0(x)\in C[0,1]$ bo'lsa, $\{(1),(2),(3)\}$ masalaning yechimi

$$u(x,y)=\int\limits_{0}^{x-\zeta}\left[(x-\theta)^2-\zeta^2\right]^{-\beta}\overline{I}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(x-\theta)^2-\zeta^2}\right]\Psi(\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\cos\beta\pi}\int\limits_{x-\zeta}^{x+\zeta}\left[\zeta^2-(x-\theta)^2\right]^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{\zeta^2-(x-\theta)^2}\right]\times$$

$$\times\left[\Psi(\theta)-2\gamma_2[(2-m)/4]^{1-2\beta}\nu(\theta)\cos\beta\pi\right]d\theta$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $\zeta=2(2-m)^{-1}(-y)^{(2-m)/2}$, $\Psi(x)=2x^{\beta}\Gamma^{-1}(1-\beta)\times\times\cos\beta\pi A_{0x}^{1,\lambda i}\left[D_{0x}^{1-\beta}\varphi_0(x/2)\right]+2\gamma_2[(2-m)/4]^{1-2\beta}\nu(x)\cos\pi\beta$; $A_{0x}^{1,\lambda i}[f(x)]$, $D_{0x}^{1-\beta}[g(x)]$ operatorlar mos ravishda [3], [4] adabiyotlarda keltirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.Usmonov D.A. A Cauchy-Goursat problem for a second kind degenerated equation of hyperbolic type // Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research, 2021, Vol. 3, Iss. 1. pp. 76-83.

2. Уринов А. К. Усмонов Д. А. О видоизменной задаче Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // Бюллетень Института математики, 2021, No. 1, стр. 46-64.

3. Салохитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектралным параметром. - Ташкент: Фан, 1997. 168 с.

4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интеграл и производние дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

RECOVERING TIME DEPENDENT FUNCTION FOR THE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN A FINITE DOMAIN

Rahmonov A.A.[1], Bozorov Z.R.[2]

[1]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
araxmonov@mail.ru
[2] Bukhara Branch of the Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan
zavqiddinbozorov2011@mail.ru

The present study investigates existence and uniqueness of solution to an inverse problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation. This existence and uniqueness result is based on the Fourier method and Laplace transform, the fractional calculus and the Banach fixed point principle. The unknown time dependent coefficient is determined uniquely by the additional data which is an integral condition. Then, the continuous dependence of data is proved.

We consider the so-called one-dimensional fractional diffusion equation

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u\right)(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

with initial

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,l), \tag{2}$$

and the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \in (0,T], \tag{3}$$

where $\Omega := (0,l) \times (0,T]$, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ stands for Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ in the time variable and $f(x,t)$ is the known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature.

For (1)-(3) the **direct problem** is the determination of $u(x,t)$ in $\bar{\Omega}$ such that $u(\cdot,t) \in C^2((0,l),\mathbb{R})$ and $\left({}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u\right)(x,\cdot) \in C((0,T],\mathbb{R})$, when the coefficient $q(t)$, the initial temperature $\varphi(x)$ and the source term $f(x,t)$ are given and continuous.

Inverse problem. Find the couple of functions $\{u(x,t), q(t)\}$ satisfying equation (1)-(3), under the over-determination conditions

$$\int_0^l u(x,t)dx = g(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $g(t) \in C([0,T],\mathbb{R})$ is the additional data of the thermal energy. The solvability of inverse problems with such type of integral over-determination has been considered in the paper [1]-[3].

We have the following theorem.

Theorem 1. Suppose the following conditions hold:
(i) $\varphi \in C^5[0,l]$, $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(l) = 0$, $k = 0,2,4$;
(ii) $f \in C^{5,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$, $\partial_x^k f(0,t) = \partial_x^k f(l,t) = 0$, $k = 0,2,4$;
(iii) $g(t) \in AC[0,T]$, $|g(t)| \geq g_0 > 0$ and $g(t)$ satisfies the matching condition $g(0) = \int_0^l \varphi(x)dx$.

Then the inverse problem (1)-(4) has a unique solution.

Setting T such that

$$T < \min\left\{\frac{1}{2c\sqrt[\alpha]{1+\alpha}}, \frac{g_0}{l^2c\sqrt[\alpha]{1+\alpha}},\right\} \tag{5}$$

where

$$\|\psi_0\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq c := \max\left(\|v_0\|_{C(\bar{\Omega})}, \|q_0\|_{C[0,T]}\right), \tag{6}$$

Then we have the following theorem.

Theorem 2. The solution $(u(x,t), q(t))$ of the inverse problem (1)-(4), under the assumptions of Theorem 1, depends continuously upon the data of $\Psi = \{f(x,t), \varphi(x), g(t)\}$ for satisfying (6).

REFERENCES

1. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. Appl. Math. Comp. 218. 4138-4146.(2011)

2. Kamynin V.L. On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition. Mathematical Notes, 77. no.4. 482-493.(2005)

3. Wu B, Gao Y., Yan L., et al.. Existence and Uniqueness of an Inverse Memory Kernel for an Integro-Differential Parabolic Equation with Free Boundary. J. Dyn. Control Syst. 24. (2018)

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SUBDIFFUSION EQUATION ON THE STAR GRAPH WITH EQUAL BONDS

Sobirov Z. A.[1], **Rakhimov K. U.**[2]
[1]University of Geological Sciences, Tashkent, Uzbekistan
sobirovzar@gmail.com;
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
kamoliddin_ru@inbox.ru

We use Green's function method to construct the solution of initial boundary value problem for the time-fractional diffusion equation on the metric star graph with equal bonds. The approach of energy integrals was used to demonstrate the uniqueness of the solutions to the problems under consideration. The uniqueness of the solutions of the considered problems were proved by the method of energy integrals. Some possible applications in branched nanostructures were discussed.

The diffusion equation is widely applied in a variety of domains of research, including physics, biology, mechanics, chemistry, and others. The theory of fractional calculus has been studied with great interest in recent years. It is known that the GreenŠs function method is a powerful technique for solving boundary value problems. The GreenŠs function method for fractional order equations was investigated by A.V. Pskhu [1].

We consider the star graph which has $m = k + l$ bonds connected in one point O. We define coordinates in the graph's edges by isometrically mapping these bonds to the interval 0 to L, so that the coordinate 0 corresponds to the vertex O in each edge. The bonds of the graph are denoted by $B_j, j = \overline{1, m}$.

On each bond B_j of the graph we consider the time-fractional subdiffusion equation

$$D_{0,t}^{\alpha} u_j(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t) - f_j(x,t), \quad 0 < x < L,\ 0 < t < T,\ j = \overline{1, m} \tag{1}$$

where $D_{0,t}^{\alpha} g(t)$ is the fractional derivative [1] defined by

$$D_{\eta,t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\eta}^{t} \frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1,$$

where $\Gamma(x)$ is the Gamma function. Initial conditions are

$$\lim_{t \to 0} D_{0,t}^{\alpha-1} u_j(x,t) = \varphi_j(x), \quad 0 \le x \le L, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2}$$

At the inner vertex of the graph we use the following gluing (Kirchhoff) conditions

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = ... = u_m(0,t), \ \lim_{x \to 0} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x} u_i(x,t) \right) = 0. \tag{3}$$

for all $t \in [0, T]$. These conditions ensure the local flow conservation at the branching point of the graph.

At the boundary vertices we will use Dirichlet boundary conditions (BC) given by

$$u_i(L,t) = \psi_i(t), \qquad i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Problem consists of finding the regular solutions for equation (1) which satisfy conditions (2)–(4).

Lemma. *The problem has at most one solution. Furthermore, if $\psi_i(t) \equiv 0, i = \overline{1,m}$, then the solutions satisfy the following a-priori estimate*

$$D_{0,t}^{\alpha-1}||u||^2 \leq E_\alpha(t^\alpha) \cdot D_{0,t}^{\alpha-1}||\varphi|| + \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha} \cdot D_{0,t}^{-\alpha}||f||^2,$$

where $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n + 1)$ and $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n + \mu)$ are the Mittag-Leffler functions.

In the proof of this lemma we use analogue of the Gronwall-Bellman lemma [see 2].

Taking into account the theorem **4.3.1.** [see 1], we look for solution of problem in the following form

$$u(x,t) = \int_0^t (G(x,t;L,\tau)u_\xi(L,\tau) - G(x,t;0,\tau)u_\xi(0,\tau) - G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau) +$$

$$+ G_\xi(x,t;0,\tau)u(0,\tau))d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

where $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_m(x,t))^T$ and G is a matrix-Green's function. Green's function satisfies the equation $G_{\xi\xi} - D_{t,\tau}^{\alpha} G = 0$, for all $\xi \neq x, 0 < \tau < t$.

We found Green's function in the form

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n M^n \left(\Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + M\Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)\right), \tag{5}$$

where $M = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 2-m & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2-m & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2 & ... & 2-m \end{pmatrix}$ matrix of dimension $m \times m$ and $\Gamma(s,t)$ is

$$\Gamma(s,t) = \frac{1}{2} t^{\alpha/2-1} e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|s|}{t^{\alpha/2}}\right), \quad \text{where} \quad e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}.$$

Theorem. Let $\phi_i(t), \varphi_i(t) \in C[0,T]$ $(i = \overline{1,m}, T > 0)$, and $f(x,t) \in C^{0,1}\{(x,t) : 0 \leq x \leq L, 0 < t < T\}$. Then considered problem has unique solution in the form of

$$u(x,t) = -\int_0^t (G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau) +)d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi -$$

$$-\int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

where $u = (u_1, ..., u_m)^T$, $F = (f_1, ..., f_m)^T$ and $G(x,t;\xi,\tau)$ is given by (5).

REFERENCES

1. Pskhu A.V. Fractional partial differential equations. Moscow, Nauka, 2005, 200 p.

2. Alikhanov A. A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations. *Differential equations,* 2010, **46** (5), 658–664.

LAPLAS TENGLAMASI UCHUN DIRIXLE MASALASI YECHIMINING MAVJUD BO'LMASLIGI HAQIDA

Toshqulova D.
Qarshi davlat universiteti,Qarshi,Uzbekistan
toshqulova96@inbox.ru;

Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi qaraladigan soha chegarasi Lyapunov sirtidan iborat bo'lmaganda yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Bu tasdiqni isbotlovchi quyidagi misolini keltiramiz (Lebeg misolining umumlashishi). $\mathbb{R}^3$ dagi $S=\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3: 0\le x\le 1\}$ kesmada

$$\mu(x) = \ f(x) \in C[0,1]$$

chiziqli zichlik bilan taqsimlangan quyidagi massa potensialini qaraylik.

$$u(x,y,z)=\int_0^1 \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2+z^2}} \tag{1}$$

Bu potensial S kesmadan tashqarida aniqlangan va garmonik. Kiritilgan $u(x,y,z)\equiv u(\vec{x})$ funksiyaning yetarli katta

$$|\vec{x}|=r$$

lardagi qiymatlari uchun

$$|u(\vec{x})|\le C_1\int\limits_0^1 \frac{|f(\xi)|\,d\xi}{r}=C_1\frac{1}{r}\int\limits_0^1 |f(\xi)|\,d\xi\le C_2\frac{1}{r}$$

$$C_1, C_2 = const > 0.$$

Demak,

$$u(x,y,z)\,| = O(\frac{1}{r}), r\to\infty \tag{2}$$

$$f(x)=kx,\ k=const>0$$

bo'lgan holni qaraylik. U holda (1) potensialni $\rho=\sqrt{y^2+z^2}\neq 0$ bo'lganda quyidagicha ifodalash mumkin.

$$u(x,y,z)=k\varphi(x,\rho)-2kx\ln\rho,$$

(3) $\varphi(x,\rho)=\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}-\sqrt{x^2+\rho^2}+x\ln\left(\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right)$

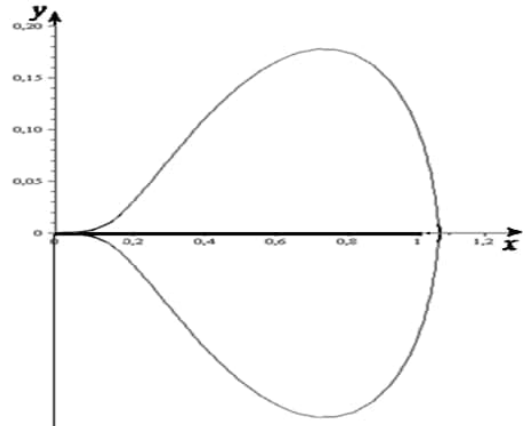
$u(x,\rho)$ funksiyaning sath sirtlari $u(x,\rho)=c(c=\text{const})$ tenglama bilan beriladi. Ular aylanma sirt bo'ladi (aylanish o'qi - x o'qi). $c>k$bo'lganda bu sirt $x\ge 0$ yarim fazoda joylashgan va u "uchli nok sirtiga"o'xshash. Bu sirtlarga $(0;0;0)$ nuqtani qo'shib qo'yamiz. Sath sirtlarining

$$z=0$$

tekislik bilan kesimi tekislikda egri chiziqlarni ifodalaydi. Bu egri chiziqlar $(0;0)$ nuqta atrofida

$$\exp(-k/x)$$

funksiya kabi bo'lib, ular koordinatalar boshiga urinishi cheksiz tartibli bo'ladi.



$1 - rasm.$

$u(x, y, z) = 2k$ sath sirtining $z = 0$ kesimi. Biror $c > k$ li sath sirti bilan chegaralagan, chegaralanmagan soha Gni qaraylik. G sohadaning chegarasi ∂G da $u|_{\partial G} = \varphi(\vec{y}) = c$, $\vec{y} \in \partial G$ chegaraviy shartli (tashqi) Dirixle masalasini qo'yaylik. (3) formula bilan aniqlangan $u(x, y, z)$ funksiya G da garmonik, ∂G ning koordinatalar boshidan farqli nuqtalarida $u(x, y, z) = c$, lekin $(x, y, z) \to (0; 0; 0)$ da turli yo'llar bo'ylab turli limitlarga intiladi, ya'ni $u(x, y, z)$ funksiya $\overline{G}$ da uzluksiz emas. Isbot qilish mumkinki, agar qaralayotgan Dirixle masalasining cheksizlikda (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo'lsa, u albatta aytilgan $u(x, y, z)$funksiya bilan ustma-ust tushadi. Bu yechimning $\overline{G}$ da uzluksiz bo'lishiga zid. Shunday qlib, qo'yilgan Dirixle masalasi yechimga ega emas. Endi $R = k/2$ radiusli $(k/2; 0; 0)$ markazli sferaga nisbatan Kelvin almashtirishini bajaraylik. Bu almashtirishda chegaralanmagan G soha chegaralangan D sohaga o'tadi va shu soha uchun hosil bo'luvchi mos (ichki) Dirixle masalasi yechimga ega bo'lmaydi. D soha olmaga o'xshash bo'lib, uning chegarasi koordinatalar boshiga cheksiz tartibli urinadi (juda ham uchli "voronka"shardan chiqarib tashlangan).

ADABIYOTLAR

1. Курант Р.,Гилберт Д. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. -831 с.
2. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. -288 с.

BUZILADIGAN GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMANING BIR ANIQ YECHIMI HAQIDA

Tulqinboyev T. A.

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
tulqinjon98@mail.ru.

Buziladigan xususiy hosilali differensial tenglamalar gaz dinamikasining turli masalalari matematik modellarining asosi bo'lib xizmat qilgan [1, 2]. Ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun turli lokal va nolokal shartli chegaraviy masalalar bir qiymatli yechilish ma'nosida ko'pchilik olimlar tomonidan tadqiq etilgan, analitik yechimlar topilgan (masalan, [3-5] ishlarni ko'ring).

Ushbu ishda biz, 2 ta tip buzilish tekisligiga ega bo'lgan chiziqli giperbolik tipdagi tenglamaning bir aniq yechimini qurish masalasini tadqiq etamiz. Olingan natijani keyinchalik bunday tipdagi tenglamalarning chiziqsiz holatlarini tadqiq etish rejalashtirilgan.

Quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamani

$$u_{tt} = (x^k u_x)_x + (y^k u_y)_y + f(x, y, t) \tag{1}$$

qaraylik, bu yerda $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 2)$ - berilgan son, $f(x, y, t)$ - berilgan funksiya.

(1) tenglamaning aniq bir yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$u(x, y, t) = U(z), \ z = 4x^{2-k} + 4y^{2-k} - (2-k)^2 t^2. \tag{2}$$

Xususiy hosilali differensial tenglamalarning aniq yechimlarini bunday usulda izlash haqida [6] dan batafsil ma’lumot olish mumkin.

(2) almashtirish asosida tenglamada ishtirok etgan kerakli hosilalarni hisoblab olamiz:

$$u_{tt} = -2(2-k)^2 U_z + 4(2-k)^4 t^2 U_{zz}, \tag{3}$$

$$(x^k u_x)_x = 4(2-k)U_z + 16(2-k)^2 x^{2-k} U_{zz}, \tag{4}$$

$$(y^k u_y)_y = 4(2-k)U_z + 16(2-k)^2 y^{2-k} U_{zz}. \tag{5}$$

Topilgan (3), (4) va (5) tengliklarni (1) tenglamaga qo‘yib, ba’zi soddalashtilarni amalga oshirib, (2) ko‘rinishni e’tiborga olsak,

$$2(2-k)zU_{zz} + (6-k)U_z = f_1(z) \tag{6}$$

tenglama kelib chiqadi, bu yerda $f_1(z) = -[2(2-k)]^{-1} f(x, y, t)$.

(6) tenglamaning yechimi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$U(z) = F_1(z) - \frac{4-2k}{2+k} C_1 z^{-\frac{2+k}{4-2k}} + C_2,$$

bu yerda $F_1(z) = \int z^{-\frac{6-k}{4-2k}} F(z)\, dz$, $F(z) = \frac{1}{2(2-k)} \int f_1(z) z^{\frac{2+k}{4-2k}} dz$, C_1 va C_2 – o‘zgarmas sonlar. (2) almashtirishni e’tiborga olib, (1) tenglamaning yechimi topiladi.

ADABIYOTLAR

1. Lipman B. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York: John Wiley & Sons, 1958.
2. Frankl F.I. Selected Works on Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1973 [in Russian]
3. Salakhitdinov, M. S. Some well-posed problems for the equation $y^m u_{xxx} + u_{xyy} = 0$. (Russian)// Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1963, V. 150, P.492–495.
4. Salakhitdinov M. S., Urinov A.K. A nonlocal boundary value problem in a doubly connected domain for an equation of mixed type with nonsmooth lines of degeneracy// Dokl. Math. 1988. V. 37, No 2. P.351–354.
5. Salakhitdinov M. S., Mirsaburov M. The Bitsadze-Samarskii Problem for a Class of Degenerate Hyperbolic Equations// Differ. Equ. 2002. V.38, No 2. P.288–293.
6. Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. London: CRC Press, 2012.

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKDA DIRIXLE MASALASI

Tuxtarov E.I.

Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston

elyor6233@mail.ru

$D = \{(x,y) : 0 < x < a, -b < y < c\}$ sohada quyidagi

$$u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x = 0 \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $a, b, c, \alpha \in R$, jumladan $a, b, c > 0,\ \alpha < 1/2$.

Ta'kidlash kerakki, (1) tenglama uchun S.P.Pulkin tomonidan [1,2], $\alpha \geq 1/2$ bo'lganda, uchlari $A(1,0)$ va $B(0,1)$ nuqtalarda bo'lgan Γ bo'lakli silliq chiziq va $OB = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, $OC = \{(x,y) : x + y = 0,\ 0 < x < 1/2\}$, $CA = \{(x,y) : x - y = 1, 1/2 < x < 1\}$ kesmalar bilan chegaralangan sohada Trikomi masalasi o'rganilgan. Masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida, mavjudligi esa integral tenglamalar usuli yordamida isbotlangan.

M.M.Xachev tomonidan [3] ishda D to'g'ri to'rtburchak sohada o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida Trikomi tenglamasi uchun Dirixle masalasi o'rganilgan.

To'g'ri to'rburchak sohada Dirixle masalasini turli xil buziladigan va singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun [4], [5], [6] ishlardan topish mumkin.

Dirixle masalasi. D sohada (1) tenglamani va quyidagi

$$u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^1(D) \cap C^2\left(D^+ \cup D^-\right), \tag{2}$$

$$Su(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in D^+ \cup D^-, \tag{3}$$

$$u(x,c) = \varphi(x),\ \ u(x,-b) = \psi(x),\ \ 0 \leq x \leq a, \tag{4}$$

$$u(a,y) = u(0,y) = 0, \quad -b \leq y \leq c, \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin, bu yerda $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $-$berilgan funksiyalar bo'lib, $\varphi(0) = \varphi(a) = \psi(0) = \psi(a) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi.

Bu ishda quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema. Masalada berilgan $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\varphi(x),\ \psi(x) \in C^4[0,a], \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi(l) = \varphi'(l) = \varphi''(l) = 0,$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0, \psi(l) = \psi'(l) = \psi''(l) = 0,$$

$\Delta(n) = ch\lambda_n c \cdot \sin\lambda_n b + sh\lambda_n c \cdot \cos\lambda_n b \neq 0,\ n \in N,\ |\Delta(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta},\ C_0 = const > 0$. U holda Dirixle masalasining yechimi mavjud, yagona va quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)\, X_n(x),$$

bu yerda $\lambda_n = \mu_n / l,\ \ n \in N$, μ_n esa $J_{1/2-\alpha}(x)$ Bessel funksiyasining nollari,

$$X_n(x) = \sqrt{2} x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\lambda_n x) \,/\, \left|a J_{3/2-\alpha}(\lambda_n)\right|,$$

$$u_n(y) = \begin{cases} \Delta^{-1}(n)\left\{\varphi_n\left[\cos\lambda_n b \cdot sh\lambda_n y + \sin\lambda_n b \cdot ch\lambda_n y\right] + \psi_n sh\lambda_n(c - y)\right\}, & y > 0, \\ \Delta^{-1}(n)\left\{\varphi_n\left[\sin\lambda_n(y + b) + \psi_n\left(sh\lambda_n c \cdot \cos\lambda_n y - ch\lambda_n b \cdot \sin\lambda_n y\right)\right]\right\}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \int_0^a \varphi(x)\, x^{2\alpha} X_n(x)\, dx, \quad \psi_n = \int_0^a \psi(x)\, x^{2\alpha} X_n(x)\, dx.$$

ADABIYOTLAR

1. Пулькин С.П. Некоторые краевые задачи для уравнений $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$// Уч. зап. Куйбышев. гос. пед. ин-та им. В.В. Куйбышева, 1958, N21, 3-55.
2. Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстеда// *Изв. вузов. Матем.*, 1960, N6, 214-225.
3. Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике// Дифференц. уравнения, 11:1 (1975), 151-160.
4. Сохадзе Р.И. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике// Дифференц. уравнения, 19:1 (1983), 127-134.
5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН, 413:1 (2007), 23-26.
6. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем., 2009, N11, 43-52.

PARABOLIK TIPDAGI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI EVOLYUSION METOD BILAN YECHISH

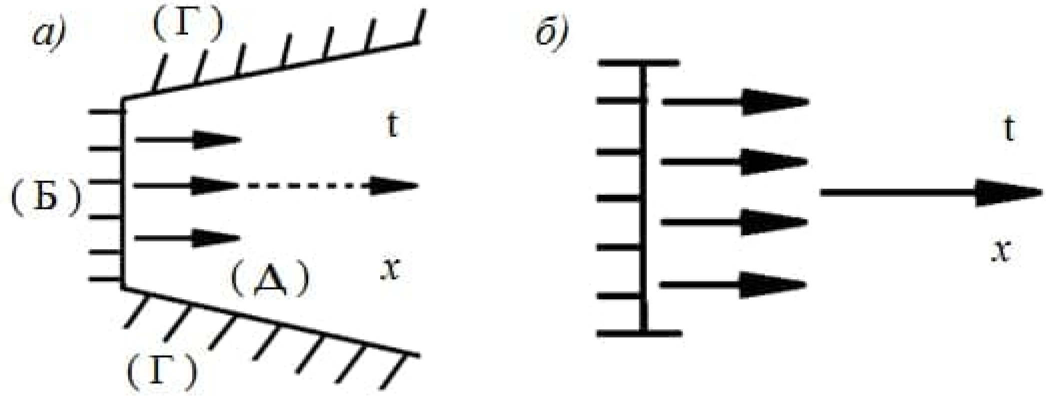
S. Xojiyev, A. N. Tag'oyev, Z. Z. Raximova
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Zamonaviy informatsion texnologiyaning rivojlanishi va hisoblash mashinalarining xotirasi va hisoblash tezligi oshishi ayrim muhim amaliy masalalarni yechish imkonini yaratdi. Bu imkoniyatlar esa matematik modeli murakkab tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadigan jarayonlarni o'rganish imkonini berdi.

Xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar bilan ifodalangan jarayonlarni analitik usullar bilan yechib o'rganish deyarli imkoni yo'q. Shu sababli bunday tenglamalar sistemasi asosan sonli usullar bilan yechiladi. Shunday usullardan biri chekli ayirmalar metodidir. Bunda differensial tenglamadagi differensial xodlar chekli ayirma analoglar bilan almashtirilib, ko'p sondagi algebraik tenglamalar sistemasi bilan almashtiriladi. Albatta, bunday tenglamalar sistemasini yechish hisoblash mashinasidan ko'p vaqt hisoblashni talab qiladi. Bu esa parallel o'z navbatida ko'p noma'lumli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish samarali usullarini yaratishni talab qiladi yoki jarayon modeli asosli sodda model bilan almashtirishga to'g'ri keladi.

Ma'lumki, tabiatdagi juda ko'p amaliy masalalar fizika va mexanikaning fundamental qonunlari matematik modeli yordamida o'rganiladi, ya'ni massa, harakat, enargiya saqlanish qonunlari asosida. Masalan, har tomonlama oqim harakatini umumiy to'la Nave-Stoks tenglamalar sistemasi yordamida o'rganish mumkin [1]. Vaholanki, oddiy siqiluvchan va issiqlik o'tkazuvchan havo oqimi uchun ham ushbu tenglamalar sistemasini yechish oson emas. Ushbu tenglamalar sistemasi elliptik tipda bo'lib, uni chekli ayirma metodi bilan yechishda vaqt bo'yicha butun hisoblash nuqtalarda yechimni saqlab turishni talab qiladi. Bu esa juda ko'p EHM xotirasini talab qiladi va hisoblash metodlari ham murakkab.

Ko'p hollarda o'rganilayotgan jarayon mohiyatiga qarab matematik modelini soddalashtirib, yetarli natija olish ma'lum bo'ladi. Shunday oqimlar borki, ularda asosan, bo'ylanma tezlik ko'ndalang tezlikdan ($U \gg V$) yetarli darajada katta, bosim ham asosan bo'ylanma yo'nalish bo'yicha o'zgaradi. Bunday masalar evolyusion (tarqalish) masalalari deyiladi hamda xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar sistemasini yopiq bo'lmagan sohada berilgan chegaraviy va boshlang'ich shartlarda yechish hisoblanadi. Evolyusion masalalarni yechish sohalari a) va b) chizmalarda keltirilgan (x - bo'ylanma yo'nalish koordinatsiyasi, t - vaqt).



(D) sohadagi yechim xususiy hosilali differensial tenglamalar sis-temasini qanoatlantirish kerak. (G) sohadagi yechim chegaraviy shartni qanoatlantirishi kerak. (B) oqim chiqadigan boshlang'ich soha bo'lib, unda yechim ma'lum hisoblanadi. Shunday masalalarga misol qilib, oqimlarni kesimi o'zgarmas va o'zgaruvchi sohalarda tarqalish yoki oqimni quvurdan chiqib (B) erkin tarqalishi yoki yo'ldosh oqim bilan qo'shilib tarqalishi (yonish masalalari) kabi masalalardir. Bunday matematik masalalar boshlang'ich shartli yoki boshlang'ich va chegaraviy shartli masalalar deb yuritiladi. Bunday masalalarni yechishda ilgarilama (маршевый) deb yuritiladigan metodlar ishlatiladi [1, 2]. Ushbu metodlar yordamida yechishda boshlang'ich shartlardan foydalanib ketma-ket yo'nalish bo'yicha chegaraviy shartlarni bajaradigan yechim topiladi. Bunday masalalar (jarayonlar) matematik modeli xususiy hosilali giperbolik yoki parabolik tipdagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Quvurlarda yopishqoqligi butun sohani (kesimni) egallaydigan havo oqimini kichik Reynolds sonlarida parabolik tipdagi "tor kanal yaqinlashishi"("приближение узкого канала") matematik modeli yordamida o'rganish mumkin. Biz shu metod yordamida [2] ishda keltirilgan tenglamalar sistemasini chekli ayirma metodi bilan quvurda havo oqimi tarqalishini har xil boshlang'ich qiymatlarida va chegaraviy shartlarda yechimi sonli o'rganilgan. Har xil qiymatdagi Re sonida yechimlar olinib tahlil qilingan. Butun kesim yopishqoq bo'lgan holda ham yechim olingan va shu hollarda ham kesimlarda massa saqlanishi kuzatiladi. Quvur va oqim simmetrik deb qaralganda simmetriya o'qi bo'yicha bo'ylanma tezlik kamayib boradi va boshlang'ich temperatura yuqori bo'lganda quvur bosh qismida harorat saqlanib turishi kuzatiladi.

ADABIYOTLAR

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. I. Пер. с анг.-М.: Мир.1990.-384 с.
2. Поспелов В.А., Ходжиев С. Методика расчета стационарного течения вязного газа в сопле Лаваля в приближении "узного канала"Движения многофазных смесей. Сб. Ст./ Ташкент. Фан, 1985. С. 70-77.

PURSUIT-EVASION GAME ON THE GRAPF OF 1-SKELETON OF THE PYRAMID AND PRISM

Xolboyev A.
Institute of Mathematics,Tashkent, Uzbekistan,
azamatholboyev@gmail.com

Let G denote the graph of 1-skeleton of the pyramid or prism in Euclidian space R^3 [1-3]. The team of Pursuers $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ and one Evader Q moving along play a pursuit-evasion differential game. Speed of Q doesn't exceed 1 while maximal speed of point P_i equals $\rho_i, \rho_i \leq 1, i = 1, 2, ..., m$, $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_m > 0$. The process of pursuit-evasion begins from initial positions $\mathbf{P}(0) = \{P_1(0), P_2(0), ..., P_m(0)\}$, $Q(0)$. If one of the players chooses concrete strategy and other chooses arbitrary control function the $\mathbf{P}(t) = \{P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t)\}, Q(t), t \geq 0$ then corresponding trajectories will be generated. The aim of the team of pursuers is to reach the equality $P_i(T) = Q(T)$ for some $i = 1, 2, ..., m$, $T \geq 0$ for any initial positions. The aim of evader is opposite, i.e. to hold the condition $P_i(t) = Q(t)$ for all $i = 1, 2, ..., m$ and $t, t \geq 0$ for some initial position (see [1-3]).

Obviously, if m is great enough then the team of Pursuers can win the game. The least value of m that m Pursuers win the game, will be denoted by $N(G)$.

Theorem 1. If $0 < \rho_1 < 0,5, 0,5 \leq \rho_2 \leq 1, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the pyramid, the team of Pursuers wins.

Theorem 2. If $0 < \rho_1 < 0,5, 0 < \rho_2 < 0,5, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the pyramid, the Evader wins.

Theorem 3. If $0 < \rho_1 < 0,5, 0 < \rho_2 < 0,5, 0 < \rho_3 < 0,5, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the pyramid, the team of Pursuers wins.

Theorem 4. If $\frac{1}{3} \leq \rho_1 < 1, \rho_2 = \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the prism, the team of Pursuers wins.

Theorem 5. If $0 < \rho_1 < 1, 0 < \rho_2 < 1, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the prism, the Evader wins.

Theorem 6. If $0 < \rho_1 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_2 < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \leq \rho_3 < 1, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the prism, the team of Pursuers wins.

Theorem 7. If $0 < \rho_1 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_2 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_3 < \frac{1}{3}, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the prism, the Evader wins.

Theorem 8. If $0 < \rho_1 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_2 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_3 < \frac{1}{3}, 0 < \rho_4 < \frac{1}{3}, \sigma = 1$ then on the Pursuit-Evasion game on the graph of 1-skeleton of the prism, the team of Pursuers wins.

REFERENCES

1. A.A. Azamov, T.T. Ibaydullayev, A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I., Matematicheskaya Teoriya Igri i Ee Prilozheniya, **(12) 4**(2020), 7–23.

2. A.A. Azamov, A.Sh. Kuchkarov, A.G. Holboyev, The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I., Automation and Remote Control, **(78) 4**(2017), 754–761.

3. A.A. Azamov, A.Sh. Kuchkarov, A.G. Holboyev, The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II., Automation and Remote Control, **(80) 1**(2019), 164–170.

NONLINEAR SECOND ORDER FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Yuldashev T. K.[1], Kholmanova K. Y.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com
[2]Jizzakh State Pedagogical Institute, Jizzakh, Uzbekistan
xolmanovaklara@gmail.com

Integro-differential equations as integral and differential equations are mathematical models of the many physical processes and the operation in technical systems. In application of integro-differential equations the analytical and iterative methods play an important role.

In this paper, we study the initial value problem of one value solvability and construction of solutions of a nonlinear Fredholm integro-differential equation of second order with degenerate kernel and nonlinear maxima. When a kernel of integral is degenerate, it is easy to replace the given equation by implicit differential equation, which is convenient to transform into Volterra integro-differential equation for solving by the method of successive approximations. The integral and integro-differential equations with degenerate kernels were considered by many authors (see, for example [1–8]).

So, in our paper, using the method of degenerate kernel in combination it with the regularization method, we obtain an implicit functional-differential equation with nonlinear maxima. As you know, Fredholm functional integro-differential equation of first kind is ill-posed. So, we use initial boundary conditions to ensure the uniqueness of the solution. In order to use the method of a successive approximations, we transform the implicit functional-differential equation to the nonlinear Volterra type functional integro-differential equation, which is ill-posed, too. The one value solvability of this problem we have proved by the given initial boundary conditions.

On the segment $[0;T]$ the following nonlinear Fredholm integro-differential equation of first kind and second order is considered

$$\lambda \int\limits_0^T K(t,s)\, F\left(s, u(s), \max\left\{u(\tau) \middle|\, \tau \in [h_1(s,u(s)); h_2(s,u(s))]\right\},\, u''(s)\right) ds = f(t) \tag{1}$$

under the following conditions

$$\left[\begin{array}{l} u(0) = \varphi_{01} = \text{const}, \\ u'(0) = \varphi_{02} = \text{const}, \\ u''(0) = \varphi_{03} = \text{const}, \\ u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [-h_{01}; 0], \\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [T; T + h_{02}], \end{array}\right.$$

where $0 < T$ is given real number, λ is nonzero parameter of marching, $F(t,u,v,\vartheta) \in C([0;T] \times X \times X \times X)$, $h_i(t,u) \in C([0;T] \times X)$, $-h_{01} < h_1(t,u) < h_2(t,u) < T + h_{02}$, $0 < h_{0i} = \text{const},\ i = 1,2,3,\ \varphi_1(t) \in C[-h_{01};0]$, $\varphi_2(t) \in C[T; T+h_{02}]$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s),\ 0 \neq a_i(t),\, b_i(s) \in C[0;T]$, X is closed set on real number set. Here it is assumed that each of the systems of functions $a_i(t),\ i = \overline{1,k}$, and $b_i(s),\ i = \overline{1,k}$, linearly independent, $\varphi_1(0) = \varphi_{01},\ \varphi_2(T) = u(T)$.

Using the notation

$$\vartheta(t) = F\left(t, u(t), \max\left\{u(\tau) | \tau \in [h_1(t,u(t)); h_2(t,u(t))]\right\},\, u''(t)\right)$$

and introducing new unknown function $\vartheta_\varepsilon(t)$, we obtain from (1) approximation Fredholm second kind integral equation with small parameter

$$\varepsilon \vartheta_\varepsilon(t) = f(t) - \lambda \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s)\, \vartheta_\varepsilon(s) ds,$$

where $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \vartheta_\varepsilon(t) = \vartheta(t)$, $0 < \varepsilon$ is small parameter.

REFERENCE

1. Dzhumabaev D. S., Bakirova E. A. On the unique solvability of a boundary value problem for systems of Fredholm integro-differential equations with a degenerate kernel // Nelineynye kolebaniya. 2015. V. 18. вћЦ 4. P. 489–506.
2. Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel. Ukrain. Matem. Zhurnal. 48. вћЦ 11. P. 1785–1789.
3. Yuldashev T. K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integrodifferential equation with degenerate kernel // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. V. 68. вћЦ 8. P. 1278–1296.
4. Yuldashev T. K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel // Differential equations. 2017. V. 53. вћЦ 1. P. 99–108.
5. Yuldashev T. K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. вћЦ 2. P. 230–239.
6. Yuldashev T. K. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations // Axioms. 2020. V. 9. вћЦ 2. ID 45. 21 pp.
7. Yuldashev T. K. On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. вћЦ 1. P. 111–123.
8. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. вћЦ 6. P. 1317–1327.

ON A FREDHOLM TYPE PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yuldashev T. K.[1], Eshkuvatov Y. F.[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com
Jizzakh State Pedagogical Institute, Jizzakh, Uzbekistan
yusuf932918113@gmail.com

Mathematical modelling of many processes occurring in the real world often leads to the study of the initial and boundary value problems for a non-classical equations of mathematical physics. High-order partial differential equations are of great interest from the point of view of physical applications. Many problems of gas dynamics, theory of elasticity, theory of plates and shells are reduced to the consideration of high-order partial differential equations. Integro-differential equations with degenerate kernels were considered, in particular, in [1–8].

In this paper, we propose a method for studying the unique solvability of the initial value problem for a nonlinear integro-differential equation of Fredholm type in partial derivatives of the fifth order with a degenerate kernel. This work is a further development of works [9, 10].

In the domain $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l^2$, we consider a fifth-order Fredholm-type integro-differential equation with a degenerate kernel

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^3 u(t, x_1, x_2)}{\partial t^3} + \lambda \int\limits_0^T K(t,s) \, \frac{\partial^2 u(s, x_1, x_2)}{\partial s^2} ds \right) =$$

$$= p(t)\,\beta\left(x_1, x_2, \int\limits_0^T \int\limits_0^l \int\limits_0^l H(s, y_1, y_2) u(s, y_1, y_2) dy_1 dy_2 ds\right) \tag{1}$$

with initial value problem

$$\begin{array}{l} u(0, x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2), \quad u_t(0, x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2), \\ u_{tt}(0, x_1, x_2) = \varphi_3(x_1, x_2) \quad x_1,\, x_2 \in \Omega_l^2, \end{array} \tag{2}$$

$$u\,(t, 0, 0) = \psi(t), \;\; t \in \Omega_T, \tag{3}$$

where $p(t) \in C\,(\Omega_T)$, $\beta(x_1, x_2, \gamma) \in C\,(\Omega_l^2 \times \mathbb{R})$, $\varphi_k(x_1, x_2) \in C^1\,(\Omega_l^2)$, $k = 1, 2, 3$, $\psi(t) \in C^2\,(\Omega_T)$, $\psi(0) = \varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = \varphi_3(0,0) = 0$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t)\, b_i(s)$, $0 < a_i(t),\, b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $0 < \int\limits_0^T \int\limits_0^l \int\limits_0^l |\, H(t, x_1, x_2)|\, dx_1 dx_2 dt < \infty$, $\Omega_T \equiv [0, T]$, $\Omega_l^2 \equiv [0, l] \times [0, l]$, λ is spectral parameter.

By the solution of the initial value problem (1)–(3) we mean a function $u(t, x_1, x_2) \in C^{3,1,1}(\Omega)$, satisfying partial integro-differential equation (1) and initial value conditions (2), (3).

The initial value problem (1)–(3) is reduced to the following Volterra type integral equation of the second kind with respect to the unknown function $u(t, x_1, x_2)$

$$u(t, x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + t\,\varphi_2(x_1, x_2) - \nu(t)\,\varphi_3(x_1, x_2) + \psi(t) +$$

$$+\mu(t) \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2} \beta\left(y, \int\limits_0^T \int\limits_0^l \int\limits_0^l H(\theta, z_1, z_2)\, u(\theta, z_1, z_2) dz_1 dz_2 d\theta\right) dy_1 dy_2,$$

where

$$\nu(t) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{1\,i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^t (t-s)^2 a_i(s) ds,$$

$$\mu(t) = \int\limits_0^t (t-s) q(s) ds, \quad q(t) = \int\limits_0^t p(s) ds,$$

$\Delta_{1\,i}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$ are determinants depending from the degenerate kernel.

REFERENCES

1. Dzhumabaev D. S., Bakirova E. A. On the unique solvability of a boundary value problem for systems of Fredholm integro-differential equations with a degenerate kernel // Nelineynye kolebaniya. 2015. V. 18. вЋЏ 4. P. 489–506.
2. Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel. Ukrain. Matem. Zhurnal. 48. вЋЏ 11. P. 1785–1789.
3. Yuldashev T. K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integrodifferential equation with degenerate kernel // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. V. 68. вЋЏ 8. P. 1278–1296.

4. Yuldashev T. K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel // Differential equations. 2017. V. 53. вЋЏ 1. P. 99–108.
5. Yuldashev T. K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. вЋЏ 2. P. 230–239.
6. Yuldashev T. K. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations // Axioms. 2020. V. 9. вЋЏ 2. ID 45. 21 pp.
7. Yuldashev T. K. On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. вЋЏ 1. P. 111–123.
8. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. вЋЏ 6. P. 1317–1327.
9. Yuldashev T. K. Inverse problem for a Fredholm third order partial integro-differential equation // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Fiz.-Mat. Nauki. 2014. V. 34. вЋЏ 1. P. 56–65.
10. Yuldashev T. K. On Fredholm partial integro-differential equation of the third order // Russian Math. (Iz. VUZ). 2015. V. 59. вЋЏ 9. P. 62–66.

A MIXED PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Yuldashev T. K.[1], Rasulova S. H.[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com
[2]Jizzakh State Pedagogical Institute, Jizzakh, Uzbekistan
sojidaras1995@gmail.com

We consider the questions of the classical solvability and construction of a solution to a multidimensional mixed problem for a fourth-order partial integro-differential equation with a degenerate kernel. Sufficient conditions for the existence of a classical solution to the mixed problem are obtained. The solution to the mixed problem is constructed in the form of a Fourier series, the absolute and uniform convergence of the solution to the mixed problem is proved.

In a multidimensional domain $\Omega = \{0 < t < T,\ 0 < x_1, ..., x_m < l\}$ we consider the following equation

$$U_{tt}(t,\,x) - \sum_{i=1}^{m}[\omega(t)\,U_{tt\,x_i\,x_i}(t,\,x) + \int_0^T U_{x_i\,x_i\,x_i\,x_i}(\theta,\,x)\,d\,\theta] =$$

$$= \nu \int_0^T K(t,\,s) \sum_{i=1}^{m} U_{t\,x_i\,x_i\,x_i\,x_i}(s,\,x)\,d\,s, \qquad (1)$$

where T and l are given positive real numbers, ν is a real nonzero parameter, $0 \le \omega(t) \in C\,[0;\,T]$, $x \in R^m,\ 0 \ne K(t,\,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\,b_i(s),\ a_i(t),\,b_i(s) \in C\,[0;\,T]$. We suppose that the system of functions $a_i(t),\ i = \overline{1,\,k}$ and the system of functions $b_i(s),\ i = \overline{1,\,k}$ are linear independent.

Problem. Find in Ω the function

$$U\,(t,\,x) \in C\,(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\,4}_{t,\,x}(\Omega) \cap C^{2+2+0+\ldots+0}_{t,\,x_1,\,x_2,\ldots,\,x_m}(\Omega)$$

$$C^{2+0+2+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}(\Omega)\cap\ldots\cap C^{2+0+\ldots+0+2}_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}(\Omega),$$

satisfying equation (1) and the following conditions

$$U\,(0,\,x)=\varphi\,(x),\quad 0\le x\le l,$$

$$U_t(0,\,x)=\psi\,(x),\quad 0\le x\le l,$$

$$U\big(t,\,0,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U\big(t,\,l,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=$$

$$=U\big(t,\,x_1,\,0,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U\big(t,\,x_1,\,l,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=\ldots=$$

$$=U\big(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,0\big)=U(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,l)=$$

$$=U_{x_1x_1}\big(t,\,0,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U_{x_1x_1}\big(t,\,l,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=$$

$$=U_{x_1x_1}\big(t,\,x_1,\,0,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U_{x_1x_1}\big(t,\,x_1,\,l,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=\ldots=$$

$$=U_{x_1x_1}\big(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,0\big)=U_{x_1x_1}(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,l\big)=\ldots=$$

$$=U_{x_mx_m}\big(t,\,0,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U_{x_mx_m}\big(t,\,l,\,x_2,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=$$

$$=U_{x_mx_m}\big(t,\,x_1,\,0,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=U_{x_mx_m}\big(t,\,x_1,\,l,\,x_3,\,\ldots,\,x_m\big)=\ldots,=$$

$$=U_{x_mx_m}(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,0)=U_{x_mx_m}(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},\,l)=0,$$

where $\psi(x)$, $\varphi(x)$ are given sufficiently smooth multidimensional functions in the domain

$$\Omega^m_l=\{x_1,...,x_m\}$$

, $C^r(\Omega)$ is the class of functions $U(t,\,x_1,...,x_m)$ with continuous derivatives $\frac{\partial^r U}{\partial t^r},\frac{\partial^r U}{\partial x_1^r},\ldots\frac{\partial^r U}{\partial x_m^r}$ in domain Ω, $C^{r,s}_{t,x}(\Omega)$ is the class of functions $U\big(t,x_1,...,x_m\big)$ with continuous derivatives $\frac{\partial^r U}{\partial,t^r},\frac{\partial^s,U}{\partial,x_1^s}\frac{\partial^s U}{\partial,x_m^s}$ in domain Ω, $C^{r+r+0+,+0}_{t,x_1,x_2,...x_m}(\Omega)$ is the class of functions $U\big(t,x_1,...,x_m\big)$ with continuous derivative $\frac{\partial^{2r}U}{\partial t^r\partial x_1^r}$ in domain Ω, $C^{r+0+..+0+,r}_{t,x_1,...,x_{m-1},x_m}(\Omega)$ is the class of functions $U\big(t,x_1,x_m\big)$ with continuous derivative $\frac{\partial^{2,r}U}{\partial t^r,\partial,x_m^r}$ in domain Ω, r,s are arbitrary natural numbers.

Note that in this paper the set of values of the spectral parameter $\nu\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ is divided into two regular and irregular subsets. For the set of regular values, sufficient conditions are obtained for the existence of a unique classical solution, which can be expanded in a Fourier series. This work is a further development of works [1, 2]. The generalized solvability of the mixed problem for linear parabolic and hyperbolic equations was studied in [3, 4].

REFERENCE

1. Yuldashev T. K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integrodifferential equation with degenerate kernel // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. vol. 68. no. 8. P. 1278–1296.
2. Yuldashev T. K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel // Differential equations. 2017. vol. 53. no. 1. P. 99–108.
3. Il'in V. A. On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations // Uspekhi matem. nauk. 1960. vol. 15. no. 2. P. 97–154.
4. Chernyatin V. A. Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations. Moscow: Moscow State University, 1992. 111 p. (in Russian)

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A GENERALIZED HIGH DEGREE WHITHAM-TYPE OPERATOR

Yuldashev T. K.[1], Bolbekov S. N.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com
[2]Jizzakh State Pedagogical Institute, Jizzakh, Uzbekistan
sayfiddinbolbekov@gmail.com

In this paper, we study the solvability and determination of the unknown coefficient in the inverse problem for a nonlinear partial integro-differential equation with a multidimensional generalized Whitham operator of high degree. This work is a further development of works [1–3].

In the domain $\Omega \equiv \Omega_T \times R^n$ we consider the Whitham-type multidimensional integro-differential equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon A\,\left(t,\, u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right)\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right) =$$

$$= \alpha\,(t)\,\beta\left(x_1,\, \ldots,\, x_n\right) +$$

$$+F\left(t, x_1, \ldots, x_n,\, u\big(t, x_1, \ldots, x_n\big),\, \int_0^T K(t,s)\, u\big(s, x_1, \ldots, x_n\big)\, ds\right) \tag{1}$$

with initial value conditions

$$u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right)_{|\,t=0} = \varphi_1\big(x_1,\, \ldots,\, x_n\big),\ \ \frac{\partial^i}{\partial t^i}\, u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right)_{|\,t=0} =$$

$$= \varphi_{i+1}\big(x_1,\, \ldots,\, x_n\big),\ \ x_1,\, \ldots,\, x_n \in R,\ \ i = \overline{1,\, m-1}, \tag{2}$$

where $u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right)$ is unknown function, $\alpha\,(t)$ is redefinition function, $\beta\left(x_1,\, \ldots,\, x_n\right) \in C\big(R^n\big)$, $A\,(t,\, u\,(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)) \in C\,(\Omega_T \times R)$, $\int_0^T |\, K\,(t,\, s)\,|\, ds < \infty$, $F\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u,\, \vartheta\right) \in C\big(\Omega_T \times R^n \times R \times R\big)$, $\varphi_i\big(x_1,\, \ldots,\, x_n\big) \in C\big(R^n\big)$, $i = \overline{1,\, m}$, $\Omega_T \equiv [0,\, T]$, $0 < T < \infty$, $R \equiv (-\infty,\, \infty)$, $n,\, m$ are natural numbers, ε is small positive parameter.

It is required to determine the main unknown function $u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right) \in C^m\big(\Omega_T \times R^n\big)$ and the coefficient redefinition function $\alpha\,(t)$ in the problem (1), (2) with the aid of the following condition

$$u\left(t,\, x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0\right) = \psi(t),$$

where $\left(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0\right) \in R^n$, $\psi\,(t) \in C^m\big(\Omega_T\big)$, $\psi\,(0) = 0$,

We reduce the initial problem (1), (2) to solving the following integral equation

$$u\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right) = \Theta\left(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n;\, u^k,\, \vartheta^k,\, p_1^k,\, \ldots,\, p_n^k\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\left(p_1\big(t,\, 0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\big),\, \ldots, p_n\big(t,\, 0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\big)\right)\, \frac{t^{m-i}}{(m-i)\,!} +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)\,!}\,\Big[\alpha\,(s)\,\beta\,\big(p_1\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big),\,\ldots,\,p_n\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big)\big)+$$

$$+F\,\big(s,\,p_1\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big),\,\ldots,\,p_n\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big),$$

$$u\,\big(s,\,p_1\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big),\,\ldots,\,p_n\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big)\big)\,,$$

$$\int\limits_0^T K(s,\theta)\,u\,\big(\theta,p_1\big(t,\theta,x_1,\ldots,x_n\big),\ldots,p_n\big(t,\theta,x_1,\ldots,x_n\big)\big)\;d\theta\Big)\Big]\,d\,s,$$

where $p_i\big(t,\,s,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n\big),\;\; i=\overline{1,\,n}$ are determined from the system of integral equations

$$p_i\big(t,\,s,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big)=$$

$$=x_i-\varepsilon\int\limits_s^t A\,\big(\theta,u\,\big(\theta,p_1\big(t,\theta,x_1,\ldots,x_n\big),\ldots,p_n\big(t,\theta,x_1,\ldots,x_n\big)\big)\big)\;d\,\theta,$$

$p_i\big(t,\,t,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\big)=x_i$ and the variables $x_1,\,\ldots,\,x_n$ play the role of a parameter.

In this paper, we study the solvability and determination of the unknown coefficient in the inverse problem for a partial integro-differential equation with a multidimensional generalized operator of Whitham type of high degree. Using the expression of high-order partial differential equations in terms of the superposition of first-order partial differential operators, the considered higher-order equation is presented as an ordinary integro-differential equation that describes the change of an unknown function along characteristics. The unique solvability of the direct problem is proved by the method of successive approximations. An estimate is obtained for the convergence of the Picard iterative process. The determination of the unknown coefficient is reduced to solving the Volterra-type integral equation of the first kind.

REFERENCE

1. Yuldashev T. K. An initial value problem for a partial quasilinear integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel, Izv. IMI UdGU. 2018. vol. 52. P. 116–130 (in Russian).
2. Yuldashev T. K. Integro-differential equation with a two-dimensional Whitham operator of a high degree // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mathematics and its applications. Subject Reviews. vol. 156. Moscow: VINITI RAN, 2018. P. 117–125 (in Russian).
3. Yuldashev T. K., Artykova Zh. A. An initial value problem for a nonlinear integro-differential equation with a hyperbolic operator of higher order and with a reflection of the argument // Dagestanskie elektronnye matematicheskie izvestiya. 2020. vol. 13. P. 31–56 (in Russian).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Абдуллаев О. Х.

Институт математики им.В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан,
obidjon.mth@gmail.com;

В данной работе рассмотривается нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа

$$0=\begin{cases}u_{xx} -_C D_{ot}^{\alpha}u+\mu_1 u+D_{0x}^{\beta_1}u(x,0), & \text{при } t>0\\ u_{xx}-u_{tt}+\mu_2 u+D_{0x}^{\beta_2}u(x,0), & \text{при } t<0\end{cases} \tag{1}$$

где α, β_i, μ_i- действительные постоянные, причем $\beta_i<1, \mu_i\neq 0$, и

$${}_C D_{0t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t (t-z)^{-\alpha}f'(z)dz, \quad 0<\alpha<1,$$

$$D_{0x}^{\beta}f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{-\beta}f(t)dt, & \text{при } 0\leq\beta<1,\\ \frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\beta-1}f(x)dx, & \text{при } \beta<0,\end{cases}$$

дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы, соответственно в смысле Капуто и Римана-Лиувилля.

Известно, что локальные и нелокальные задачи уравнений параболо-гиперболического типа с оператором Капуто след решения которых был включен в различные интегро-дифференциальные операторы дробного порядка, такие как Риман-Лиувилль, Эрдейли-Кобер и дрг. исследованы в работах [1],[2] и [3]. Хотелось бы отметить, что уравнения приведенные в выше подчеркнутых работах не включают себя слагаемое $\mu_i u(x,t)$. т.е. без младщего члена.

Основная цель данной работы, исследовать однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи с интегральныем условием склеивания для уравнения (1).

Пусть $\Omega-$ область, ограниченная отрезками: $A_1A_2=\{(x,t):\ x=1,\ 0<t<h\}$, $B_1B_2=\{(x,t):\ x=0,\ 0<t<h\}$, $B_2A_2=\{(x,t):\ t=h,\ 0<x<1\}$ при $t>0$, и характеристиками: $A_1C:\ x-t=1$, $B_1C:\ x+t=0$ уравнения (1) при $t<0$, где $A_1\,(1;0)\,,\ A_2\,(l;h)\,,\ B_1\,(0;0)\,,\ B_2\,(0;h)\,,$ и $C\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$. $\Omega_1=\Omega\cap(t>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(t<0)$, $I_1=\left\{x:\,0<x<\frac{l}{2}\right\},\ I_2=\left\{x:\,\frac{l}{2}<x<1\right\}.$

Задача I. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса функций: $W_1=\left\{u(x,t):\,u(x,t)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega_2);\,u_{xx},{}_C D_{ot}^{\alpha}u\in C\left(\Omega_1\right);\,u_x\in C^1(\bar{\Omega}_1\setminus A_2B_2)\right\}$ удовлетворяющие краевым условиям:

$$u_x(l,t)=\varphi_1(t),\quad u_x(0,t)=\varphi_2(t),\quad 0\leq t<h; \tag{2}$$

$$u(x,-x)=\psi_1(x),\ 0\leq x\leq 1;$$

и интегральное условие склеивания:

$$\lim_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\lambda_1(x)u_t(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+$$

$$+\lambda_3(x)u(x,0)+\lambda_4(x)\int\limits_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_5(x),\ 0<x<1$$

где $\psi_1(x)$, $\varphi_i(t)\,(i=1,2)$, $\lambda_k(x)\,(k=\overline{1,5})$ - заданные функции, причем $\sum\limits_{k=1}^{4}\lambda_k^2(x)\neq 0$.

Воспользуюсь свойствами функции Бесселя и известных операторов как $A_{ax}^{n,\mu}, B_{ax}^{n,\mu}$ и $C_{ax}^{n,\mu}$, исследование поставленной задачи сведется к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. При определенных условиях на заданные функции, доказывается однозначная разрещимость полученного интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1.Sadarangani K., Abdullaev O.Kh. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative.*Advances in Difference Equations.* Springer, AIDE-D-16- 00217R3.(2016).

2. Abdullaev O.Kh. Some Problems for the Degenerate Mixed Type Equation Involving Caputo and Atangana-Baleanu Operators Fractional Order, *Progr. Fract. Differ. Appl.* Natural publishing, **1**:2.1-14.(2020)

3. Abdullaev O.Kh. About a problem for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Erdelyi-Kober operators fractional order. *Ukr.math.jour.* **71**. no.6.723-738.(2019)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Абулов М. О.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан,
abulov1959@mail.ru;

В области $Q = \{(x,t) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} + k(x)u_{xxx} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u_t + d(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

где $xk(x) > 0$, при $x \neq 0, k(0) = 0$.

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,|_{\partial Q} = 0 \tag{2}$$

Для простаты изложения будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемые функции.

Отметим, что близкие задачи к задаче (1), (2) изучены в работах $[1-4]$.

Определение. Обозначим через $H(Q)$ пространство функций, полученное замыканием функций из C^∞, удовлетворяющих условиям (2) по норме

$$\|u\|_{H(Q)} = \int\limits_Q (k^2u_{xxx}^2 + u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2)dQ.$$

Теорема. Пусть выполнены условия

$$a(x,t) - \frac{3}{2}|k_x| \geq \delta > 0, \tag{3}$$

тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи (1), (2) из $H(Q)$.

Доказательство. Решение задачи (1), (2) будем искать методом Галеркина

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)\varphi_i(x),$$

где функции $\varphi_i(x)$ являются решениями задачи

$$\varphi_i'' = -\lambda_i\varphi_i, \quad \varphi_i(-1) = \varphi_i(1) = 0.$$

А коэффициенты $\gamma_i(t)$ находятся из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(u_{mtt},\varphi_i)_0+(ku_{mxxx},\varphi_i)_0+(au_{mxx},\varphi_i)_0+(bu_{mx},\varphi_i)_0+\\ +(cu_{mt},\varphi_i)_0+(du_m,\varphi_i)_0=(f,\varphi_i)_0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\gamma_i(0)=\gamma_i(T)=0,\quad i=1,2,\ldots,m. \tag{5}$$

Разрешимость задачи (4), (5) при каждом фиксированном m вытекает из общей теории по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Получим равномерные по m оценки для Галеркинских приближений. Для этого умножим (4) на $-\gamma_i(t)$ и, суммируя по i, получим

$$\begin{gathered}(u_{mtt},-u_m)_0+(ku_{mxxx},-u_m)_0+(au_{mxx},-u_m)_0+(bu_{mx},-u_m)_0+\\ +(cu_{mt},-u_m)_0+(du_m,-u_m)_0=(f,-u_m)_0.\end{gathered} \tag{6}$$

После интегрирования по частям в силу условия (3) получим

$$\int\limits_Q (u_{mt}^2+u_{mx}^2)dQ\le C. \tag{7}$$

Рассмотрим тождеству

$$(u_{mtt}+ku_{mxxx}+au_{mxx},u_{mxx})_0=(f-bu_{mx}-cu_{mt}+du_m,u_{mxx})_0. \tag{8}$$

Из тождества используя оценку (7), определения функций φ_i и теорему вложения, получим

$$\int\limits_Q (u_{mtx}^2+u_{mxx}^2)dQ\le C. \tag{9}$$

Далее, умножим (4) на $-\gamma_{tt}(t)$ и, суммируя по i, получим

$$(u_{mtt}+ku_{mxxx}+au_{mxx},u_{mtt})_0=(f-bu_{mx}-cu_{mt}+du_m,u_{mtt})_0. \tag{10}$$

Отсюда, интегрирования по частям в силу (3), (7) и (9) получим

$$\int\limits_Q (u_{mtt}^2+u_{mtx}^2)dQ\le C. \tag{11}$$

Из уравнения (4), в силу (7), (9) и (11) получим, что

$$k(x)u_{mxxx}\in L_2(Q) \tag{12}$$

Из оценок (7), (9), (11), (12) следует ограниченность последовательности приближенных решений $\{u_m(x,t)\}$ в пространстве $H(Q)$.

Поскольку все производные, входящие в уравнение (4) квадратично суммируемы по области Q, можно выбрать подпоследовательности $\{u_{m_k}(x,t)\}$ и перейти к пределу по $m_k\to\infty$ в системе (4). Нетрудно проверить, что предельная функция принадлежит пространству $H(Q)$. Поскольку система $\{\varphi_i(x)\}$ плотна в $L_2(-1,1)$, поступая аналогично, доказывается, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) п.в. в Q.

Тем самым, существование решения задачи (1), (2) доказана.

Из оценок (7), (9), (11), (12) стандартным образом вытекает единственности решение задачи (1), (2).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ, 1983. 84 стр.
2. Гатабон В.Д. Краевая задача для одного класса уравнений нечетного порядка. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. 1984, 179-182 стр.
3. Кажанов А.И. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. //Сибирские электронные математические известия. Т 18, №1, 2021, 43-53 стр.
4. Артюшин А.Н. О регулярной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением эволюции в весовых пространствах Соболева. //Сибирские электронные математические известия. Т 16, №1, 2019, 2003-2012 стр.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ/

Алланазарова Т. Ж.[1], Искандаров А. У.[2]

[1]Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
j.tazagul86@mail.ru;
[2]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и источником вида

$$q_t = a(t)q(x_0,t)[6q^2q_x - q_{xxx}] + b(t)q(x_1,t)q_x +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda,\ t>0eqno(1)$$

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ x\in R \tag{2}$$

в классе действительных π - периодических по x (не обязательно конечнозонных) функций

$$q(x+\pi,t) = q(x,t)\in C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geq 0). \tag{3}$$

В уравнение (1), коэффициенты $a(t), b(t)\in C[0,\infty)$ -заданные ограниченные функции, а $x_0, x_1\in R$ и $\beta(\lambda,t)$ -действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda,t) = \underline{\underline{O}}(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty.$$

$\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x,\lambda,t),\psi_2^\pm(x,\lambda,t))^T$ являются решениями Флоке (нормированными условием $\psi_1^\pm(0,\lambda,t)=1$) уравнение Дирака

$$L(t)\equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y,\ x\in R \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t)\\ q(x,t) & 0\end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнение (**??**), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t)$, $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$, $x\in R$, $t>0$ задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Если $q(x,t),\psi^{\pm}(x,t,\lambda),x\in R,t>0$ является решением задачи (1)-(3), то спектральные данные $\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$ - оператора Дирака

$$L(\tau,t)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&q(x+\tau,t)\\q(x+\tau,t)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\tag{5}$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\dot\lambda_n(\tau,t)=0,\ \ n\in Z,\tag{6}$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\{-2\xi_na(t)q(x_0,t)[q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)+2\xi_n^2(\tau,t)]-$$

$$-b(t)\xi_nq(x_1,t)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n(\tau,t)\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{\xi_n^2(\tau,t)-\lambda^2}d\lambda\},n\in Z\tag{7}$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}.$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ \ n\in Z\tag{8}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n\in Z$ спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau)\equiv L(\tau,0)$.

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau,t)+q_\tau'(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)),$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t))\tag{9}$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\{a(t)\xi_n(\tau,t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\sigma_k(x_0,t)h_k(\xi(x_0,t))\cdot$$

$$\cdot[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k(\tau,t))+4\xi_n^2(\tau,t)]+b(t)\xi_n(\tau,t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\sigma_k(x_1,t)h_k(\xi(x_1,t))+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n(\tau,t)\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{\xi_n^2(\tau,t)-\lambda^2}d\lambda\},\ n\in Z. \tag{10}$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решение задач (1)-(2). Для этого, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z$, оператора Дирака $L(\tau,0)$ соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$, через $\lambda_n, \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$. Теперь в систему уравнение (10) и начальным условиям (8) последовательно положим $\tau=x_0$ и $\tau=x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0,t),\ \sigma_n(x_0,t),\ n\in Z$ и $\xi_n(x_1,t),\ \sigma_n(x_1,t),\ n\in Z$. Затем из формулы следов (9) определим функции $q(x_0,t)$ и $q(x_1,t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнение (7), и решая задачу Коши (7), (8) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n\in Z$. Из формулы следов (9) определим $q(\tau,t)$. После этого легко найти решения Флоке $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$ уравнения $L(0,t)y=\lambda y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteveg-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p.1095-1098.

2. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., 32:6,44-47(1972).

3. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.//Матем.сб.,185:8(1994), с.103-114.

4. Mel'nikov V.K. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. // Inverse problems, 6:2(1990), 233-246.

5. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. ТМФ, 164, 214-221 (2010).

6. Хасанов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членам. // ТМФ, т.203, є2, (2020), 192-204.

7. Khasanov A.B., Allanazarova T.J. Integration of the nonlinear mo died Korteweg-de Vries equation with a loaded term. Uzbek Mathematical Journal, 2020, выпуск 3, 85-98.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ, СИНГУЛЯРНЫМ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Аликулов Т. Н.[1], Хусанов Э. А.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

[1]tolibaka@mail.ru

[2]elbek@mail.ru[2]

Рассмотрим в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n $(n>3)$ гладкие многообразия $S_1, S_2, ..., S_M,\ dimS_k\le n-3$, каждое из которых однозначно проектируется на некоторую гиперплоскость. Это означает, что для каждого такого многообразия S_k размерности $n-m$, где $3\le m<n$, существует аффинное преобразование R^n, приводящее S_k к виду

$$S_k=\{x=(u,v)\in R^n: u=\varphi_k(v)\}.$$

Здесь $u \in R^m, v \in R^{n-m}, \varphi_k \in C^1(R^{n-m} \longrightarrow R^m)$, причем равномерно по всем $v \in R^{n-m}$ имеют место неравенства $\left|\varphi_k^j/\partial v_i\right| \leq const$, где $i = 1, ..., n-m,\ \ j = 1, ..., m$ и $\varphi_k = (\varphi_k^1, ..., \varphi_k^m)$.

Пусть

$$S = \bigcup_{k=1}^{M} S_k,\ \rho = \rho(x) = dist(x,\ S) = \inf_{y \in S} |x - y|.$$

Положим

$$\rho_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (u_k - \varphi_j^k(v))},$$

где u_k и φ_j^k- координаты векторов $u \in R^m$ и $\varphi_j^k \in R^m, j = 1, 2, 3, ..., M$ соответственно.

Рассмотрим в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n возмущения полугармонического оператора с сингулярным коэффициентом вида

$$L(x, D) = (-\Delta)^N + q(x), (N > 1) \tag{1}$$

с областью определения $\mathbb{D}(L) = W_p^{2N}(R^n),\ n > 3,\ 1 \leq p < m$, где потенциал $q(x) \in C^\infty(R^n \backslash S)$, оператора $L(x, D)$, допускающий особенность вида

$$|D^\alpha q(x)| \leq const[\rho(x)]^{-1-|\alpha|}\{1 + [\rho(x)]^{-\tau}\}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha-$ мультииндекс, $\quad 0 \leq |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq n,\ 0 \leq \tau < 1.$

В дальнейшем оператор $L(x, D)$ обозначим через L.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Lu(t), \tag{3}$$

где t изменяется на промежутке $[0, T]$.

Определение 1. Решением уравнения (3) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $\mathbb{D}(L)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (3) на отрезке $[0, T]$.

Определение 2. Функция $u(t)$ называется ослабленным решением уравнения (3) $(0 \leq t \leq T)$, если:

1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$;

2) ее значения принадлежат $\mathbb{D}(L)$ при $0 < t < T$, а функция $L^{\frac{1}{2}} u(t)$ непрерывна на всем отрезке $0 \leq t \leq T$;

3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3) в интервале $(0, T)$.

Определение 3. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (3) $(0 \leq t \leq T)$, если:

1) она непрерывна на $[0, T]$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$;

2) значения функции $u(t)$ $(0 < t < T)$ принадлежат $\mathbb{D}(A)$;

3) она удовлетворяет уравнению (3) в интервале $(0, T)$.

Пусть $A-$ замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве и имеющий плотную в этом пространстве область определения $\mathbb{D}(A)$.

Отметим, что оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом на многообразиях ранее изучался в работах Ш.А. Алимова [3], Ш.А. Алимова и А.Р. Халмухамедова [4].

В работе получены следующее основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < m/(2+\tau), \tau \in [0,1)$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что выполняется неравенство*

$$\|(L+lI)^{-1}\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+l} \quad (l \geq 0).$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < m/(2+\tau), \tau \in [0,1)$. *Тогда всякое обобшенное решение уравнения (3) имеет вид*

$$u(t) = V(t)z_0 + V(t-T)W_T, \tag{4}$$

и наоборот, функция вида (4) является обобщенным решением уравнения (3) при любых $z_0, W_T \in W_p^{2N}(R^n)$. *Для того чтобы обобщенное решение (4) было ослабленным, необходимо и достотачно, чтобы* $z_0, W_T \in \mathbb{D}(L^{\frac{1}{2}})$. *Все обобщенные решения уравнения (3) являются аналитическими функциями от* t *при* $0 < t < T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустылник П.Е., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
2. Ильин В.А. Ядра дробного порядка //Мат. сб. 1957. **4** (41). С. 459–480.
3. Alimov Sh. Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential //Евразийский математический журнал. 2007. **2**. С. 4–11.
4. Алимов Ш.А., Халмухамедов А.Р. Оценки спектральной функций оператора Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Като //Вестник НУУз. 2005. **3**. С. 46–50.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Апаков Ю. П.[1], Умаров Р. А.[2]

[1]Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
[1]Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан
[1]yusupjonapakov@gmail.com [2]Андижанский институт сельского хозяйство и агротехнологии, Узбекистан
[2]r.umarov1975@mail.ru

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$, где $p > 0, q > 0$ постоянные числа, рассмотрим уравнение

$$L(U) \equiv U_{xxx} - U_{yy} + AU_{xx} + BU_x + CU_y + DU = G(x,y), \tag{1}$$

здесь $A,\ B, C, D \in R,\ G(x,y)$ −заданная достаточно гладкая функция.

Заметим, что заменой

$$U(x,y) = u(x,y)\exp\left(-\frac{A}{3}x + \frac{C}{2}y\right),$$

уравнения (1) преобразуется в следующий вид:

$$L(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1 u_x + a_2 u = g(x, y), \tag{2}$$

где

$$a_1 = -\frac{A^2}{3} + B \geq 0,\; a_2 = \frac{2A^3}{27} + \frac{C^2}{4} - \frac{AB}{3} + D \geq 0,\; g(x, y) = \exp\left(\frac{A}{3}x - \frac{C}{2}y\right) G(x, y).$$

Задача *A*. Найти решение уравнения (2) в области D из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \bigcap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, q) = 0,$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \qquad u(p, y) = \psi_2(y), \qquad u_x(p, y) = \psi_3(y),$$

где $\psi_j(y) \in {}^3[0, q]$, $j = \overline{1, 3}$ – заданные достаточно гладкие функции и

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi''_i(0) = \psi''_i(q) = 0, \quad g(x, y) \in C^{0,1}_{x,y}(D),$$

$$g(x, 0) = g(x, l) = 0.$$

Доказано одназначная разрешимость задачи A при определенных условиях на заданные функции. Отметим, что при $a_1 = a_2 = 0$ аналогичная задача исследована в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius, 2011. Vol. 16. № 3. pp. 255–269.
2. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. Киев, 2012. Т.64. № 1. С. 1–11.

АЙРИМ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА

Аслонов У. Ш.

Бухоро вилоят халқ таълими ходимларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш ҳудудий маркази Аниқ ва табиий фанлар методикаси кафедраси катта ўқитувчиси
aslonov-ulug@inbox.uz

Маълумки, замонавий хусусий дифференциал тенгламалар назариясида аралаш типдаги тенгламаларни ўрганиш муҳим ўрин эгаллайди. Бунга сабаб газ динамикаси, математик биология, лазер нурланиш назарияси, эластиклик назарияси, Қобиқ назарияси, бир жинсли бўлмаган муҳитда электромагнит майдоннинг тарқалиши назарияси, плазма назарияси ва фаннинг бошқа соҳаларида қўлланилиши ҳисобланади. Жумладан, С.А.Чаплигин "Газ оқими тўғрисида"ги [1] асарида газ оқими товуш тезлигигача бўлган тезликдан товуш тезлигидан юқори тезликка ўтиш вақтидаги ҳаракати аралаш типли тенглама билан ифодаланади. Ушбу типдаги тенгламалар учун фундаментал илмий ишлар ўтган асрнинг 20-30 йилларида Ф.Трикоми [2] ва С.Геллерстедт [3] лар томонидан амалга оширилган. Кейинчалик бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар М.Салохитдинов, Т.Джураев ва уларнинг ўқувчилари томонидан чуқур ўрганилган. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенгламалар эса кам ўрганилган [4-6]. Аралаш типдаги тенгламалар деб қаралаётган соҳанинг бир қисмида эллиптик, иккинчи қисмида гиперболик типга тегишли бўлган тенгламаларга айтилади, уларни ажратиб турувчи чизиқда (бузилиш чизиқи) эса тенглама параболик типга тегишли ёки аниқланмаган бўлиши мумкин. Ушбу мақолада Ω соҳасида иккита бузилиш чизиғига эга бўлган

$$\|xy\|^m\left(U_{xx}+\mathrm{sgn}yU_{yy}\right)+2qyU_x+2pxU_y+c(x,y)U=f(x,y,U), \qquad (1)$$
$$2\|q\|<1, 2\|p\|<1, m=const>0$$

квазичизиқли тенглама учун қуйидаги чегаравий масала ўрганилган: $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3$, бунда Ω_1 соҳаси $y>0$ жойлашган бўлиб, учлари $O(0,0)$ ва $(1,0)$ нуқталарда бўлган силлиқ Γ чизиқ ва Ox ўқининг $(0\leq x\leq 1)$ кесмаси, Ω_2 соҳаси $y<0$ да жойлашган бўлиб, $(0\leq x\leq 1)$ кесмаси, $OD: x+y=0(0\leq x\leq 0,5)$ ва $DA: x-y=1(0,5\leq x\leq 1)$, Ω_3 соҳаси $y<0$ да жойлашган бўлиб, $OD: x+y=0(0\leq x\leq 0,5)$ $CD: x-y=1(0\leq x\leq 0,5)$ ва Oy ўқидаги $OC(-1\leq y\leq 0)$ кесмаси билан чегараланган.

Таъриф: (1) тенгламани қаноатлантирувчи $U(x,y)\in C[\overline{\Omega}]\cap C^2[\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3]$ функция тенгламанинг регуляр ечими дейилади.

Чегаравий масала: (1) тенгламани қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечимини топинг:

$$U\big\|_{\Gamma}=\varphi(s), \quad 0\leq s\leq L,$$

L: — Γ эгри чизиқнинг нуқтадан бошлаб ўлчанган узунлиги; $U(+0,y)=\tau(y), \;\; -1\leq y\leq 0;$ бирикиш шартлари:

$$U(x,+0)=\alpha U(x,-0)+\gamma, \quad 0\leq x\leq 1,$$
$$\lim_{y\to+0}y^{2p}U_y=\beta\lim_{y\to-0}(-y)^{2p}U_y, \quad 0<x<1,$$
$$\lim_{\xi\to-0}U(\xi,\eta)=A(\eta)\lim_{\xi\to+0}U(\xi,\eta),$$
$$\lim_{\xi\to-0}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\lambda}U(t,\eta)dt=B(\eta)\lim_{\xi\to+0}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\lambda}U(t,\eta)dt$$

бунда

$$\xi=x+y, \quad \eta=x-y, \quad 0<\eta<1, \alpha,\beta,\lambda\in R, 0<\lambda<1.$$

(1) тенгламанинг эллиптик қисмида Дирихле, гиперболик қисмида Коши-Гурса чегаравий масалалари мос равишда (айрим чегаравий қийматлар берилган деб фараз қилинганган ҳолда) ечилади. Бирикиш шартларидан фойдаланилиб, ноъмалум функцияларга нисбатан сингуляр интеграл тенгламалар системасига келтирилади. Ҳосил бўлган тенгламаларга нисбатан Карлеман усули қўлланилиб, Фредгольм интеграл тенгламалар системасига олиб келинади. Берилган α, β, $\varphi(s)$, $\tau(y)$, $c(x,y)$, $A(\eta)$, $B(\eta)$, $f(x,y,U)$ функцияларга аниқ шартлар қўйилиб, чегаравий масала ягона ечимга эга бўлиши исботланган.

АДАБИЁТЛАР

1. Чаплыгин С.А. О газовых струях. - Полное собрание сочинений. Л.: Изд. АН. СССР, 1933. - Т .2. - 290 с.
2. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. - М. -Л.: Гостехиздат, 1947. - 192 с.
3. Gellerstedt S. Quelques problems mixtes pour i equation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ Arkiv f. Math. Astr.OchFysik, 1938.-26 A. -No.3.
4. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа "Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения"Международная научная конференция, Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 - 22 марта 2019 г.), с.65-66.
5. Расулов Х.Р. Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа. Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения, Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых, 15-17 декабря 2017 года, Ташкент, с. 63.
6. Расулов Х.Р., Ўроқова М.Ҳ. Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Тезисы докладов республиканской научной конференции "Новые результаты математики и их приложения СамГУ, 2018 года 14-15 мая, с. 85-86.

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ ДЛЯ СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Ахматов З. А.[1], Тотиева Ж. Д.[2]

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия,[1]
ahmatov1993@yandex.ru;
Южный математический институт, Север-Кавказский центр математических исследований Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия,[2]
jannatuaeva@inbox.ru

Как известно, учет памяти среды при распространении в ней упругих, акустических и электромагнитных волн, дает более точное описание процессов, происходящих в этих средах. Поэтому восстановление неизвестных характеристик для сред с последействием, несомненно, является актуальной задачей. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географичесим координатам, или горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения годографов волн от усредненного годографа, асиметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы [1].

Данное исследование ставит целью решить две задачи. Первая задача связана с определением функции (ядра интегрального оператора), описывающей явление памяти среда. Вторая задача – определение коэффициента-харатристики среды с учетом функции памяти. Исследование базируется на работах [2,3].

Для $(x,z,t) \in \mathbb{R}^3, z > 0$ рассмотрим **прямую задачу** определения функции $u(x,z,t)$ из интегро-дифференциального уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(x,z)u = \int_0^t k(\tau)u(x,z,t-\tau)d\tau, \quad z > 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u\big|_{t<0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=+0} = \delta'(x)\delta'(t), \tag{2}$$

где $\delta'(\cdot)$ – производная дельта-функции Дирака; $q(x,z)$ – коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс; $k(t)$ – ядро, описывающее память среды.

Введем формально параметр малости ε:

$$u(x,z,t) = u_0(x,z,t) + \varepsilon u_1(x,z,t) + O(\varepsilon^2), \tag{3}$$

$$q(x,z) = q_0(z) + \varepsilon x q_1(z) + O(\varepsilon^2), \tag{4}$$

$q_0(z) \equiv q_0 \equiv const$ предполагается заданной величиной.

Равенство (4) означает слабую зависимость от горизонтальной переменной x.

Подставляя (3)-(4) в (1)-(2), получим задачи (5)-(6) и (8)-(9):

$$(u_0)_{tt} - (u_0)_{xx} - (u_0)_{zz} - q_0 \cdot u_0 = \int_0^t k(\tau)u_0(x,z,t-\tau)d\tau, \quad z > 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$u_0\big|_{t<0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial z}\right|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t). \tag{6}$$

Обратная задача 1: Найти $u_0(x,z,t)$ и $k(t)$, входящих в (5)-(6), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_0](\nu,z,t)$ для некоторого значения параметра ν известно

$$F_x[u_0](\nu,z,t)\big|_{z=0} = -i\nu\delta(t) + f_0(\nu,t)\theta(t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть $T > 0$ фиксировано и выполнены следующие условия: $f_0(\nu,0) = 0, (f_0)'_z(\nu,0) = -\frac{q_0-\nu^2}{2}, f(\nu,t) \in C^2[0,T]$ для некоторого значения параметра ν. Тогда обратная задача (1)-(2), (7) в области $G_T = \{(z,t) |\ 0 \le z \le t \le T-z\}$ имеет единственное решение $k(t) \in C[0,T]$.

$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + xq_1(z)u_0(x,z,t) + q_0u_1(x,z,t) - \int_0^t k(\tau)u_1(x,z,t-\tau)d\tau, \tag{8}$$

$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\big|_{z=0} = 0, \quad z > 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Обратная задача 2: Найти $u_1(x,z,t)$ и $q_1(z)$, входящих в (8)-(9), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_1](\nu,z,t)$ для некоторого значения параметра ν известно

$$F_x[u_1](\nu,z,t)\big|_{z=0} = f_1(\nu,t), \ t > 0. \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть $f_1(\nu,t_1) \in C^1[0,T]$, $f_1(\nu,0) = 0$, функции $u_0(\nu,z,t)$ и $k(t)$ являются решением задачи (5)–(7). Тогда в области G_T существует единственное решение обратной задачи (8)–(10) $q_1(z) \in C[0,T/2]$.

Задачи (5)-(7), (8)-(9) сводятся к эквивалентным замкнутым системам интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Проведена численная реализация с помощью дискретизации пространства G_T, и замены соответствующих интегралов квадратурными формулами. Расчет неизвестых функций проводится по рекуррентным формулам. Устойчивость проверялась зашумлением данных обратной задачи. Результаты решения этих обратынх задачи позволяют учитывать последействие среды при анализе ее характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.

2. Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99.

3. Дурдиев Д. К. Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. Т. 12, N 3. С. 28–40.

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ-ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ахмедов К.Н.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
Lars28@inbox.uz

Начиная с 1953 года после публикации известных работ И.Л. Кароля [1] появился интерес к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода. Аналоги задачи Трикоми для уравнения эллитико-гиперболического типа второго рода в области, часть границы которой является линией вырождения, рассмотрены в работах [2]-[5].

В данной работе получено представление обобщенного решения класса R_2 видоизмененная задача Коши-Гурса для уравнения гиперболического типа второго с сингулярным коэффициентом.

Рассмотрим уравнение

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω комплексной полуплоскости $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z < 0$, ограниченной характеристиками

$$AC: \; x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1, \quad BC: \; x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

уравнения (1) и отрезком AB оси $y = 0$, здесь $C\left[0, -((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right]$, $A = A(-1, 0)$, $B = B(1, 0)$, а постоянные m и β_0 удовлетворяют условия

$$-1 < m < 0 \;, \quad -1 - m \leqslant \beta_0 < -m/2. \tag{2}$$

Определение 1. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω называется функция $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области Ω.

Видоизмененная задача Коши-Гурса. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad (x,0)\in\overline{AB}, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant \tfrac{1}{2}, \tag{4}$$

где $\tau(x)$, $\varphi(x)$ - заданные функции, причем $\tau(0)=\varphi(0)$,

$$\tau(x)\in C(\overline{AB})\cap C^2(AB), \tag{5}$$

$$\varphi(x)\in C^1(\overline{AB})\cap C^3(AB). \tag{6}$$

Переходим исследование видоизмененной задачи Коши-Гурса. При исследовании задачи Коши-Гурса важную роль играет решение видоизмененная задача Коши[6] с начальными данными

$$u\,(x,0)=\tau\,(x)\,,\quad (x,0)\in\overline{AB},\ \lim_{y\to -0}\frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y}=\nu\,(x)\,,\ \ (x,0)\in AB. \tag{7}$$

Определение 2. Обобщенное решение видоизмененной задачи Коши[6] с начальными данными (7) принадлежит классу R_2 , если $\nu(x)$ непрерывна в $(-1,1)$ и интегрируема в $[-1,1]$, а $\tau(x)$ есть интеграл дробного порядка $-(2\beta-1)$ от некоторой функции $T(x)$, непрерывной на $(-1,1)$ и интегрируемой на $[-1,1]$, т.е.

$$\tau(x)=\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-2\beta}\,T(t)dt, \tag{8}$$

где $\tau(x)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x\to -1$, $2\beta=\frac{m+2\beta_0}{m+2}$, причем $-1<2\beta<0$.

Обобщенное решение задачи Коши с данными (7) для уравнения (1) из класса R_2 в области Ω дается формулой [4]:

$$u\,(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}(\eta-t)^{-\beta}\,(\xi-t)^{-\beta}\,T\,(t)\,dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}\,(t-\xi)^{-\beta}\,N\,(t)\,dt, \tag{9}$$

где

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\ \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\ \gamma_2=\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \tag{10}$$

$$N\,(t)=T\,(t)/2\cos\pi\beta-\gamma_2\nu\,(t)\,. \tag{11}$$

Подставляя (9) в (4) находим $\nu(x)$, и подставляя в (9) находим в явном виде решение видоизмененной задачи Коши-Гурса, которой принадлежит классу R_2.

Таким образом, из самого способа получения формулы (9) и ее вида следует, что решение видоизмененной задачи Коши-Гурса (1), (3), (4) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. // Докл. АН СССР, 88 (2), 197-200(1953).
2.*Салахитдинов М.М., Исамухамедов С.С.* О некоторых смешанных задачах для уравнения $sgny\,|y|^{-m}\,u_{xx}+u_{yy}=0,\ \ 0<m<1$. // Изв. АН УзССР,
Сер. физ-мат наук, N5, 15-19(1970).
3.*Ивашкина Г.А.* О задачах типа Бицадзе-Самарского для уравнения
$u_{xx}+sgny\,|y|^{m}\,u_{yy}=0,\ \ 0<m<1$. // Дифференц. уравнения, 17(6), 1078-1089 (1981).
4.*Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б.* Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо- гиперболического типа второго рода. // Известия вузов. Математика. Россия. 2015. N6. С. 43-52.
5.*Исламов Н. Б.* Аналог задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода.// Уфимский мат. журнал. 2015. Т. 7. N1. С. 31-45.
6.*Ахмедов К.Н.* Видоизмененная задача Коши-Гурса для уравнения гиперболического типа второго с сингулярным коэффициентом.// Тезисы докладов на республиканский научный конференцию "Сарымсаковские чтения". 2021.

О КЛАССАХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Демиденко Г. В.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
demidenk@math.nsc.ru

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y,\quad t\in R, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица, и системы разностных уравнений

$$x_{n+1}=B(n)x_n,\quad n\in Z, \tag{2}$$

где матричная последовательность $\{B(n)\}$ — N-периодическая. В наших работах [1, 2] для систем (1), (2) установлены новые критерии экспоненциальной дихотомии.

Для системы (1) критерий экспоненциальной дихотомии формулируется в терминах разрешимости относительно эрмитовой матрицы $H(t)$ и матрицы P следующей краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H+HA(t)+A^*(t)H=-\left(Y^{-1}(t)\right)^*P^*Q(t)PY^{-1}(t) \\ +(Y^{-1}(t))^*(I-P)^*Q(t)(I-P)Y^{-1}(t),\quad 0<t<T, \\ H(0)=H(T)>0, \\ H(0)=P^*H(0)P+(I-P)^*H(0)(I-P), \\ P^2=P,\quad PY(T)=Y(T)P, \end{cases}$$

где $Y(t)$ — матрицант (1), $Q(t) = Q^*(t) > 0$.

Для системы (2) критерий экспоненциальной дихотомии формулируется в терминах разрешимости относительно эрмитовых матриц $V(0), \ldots, V(N)$ и матрицы P следующей краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} V(l) - B^*(l)V(l+1)B(l) = \left(U_l^*\right)^{-1} P^*C(l)PU_l^{-1} \\ -\left(U_l^*\right)^{-1}(I-P)^*C(l)(I-P)U_l^{-1}, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1, \\ V(0) = V(N) > 0, \\ V(0) = P^*V(0)P + (I-P)^*V(0)(I-P), \\ P^2 = P, \quad PU_N = U_NP. \end{cases}$$

где $\{U_n\}$ — матрицант (2), $C(l) = C^*(l) > 0$.

Отметим, что эти критерии являются аналогами соответствующих утверждений о задаче дихотомии для систем уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [3–5]).

Используя эти критерии экспоненциальной дихотомии, мы получаем оценки параметров дихотомии, доказываем аналоги теорем о возмущении [5, 6] для экспоненциальной дихотомии, устанавливаем условия существования периодических решений нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений, а также их устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00754).

ЛИТЕРАТУРА

1. Demidenko G.V. On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations. 2016. V. 6, No. 1. P. 63–74.

2. Демиденко Г.В., Бондарь А.А. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 6. Р. 1240–1254.

3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

4. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

5. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2009.

6. Демиденко Г.В. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 38–46.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ.

Джамалов С. З.[1], Ашуров Р. Р.[2], Туракулов Х. Ш.[3]

Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

[1] siroj63@mail.ru.
[2]ashurovr@gmail.com.
[3]hamidtsh87@gmail.com.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Как близкие по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа первого рода исследована в ограниченных областях в работах [3]-[7].
В данной работе с использованием результатов работ [6],[7] изучаются однозначная разрешимость обобшенного решения одной нелокальной краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области.
В области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a(x,t)\, u_t + c(x,t)\, u = f(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа . Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Нелокальная краевая задача. Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p\, u|_{x=-1} = D_x^p\, u|_{x=1}\,, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, $\gamma, \eta-$некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которого будет уточнены ниже.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3) .

Теорема.Пусть выполнены следующее условия для коэффициентов уравнения (1); $2a(x,t) + \mu K(x) > \delta_1 > 0$, $\mu\ c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $|\eta| \geq 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(Q)$, такой, что $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, и для нее справедливы следующие оценки:

I). $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(Q)} \leq c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(Q)}$

II). $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(Q)} \leq c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(Q)}$

где $c_i -$ положительные вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля. Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q_1)}\, d\lambda,$$

где $W_2^l(Q_1)$ пространства Соболева, где $s, l-$ любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\leq l} \int_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$есть обобщенная производная по переменними x и t,а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье функции $u(x,t,z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа// ДАН СССР,1953,Т.122,№2, С.167–170.

2. Франкль.Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.// Прикладная математика и механика,1956,Т.20, №2, С.196–202.

3. Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа.// Дифференциальные уравнения,1978.Т.4,No3, С.546–548.

4.Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области.// Док. РАН,2007,Т.413,№1, С.23–26.

5.Цыбиков.Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа.// В. кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск,1986, С.201–206.

6.Dzhamalov S.Z and Ashurov R.R. A linear inverse problem for a multidimensional mixed-type second-order equation of the first-kind,// Russian Mathematics,2019,T.63, P.8–18.

7.Dzhamalov Z.S A nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional equation of mixed type of the first kind,// Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki,2017,T.21,No 4, P.1–14.

8.Джамалов.С.З., Ашуров.Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве.// Казахский математ журнал,2015,Т.18,№2, С.59–70.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Дурдиев Д.К.

Заведующий Бухарским отделением Института Математики АН РУз,
durdiev65@mail.ru;

В природе совершенно эластичного материала не существует, на самом деле неэластичность всегда присутствует. Следовательно, для широкого класса материалов недостаточно использовать упругую модель, чтобы исследовать их механическое поведение. Для онисания основополагающих уравнений вяазкоупругих материалов используются интегро-дифференциальные уравнение. В этой заметке показывается эквивалентность одного такого уравнения дробному уравнению диффузии.

Теорема. Интегро-дифференциальное уравнение диффузии

$$U_t - \Delta U + \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta U(x,\tau)d\tau = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{1}$$

с ядром $K(t) = t^{-\alpha}E_{(1-\alpha),(1-\alpha)}(-t^{1-\alpha}), \quad \alpha \in (0,1)$, эквивалентно дробному уравнению диффузии

$$U_t +_0^c D_t^\alpha U - \Delta U(x,t) = 0, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [1], определяемая рядом $_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера, а в (2) ${}_0^cD_t^\alpha U$ — дробная производная Капуто по времени [1]:

$${}_0^cD_t^\alpha U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{U_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Теорема может быть доказана с использованием следующей леммы [2]:

Лемма. Если для любого $T > 0$ имеет место включение $\{K(t), r(t)\} \in L_1[0,T]$ и функции $K(t), r(t)$ удовлетворяют интегральному уравнению.

$$r(t) = (t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)r(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

то решение интерального уравнения

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t K(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau + f(t), \quad f(t) \in L_1[0,T]$$

выражается по формуле

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t r(t-\tau)f(\tau)d\tau + f(t).$$

Дифференциальное уравнения с дробным производным (2) описывает аномально диффузионный перенос растворенного вещества в гетерогенных пористых средах [3]. Также существуют другие интегро-дифференциальные уравнения, описывающие волновые процессы в естеетвиных науках близкие уравнению (1), с ядром, содержащим двупараметрическую функцию Митаг-Леффлера с действительным аргументом (см. [4]), которые эквивалентны дифференциальным уравнениям с дробными производными более общего вида чем (2),

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Amsterdam, Elsevier, 2006.
2. D.Durdiev, E.Shishkina, S.Sitnik. The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space // Lob. Jour. of Math., 2021, Vol. 42, No. 6, pp. 1264—1273.
3. R. Schumer, D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and B. Baeumer. Fractal mobile/immobile solute transport // Water Resour. Res. 39, 1—12 2003.
4. M.A. Sultanov, D.K. Durdiev, A.A. Rahmonov. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation// Mathematics, 2021, 9(17), 20—52.

ИЗУЧЕНИЕ ЭРЕДИТАРНЫХ СВОЙСТВ ПЛОСКОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Дурдиев Д.К.[1]**, Болтаев А.А.** [2]

[1] Заведующий Бухарским отделением Института Математики АН РУз
durdiev65@mail.ru;
[2] БухГУ, преподователь кафедры Дифференциальные уравнения
asliddinboltayev@mail.ru;

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через σ_{ij} проекцию на ось x_i напряжения действующего на площадку с нормалью, параллелной оси x_j, а $\overline{u}_i$ — проекция на ось x_i вектора смещения частицы. Согласно закону Гука для вязкоупругих сред напряжения с деформациями связаны формулами [1]:

$$\sigma_{ij}(\overline{x},t) = \mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u} +$$

$$+\int\limits_0^t K_{ij}(t-\tau)\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u}\right](\overline{x}, t-\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

здесь $\mu = \mu(x_2),\ \lambda = \lambda(x_2)$ — коэффициенты Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, $K_{ij}(t)$ — функции отвечающие за вязкость среды и $K_{ij} = K_{ji},\ i,j = 1,2$.

Уравнения движения частиц плоского тела при отсутствии внешних сил имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, i = 1,2, \qquad (2)$$

где $\rho = \rho(x_2)$ — плотность среды, $\overline{u}(\overline{x},t) = (\overline{u}_1(\overline{x},t), \overline{u}_2(\overline{x},t))$ — вектор смещений.

С учётом этого, система уравнений (1) и (2) относительно скорости u_i и напряжения σ_{ij} может быть написана в виде системы пяти интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Для удобства обозначая $x_1 = x,\ x_2 = y$, имеем

$$I\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + B_1\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + D_1\vartheta = \int_0^t R_1(t-\tau, y)\vartheta(\overline{x},\tau)d\tau, \qquad (3)$$

где $\Lambda = diag(\nu_s, -\nu_s, \nu_p, -\nu_p, 0)$, I — единичная матрица размерности 5.

$$B_1(y) = (b_{ij}(y))_{5\times5}\,, \quad D_1(y) = (c_{ij}(y))_{5\times5}\,, \quad R_1(y,t) = (\widetilde{r}_{ij}(y,t))_{5\times5}\,, \quad i,j = \overline{1,5}$$

$b_{ij}=0\ i,j=1,2,\ \ b_{ij}=0\ i,j=\overline{3,5},\ \ b_{15}=b_{25}=-\frac{1}{2\rho},\ b_{13}=b_{24}=-\frac{\sqrt{\mu}}{2\rho\sqrt{\lambda+2\mu}}-\frac{\lambda}{2\rho(\lambda+2\mu)},$ $b_{1,4}=b_{23}=\frac{\sqrt{\mu}}{2\rho\sqrt{\lambda+2\mu}}-\frac{\lambda}{2\rho(\lambda+2\mu)},\ \ b_{31}=b_{42}=-\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}}{2},\ \ b_{41}=b_{32}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}}{2},$ $b_{51}=b_{52}=-\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\ c_{ij}=c_{ij}(y),\ i,j=\overline{1,5};\ c_{11}=-c_{12}=\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\mu\rho}\right)-\frac{r_{33}(0)}{2},\ \ c_{21}=-c_{22}=$ $\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\mu\rho}\right)+\frac{r_{33}(0)}{2},\ \ c_{33}=c_{43}=\frac{\lambda+2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}}\right)-\frac{r_{22}(0)}{2},\ \ c_{34}=c_{44}=\frac{\lambda+2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}}\right)-$ $\frac{r_{22}(0)}{2},\ \ c_{53}=c_{54}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(r_{22}(0)-r_{11}(0)\right),\ \ c_{55}=-r_{11}(0),\ c_{lp}=c_{pl}=0,\ l=1,2,\ p=3,4,5;$ $c_{35}=c_{45}=0,\widetilde{r}_{ij}=\widetilde{r}_{ij}(y,t),\ i,j=\overline{1,5}\ \widetilde{r}_{lp}=\widetilde{r}_{pl}=0,\ l=1,2,\ p=3,4,5,\ \ \widetilde{r}_{35}=\widetilde{r}_{45}=0,\ \ \widetilde{r}_{11}=$ $-\widetilde{r}_{12}=-\widetilde{r}_{21}=\widetilde{r}_{22}=-\frac{r'_{12}(t)}{2},\ \ \widetilde{r}_{ij}=-\frac{r'_{22}(t)}{2},\ \ i,j=3,4,\ \widetilde{r}_{53}=\widetilde{r}_{54}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(r'_{22}(t)-r'_{11}(t)\right),$ $\widetilde{r}_{55}=-r'_{11}(t).$

Рассмотрим систему уравнений (3) в области

$$D=\{(x,y,t):x\in\mathbb{R},0<y<H,t>0\},\quad H=\text{const}.$$

Для этой системы **прямую задачу** поставим следующим образом:

$$\vartheta_i\Big|_{t=0}=\varphi_i(x,y),\ i=\overline{1,5},\tag{4}$$

$$\vartheta_i\Big|_{y=0}=\psi_i(x,t),\ i=1,3,\quad \vartheta_i\Big|_{y=H}=\psi_i(x,t),\ i=2,4.\tag{5}$$

Известно, что задача (3)—(5) поставлена корректна [см.2]. Предположим, что функции $\varphi_i(x,y),\ \psi_i(x,y)$ финитны по x при каждом фиксированном y,t и обладают гладкостью до некоторой степени.

Из существования для системы (3) конечной области зависимости и финитности по x данных (4) и (5) следует финитность по x решений v_i задачи (3)—(5). Тогда к равенством (3)—(5) можно применить преобразование Фурье по x. Обозначим $V_i(y,t):=\widetilde{\vartheta}_i(\xi,y,t)\Big|_{\xi=0}$, где $\widetilde{\vartheta}_j(\xi,y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\vartheta_j(x,y,t)dx,\ j=\overline{1,4}$ — преобразования Фурье функций ϑ_i, ξ — параметр преобразования. Прямые вычисления показывают, что $V(y,t)=(V_i,i=\overline{1,5})$ удовлетворяет уравнению

$$I\frac{\partial V}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial V}{\partial y}+D_1V=\int_0^t R_1(y,t)V(y,t-\tau)d\tau,\tag{6}$$

а условиям (4), (5) соответствуют условия

$$V_i\Big|_{t=0}=\widetilde{\varphi}_i(y),\ i=\overline{1,5},\tag{7}$$

$$V_i\Big|_{y=0}=\widetilde{\psi}_i(t),\ i=1,3,\qquad V_i\Big|_{y=H}=\widetilde{\psi}_i(t),\ i=2,4,\tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}_i(y),\ i=\overline{1,5},\ \widetilde{\psi}_i(t),\ i=\overline{1,4}$ — образы Фурье соответствующих функций из (7), (8) при $\xi=0$. Обозначим ещё через D_H проекцию D на плоскость y,t.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\rho(y),\ \mu(y),\ \lambda(y)\in C^1[0,\infty),\ \widetilde{\varphi}(y)\in C[0,\infty),\ \widetilde{\psi}(t)\in C\left[0,\infty\right),\ \rho(y)>0,\lambda(y)>0,\ \mu(y)>0,\ r'_{ij}(t)\in C^1\left[0,\infty\right),\ i,j=1,2,$ и выполнены условия $\widetilde{\varphi}_i(0)=\widetilde{\psi}_i(0),\ \ i=1,3,\quad \widetilde{\varphi}_i(0)=\widetilde{\psi}_i(H),\ \ i=2,4.$ Тогда в области D_H существует единственное классическое решение задачи (6)—(8).

Задача (6) - (8) в области D_H эквивалентна линейному интегральному уравнению второго вида типа Вольтерра относительно V_i. Как следует из теории линейных интегралных уравнений, такая система имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости // М.:Наука, 1980, стр 242.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1979.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА РЕАКЦИИ В ДРОБНОМ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ

Дурдиев У. Д.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
umidjan93@mail.ru;

Рассмотрим следующее трехмерное диффузионное уравнение дробного порядка:

$$\left({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u\right)(x,t) - \Delta_x u + q(x',t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \{t > 0\}$$

при условии

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

где Δ_x-оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, x_2, x_3)$, а ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, - регуляризованная дробная производная по t (производная Герасимова-Капуто), т.е.

$$\left({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$

а $f(x,t)$, $\varphi(x)$-заданные гладкие функции.

Обратная задача. Требуется определить функцию $q(x',t)$, $x' \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ в (1), если решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию

$$u\Big|_{x_3=0} = g(x',t), \quad x' \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \tag{3}$$

где $g(x',t)$-заданная функция.

Теорема 1. *Если* $f(x,t) \in C\big(H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3), [0,T]\big)$, $\varphi(x) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3)$, $g(x',t) \in C(H^\alpha(\mathbb{R}^2), [0,T])$, $\|g(x',t)\|^\alpha \geq g_0 > 0$, $g(x',0,0) = \varphi(x',0,0)$, *то существует такое число* $T^* \in (0,T]$, *что обратная задача (1)–(3) имеет единственное решение* $q(x',t) \in C\big(H^\alpha(\mathbb{R}^2), [0,T^*]\big)$.

Через $C\left(H^l(\mathbb{R}^n), [0,T]\right)$ обозначим класс непрерывных на отрезке $[0,T]$ по переменной t функций со значениями в $H^l(\mathbb{R}^n)$, где H^l-пространство Гельдера с показателем l, где $T > 0$ - произвольное фиксированное число. Норма в этом пространстве определяется следующим образом [1, с. 16–27]:

$$|\varphi| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x,t)| + \sup_{|x^1-x^2|\leq\rho_0, x^1,x^2\in\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x^1,t) - \varphi(x^2,t)|}{|x^1-x^2|^l}$$

При фиксированном t норма функции $\phi(x,t)$ в $H^l(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $|\phi|^l(t)$. Такое обозначение используем для функций зависящих только от переменной x. Норма функции $\phi(x,t)$ в $C\left(H^l(\mathbb{R}^n),[0,T]\right)$ определяется равенством

$$\|\phi\|^l := \max_{t\in[0,T]} \left||\phi|^l(t)\right|.$$

Пусть T - произвольное положительное фиксированное число. Рассмотрим множество $\Omega(\gamma_0)$, ($\gamma_0 > 0$ некоторое фиксированное число) заданных функций (f,φ,g), для которых выполнены все условия теоремы 1 и $\max\left\{\|f\|^{\alpha+2}, |\varphi|^{\alpha+2}, \|g\|^{\alpha}\right\} \le \gamma_0$. Через $Q(\gamma_1)$ обозначим класс функций $q(x',t) \in C\big(H^\alpha(\mathbb{R}^2),[0,T]\big)$, удовлетворяющих неравенству $\|q\|^\alpha \le \gamma_1$ с некоторым фиксированным положительным числом γ_0.

Теорема 2. *Пусть* $(f,\varphi,g) \in \Omega(\gamma_0)$, $(\tilde{f},\tilde{\varphi},\tilde{g}) \in \Omega(\gamma_0)$ *и* $(q,\tilde{q}) \in Q(\gamma_1)$. *Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\|q-\tilde{q}\|^\alpha \le c\Big(\|f-\tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi-\tilde{\varphi}\| + \|g-\tilde{g}\|^\alpha\Big), \tag{4}$$

где постоянная c *зависит только от* T, α, γ_0, γ_1.

Из теоремы 2 легко следует следующая теорема единственности для любого $T > 0$:

Теорема 3. *Пусть функции* $q(x',t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $g(x',t)$ *и* $\tilde{q}(x',t)$, $\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{g}(x',t)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 2. Причем если* $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $g = \tilde{g}$ *для* $(x,t) \in \Phi_T$, *то* $q(x',t) = \tilde{q}(x',t)$, $x' \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа// М.: Наука, 1967. С. 736.

2. Kochubei A.N. A Cauchy problem for evolution equations of fractional order// Differential Equations. 1989. V. 25. P. 967–974.

3. Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy Problem for Fractional Diffusion Equations// Journal of Differential Equations. 2004. V. 199. P. 211–255.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЕМ ТРИКОМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Жураев Ф.М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М.Нахушева [1], В.М.Казиева [2], Б.Исломова и Ф.Джураева [3]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y , ограниченная кривыми:

$$S_j: \ \ |x| = 1, \ \ 0 < y < 1, \ S_3: \ \ 0 < x < 1, \quad y = 1, \ S_4: \ \ -1 < x < 0, \quad y = 1,$$

$$\Gamma_j: \ |x| - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad \Gamma_{j+2}: \ |x| + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \ \ y \le 0,$$

здесь и далее $x \ge 0$, при $j = 1$, $x \le 0$, при $j = 2$, причем $m < 0$.

Введем обозначения $\quad \Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x,y): \ x > 0, \ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x,y): \ x < 0, \ y > 0\}, \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x,y): \ x > 0, \ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x,y): \ x < 0, \ y < 0\}, \ \ I_1 = \{(x,y): \ 0 < x < 1, \ y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x,y): \ -1 < x < 0, \ y = 0\}, \ I_3 = \{(x,y): \ x = 0, \ 0 < y < 1\},$$

$$\Omega_j = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^- \cup J_j, \ \Omega_3 = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup J_3, \ \ A_j((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j,$$

$$C_j \left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2}; \ \ -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4} \right)^{2/(2-m)} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, \ (j = 1,2),$$

$$O(0,0) = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \ B_1(1,1) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3, \ B_2(-1,1) = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, \ B_0(0,1) = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u(x,0), & (x,y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u(x,0), & (x,y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \quad p, \quad \rho_j, \quad \mu_j \ (j = 1,2)$−любые действительные числа, причем

$$m < 0, \ \ p > 0, \ \ \rho_j > 0, \ \ \mu_j > 0, \ (j = 1,2).$$

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача TG. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+\right) \cap C^2\left(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-\right)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j = 1,2)$;
3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2},$$

4) на линии вырождения I_i $(i = \overline{1,3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \ (x,0) \in I_j, \ (j = 1,2),$$

$$\lim_{x \to +0} u_x(x,y) = \lim_{x \to -0} u_x(x,y), \ (0,y) \in I_3;$$

где $\varphi_1(y), \ \varphi_2(y), \ g_1(x), \ g_2(x)$, − заданные функции, причем $g_2(-1) = \varphi_2(0)$,

$$\varphi_j(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \ (j = 1,2), \tag{2}$$

$$g_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \ g_2(x) \in C^1\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Если выполнены условия 1) и 2) задачи TG, то любое регулярное решение уравнения (1) можно представить в виде [3]:

$$u\left(x,y\right)=\upsilon\left(x,y\right)+\omega\left(x\right)\ .$$

где

$$\upsilon\left(x,y\right)=\begin{cases}\upsilon_j\left(x,y\right),\ (x,y)\in\Omega_j^+,\\ w_j\left(x,y\right)\ \ (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases} \tag{4}$$

$$\omega\left(x\right)=\begin{cases}\omega_j^+(x), & (x,0)\in\bar{I}_j,\\ \omega_j^-(x), & (x,0)\in\bar{I}_j,\end{cases}$$

здесь $\upsilon_j\left(x,y\right)$ и $w_j\left(x,y\right),(j=1,2)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_j\equiv\upsilon_{j\,xx}-|x|^p\upsilon_{jy}=0,\ (x,y)\in\Omega_j^+,$$

$$Lw_j\equiv w_{j\,xx}-(-y)^m w_{j\,yy}=0,\ (x,y)\in\Omega_j^-\ \ (j=1,2)\,,$$

а $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$ $(j=1,2)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j^{+\prime\prime}\left(x\right)-\rho_j\omega_j^+\left(x\right)=\rho_j\upsilon_j\left(x,0\right),\quad (x,0)\in I_j,$$

и

$$\omega_j^{-\prime\prime}\left(x\right)+\mu_j\omega_j^-\left(x\right)=-\mu_j w_j\left(x,0\right),\quad (x,0)\in I_j,$$

соответственно.

Лемма. Если $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv0,\ \ \forall y\in[0,1]$, $g_1(x)\equiv0,\ \ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, и $g_2(x)\equiv0,\quad\forall x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, то

$$\tau_j(x)\equiv0,\quad\forall x\in\bar{I}_j\quad(j=1,2),$$

здесь $\tau_j(x)\equiv\upsilon_j(x,0)=w_j(x,0)$.

Теорема. Если выполнены условия леммы и (2)-(4), то в области Ω решение задачи TG для уравнения (1) существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального урав-нения второго порядка. // Дифференциальные уравнения. **12**:1. С.103–108 (1976).

2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //"Дифференциальные уравнения". 14(1). С.181–184(1978).

3. Исломов Б., Джураев Ф.М. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // Узбекский математичес-кий журнал. № 2. С.75–85 (2011).

4. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравне-ния второго порядка. // ДАН РУз. № 1–2. С. 3–6 (1996).

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА

Жураева У. Ю.

Самаркандский Государственный Университет, Самарканд, Узбекистан
umida_9202@mail.ru;

Настоящая работа посвящена задаче, которая может быть сформулирована следующим образом:

Постановка задачи. Дана бесконечная область D двухмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывная вплоть до границы со своими производными до третьего порядка. Требуется показать, что если функция и ее нормальная производная ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \longrightarrow \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной,и оценить эту предельную скорость роста.

Для гармонических функций это задача была предметом исследования М.А.Евграфова, И.А.Чегиса, И.С.Аршоном, А.Ф.Леоньтевым, Ш.Ярмухамедовым , З.Р.Ашуро-вой, Н.Жураевой и др. Ш.Ярмухамедов занимался исследованием классической интегральной формулы Грина для гармонических функций в неограниченной пространственных областях. Задача заключалась в получении формулы Грина для растущих гармонических функций. Здесь вместо классического фундаментального решения уравнения Лапласа надо было построить новое фундаментальное решение, которое достаточно хорошо убывает на бесконечности. Ш.Ярмухамедовым было построено требуемое фундаментальное решение в явном виде, которое выражается через целой функции комплексного переменного. Им получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В этом направлении им было установлено теорема типа Фрагмена - Линделефа для гармонических функций.

В данной работе строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций) определенных в области $D \subset R^2$, $D = \{y : y = (y_1, y_2), y_2 > 0\}$ и с ее помощи доказывается теоремы типа Фрагмена-Линделефа.

Функцию $\varphi_\sigma(y,x)$ при $\sigma \geq 0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi_\sigma(y,x) = \frac{1}{c_2 K(x_2)} \int_0^\infty \mathrm{Im} \frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_2)}{i\sqrt{u^2+s}+y_2-x_2} \frac{udu}{\sqrt{u^2+s}}, \quad (1)$$

где $K(\omega) = \frac{\exp(-\sigma(\omega+1)^{\rho_1})}{(\omega+x_2)^2}$. Здесь $s>0$, $c_2 = 2^{-1}\pi\omega_2$, ω_2 площадь единичного круга в R^2. Положим $\Phi_\sigma(y,x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y,x)$, (2) при этом $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\omega = i\sqrt{u^2+s} + y_2, s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2$, $r = |y-x|, r_1^2 = s + (y_2+x_2)^2$, $0 < \rho_1 < 1$, $\sigma > 0$, $y_2 > 0$, $c_0 \in R$. Здесь берется регулярная ветвь аналитической функции w^ρ в плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси. Имеет места следующие утверждения:

Лемма 1. *Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1), имеет вид*

$$\varphi_\sigma(y,x) = c_0 \int_0^\infty \frac{((y_2-x_2)((y_2+x_2)^2-(u^2+s)) - 2(y_2+x_2)(u^2+s))\sin\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{udu}{\sqrt{u^2+s}} +$$

$$+ c_0 \int_0^\infty \frac{(((y_2+x_2)^2-(u^2+s)) + 2(y_2-x_2)(y_2+x_2))\cos\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} udu$$

и при $\alpha > 0$ - является гармонической функцией, где $c_0 = \frac{8\pi x_2^2}{exp(\sigma(x_2+1)^{\rho_1}))}$, $A_1 = ((y_2+1)^2 + u^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}} \cos(\rho_1 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)})$, $\lambda = \sigma((y_2+1)^2 + u^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}} \sin(\rho_1 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)})$. *Для удобства записи в дальнейшим обозначим через c_0 все постоянные числа.*

Теорема 1. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (2), имеет вид*

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0(r^2 \ln \frac{1}{r} + r^2 G_\sigma(y,x)),$$

где функция $G_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в $R^2 \setminus \{x\}$ по переменному y.

Лемма 2. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (2) является бигармонической функцией.*

Лемма 3. *Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ определяемой равенством (2) справедливы оценки*

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \le (\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_1^2})\frac{c_0 r^2}{exp(\sigma A)},$$

$$|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}| \le (1 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r_1^2} + \frac{1}{r_1} + \frac{r}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{r}{r_1^2})\frac{c_0}{exp(\sigma A)},$$

где $A = c_0((y_2+1)^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}}$.

Лемма 4. *Пусть n-внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда, справедливы неравенства:*

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)| \le (\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^3})\frac{c_0}{exp(\sigma A)},$$

$$|\frac{\partial \Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}| \le (1 + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r} + \frac{1}{rr_1^2} + \frac{1}{rr_1^3} + \frac{1}{rr_1^4})\frac{c_0}{exp(\sigma A)}.$$

Теорема 2. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$,зависящая от параметра $\sigma > 0$, определенная формулой (2), при $y \ne x$ является функцией Карлемана для точки $x \in D$ и ∂D*

$$\int_{\partial D} (|\Phi_\sigma(y,x)| + |\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}| + |\Delta\Phi_\sigma(y,x)| + |\frac{\partial \Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}|)|ds| \le \frac{C(x)}{exp(\sigma A)},$$

где $C(x)$-многочлен зависящее только от x, n-внешняя нормаль к границе ∂D.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М.А., Чегис И.А Обобшение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве. // Доклады Академии наук СССР.1960.Т.134,С.252-262.

2.Ярмухамедов Ш.Я.Задача Коши для полигармонического уравнения.//Доклады РАН. 2003.Т.388, С. 162-165.

3.Ашурова З.Р, Жураева Н.Ю, Жураева У.Ю, О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, //International Journal of Innovative Research.2021.№10, Impact Factor 7.512.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Зуннунов Р. Т.

Институт Математики имени В.И Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
zunnunov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : y > 0, -\infty < x < +\infty\}$, а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$ ограниченная отрезком $\overline{AB} = \{(x,y) : y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и характеристиками

$$AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$. Здесь предполагается m, λ - заданные действительные числа, причем $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$, $m = const > 0$. Кроме того, $M_j(j = \overline{1,4})$ - положительные постоянные, а ε - достаточно малое положительное число, $\beta = m/(2m+4)$, $r_0 = \sqrt{x^2 + [2/(m+2)]^2 y^{m+2}}$

$$l_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}, l_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}$$

$$\theta_0(x) = \Big(\frac{x}{2}, -\Big[\frac{m+2}{2}, \frac{x}{2}\Big]^{\frac{2}{m+2}}\Big), \theta_1(x) = \Big(\frac{1+x}{2}, -\Big[\frac{m+2}{2}, \frac{1-x}{2}\Big]^{\frac{2}{m+2}}\Big).$$

Очевидно, что $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1) , выходящих из точки $(x,0) \in AB$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача TN^∞. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ *причем $u_y(x,y)$ непрерывна вплоть до $l_1 \cup l_2$ и в окрестности точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, функции $y^m u_x(x,y), u_y(x,y)$, могут иметь особенности порядка меньше чем $1-2\beta$;*

2) *удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;*

3) *при достаточно больших r_0 удовлетворяет условиям*

$$|u(x,y)| < \frac{M_1}{r_0^\varepsilon}, |y^m u_x(x,y)| < \frac{M_2}{r_0}, |u_y(x,y)| < \frac{M_3}{r_0}$$

$$u_y(x,0) = \varphi_i(x), \forall x \in l_i, i = 1,2$$

$$a(x) A_{0x}^{1,\lambda_2}\{D_{0x}^{\alpha}[\delta(x) u(\theta_0(x))]\} + b(x) A_{1x}^{1,\lambda_2}\{D_{x1}^{\gamma}[\omega(x) u(\theta_1(x))]\} +$$
$$+ c(x) u_y(x,0) + g(x) u(x,0) = d(x), \forall x \in AB$$

где $\varphi_i(x), a(x), b(x), c(x), g(x), d(x)$ - заданные функции, причем $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + g^2(x) \neq 0$, $a(x), b(x), c(x), g(x), d(x) \in C^1(\overline{AB})$, $\varphi_i(x) \in C(l_i)$ и при $x \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow 1$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1 - 2\beta$, а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_j(x)| \leq M_4 |x|^{-1-\delta}, \delta > 0,$$

а $D_{sx}^{a}[f(x)]$ - оператор дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования и $A_{sx}^{1;\lambda}[f(x)]$ - оператор из [1].

В данной работе доказана однозначная разрешимость поставленной задачи при выполнении условий

$$\alpha = \gamma = 1 - \beta, \delta(x) = \omega(x) = 1$$

и

$$\alpha = \gamma = \beta, \delta(x) = x^{2\beta-1}, \omega(x) = (1-x)^{2\beta-1}$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии а существование методом функций Грина и интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – Т.: ФАН, 1997. – 166 с.

ЗАДАЧА ТИПА ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОРОУПРУГОСТИ

Имомназаров Х. Х.[1], Янгибоев З. Ш.,[2] Хужаев Л. Х.[3]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
imom@omzg.sscc.ru
[2]Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
zoyiry@mail.ru
[3]Ташкентский университет информационных технологий Каршинский филиал, Карши, Узбекистон
lochin-x@mail.ru

Исследование распространения акустических волн в насыщенной флюидом пористой среде, представляет большой интерес, как с практической точки зрения, так и с научной. Задачи, связанные с акустическим зондированием пористых сред с целью определения характеристик насыщающих флюидов или протяженности нефтеносных и газоносных пластов, а также использование пористых материалов для шумоизоляции и теплоизоляции являются актуальными, также как теоретические и экспериментальные исследования, связанные с прохождением и поглощением звука в пористых средах, насыщенных жидкостью или газом.

Показано, что повышение температуры парогазовой смеси в пористой среде приводит к уменьшению коэффициента затухания кбыстройњ волны из-за уменьшения плотности парогазовой смеси и, как следствие, уменьшения влияния межфазных сил.

В данной работе при описании исследуемого процесса будем считать, что изменение температурного поля среды не будет влиять на акустические характеристики системы, которые определяются сжимаемостью и вязкостью жидкости. Будем учитывать эффекты, обусловленные модулем сдвига и коэффициентом межфазного трения.

Пусть $\tilde{D}$ - область на плоскости Oxt, образованная прямыми: $x + t = x_0 + t_0$ и $x - t = x_0 - t_0$, проходящими через точку (x_0, t_0) для $x \geq x_0$. Далее рассмотрим случай, когда $(x_0, t_0) = \mathbf{0}$. Найти функции $u\,(x,t)$ и $v\,(x,t)$, связанные в квадрате $D = \{x, t : 0 \leq x - t \leq 2L, 0 \leq x + t \leq 2L\}$ системой уравнений [1-6]:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma b(u_t - v_t) = f\,(x,t) \\ v_{tt} - b(u_t - v_t) = f\,(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

при выполнении для функций $u\,(x,t)$ и $v\,(x,t)$ условий

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{t=x} = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \le x \le L, \\ u|_{t=-x} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L, \\ \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\psi}(0), \\ v\,(x,0)\, = 0, v_t\,(x,0)\, = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

В системе (1) $u\,(x,t)$ и $v\,(x,t)$- компоненты скорости смещений упругого пористого тела и насыщающей жидкости, соответствующие постоянным парциальным плотностям ρ_s и ρ_l. Для простоты считаем, что модуль сдвига постоянный и скорость распространения поперечной волны равна единице, b- коэффициент Дарси, $L > 0$- заданная постоянная, $\gamma = \rho_l/\rho_s$.

Определение. Функции $u\,(x,t)$ и $v\,(x,t)$ называются решением задачи (1), (2) если u, v, u_t, v_t, u_{tt}, v_{tt}, $u_{xx} \in C(D)$ и $u\,(x,t)$, $v\,(x,t)$ удовлетворяют (1), (2).

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ является непрерывной на D и функции $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями на $[0,L]$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб.ЖИМ. 2004. т.VII. є 1(17). с.3-8.
2. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Вестник НУУз, серия механика математика. 2006. є 2. с.86-91.
3. Imomnazarov Kh.Kh. and Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Mathematical and Computer Modelling. 2007. V.45. є 3-4. pp.270-280.
4. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Рахмонов Т.Т., Янгибоев З.Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавказский математический журнал, 2013, т.15, є2. с. 46-58.
5. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.
6. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. 2001. т.IV, є2(8). С.154-165.
7. Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 2. Wiley, New- York, 1953.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исломов Б. И.[1], Жураева Ф. Б.[2]

[1]Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
islomovbozor@yandex.com
[2]Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
faridajurayeva25@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1^2 u, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda_2^2 u, & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где D_1- область, ограниченная отрезками $AB,\ \ BB_0,\ \ B_0A_0,\ \ A_0A$, прямых $y=0,\quad x=1,\quad y=h,\quad x=0$ соответственно; D_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB и оси Ox и двумя характеристиками $AC: x+y=0,\ BC: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $C\,(0,5\,;\,-0,5)\,,\quad \lambda_j \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения: $J \equiv AB = \{(x,y):\ \ 0<x<1,\ \ y=0\}\,,$

$$D_1 = D \cap \{x>0, y>0\}\,,\ D_2 = D \cap \{x>0, y<0\}\,,\ D = D_1 \cup D_2 \cup J,$$

$$J_1 = \{(x,y):\ \ 0<x<c,\quad y=0\}\,,\ J_2 = \{(x,y):\ \ c<x<1,\quad y=0\}\,,$$

$$E(c,0) \in J,\quad c \in J.$$

Через C_1 и C_2 обозначим, соответственно, точки пересечения характеристики AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,\,0) \in J$,

$$\theta_0\,(x) = (x/2;\ -x/2)\,,\quad \theta_1\,(x) = (x/2;\ -x/2)\,,\quad \theta^*\,(x) = ((x+c)/2;\ (c-x)/2)\,, \tag{2}$$

$\theta_0(x)-$ точка пересечения характеристики AC с характеристикой, выходящей из точки $M_1(x,0)$, $(x,0) \in J_1$, а $\theta_1(x)$ и $\theta^*(x)-$ точки пересечения характеристики AC и EC_2 с характеристикой, выходящей из точки $M_2(x,0)$, $(x,0) \in J_2$ соответственно.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи с условиями Бицадзе-Самар-ского [1] на характеристиках AC_1, AC и EC_2.

Задача BC. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$;

2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}\,(D_1\ \cup\ A_0B_0) \cap C^{2,2}_{x,y}\,(D_2 \backslash \{EC_1 \cup EC_2\})$, удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и $D_2 \backslash \{EC_1 \cup EC_2\}\,;$

3) $u_y \in C\,(D_1 \cup J_1 \cup J_2) \cap C\,(D_2 \cup J_1 \cup J_2)$ и на интервалах J_j $(j=1,2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0} u_y\,(x,y) = \lim_{y\to +0} u_y\,(x,y)\,,\quad (x,0) \in J_1 \cup J_2, \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y),\quad u|_{x=1} = \varphi_2(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{4}$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u\,[\theta_0(x)] + b(x)u(x,0) = c(x),\quad (x,0) \in J_1,\ , \tag{5}$$

$$u\,[\theta\,(x)] = \mu u\,[\theta^*(x)] + d(x),\quad (x,0) \in \bar{J}_2, \tag{6}$$

где $\varphi_1\,(y)\,,\ \ \varphi_2\,(y)\,,\ \ a(x),\quad b(x),\quad c(x),\quad d(x)-$ заданные функции, причем

$$\mu \in (-\infty;\ +\infty) \backslash \{1\}\,, \tag{7}$$

$$\varphi_1(y),\ \ \varphi_2(y) \in C\,[0,h] \cap C^1\,(0,h)\,, \tag{8}$$

$$a(x),\quad b(x),\quad c(x) \in C(\bar{J}_1) \cap C^2(J_1),\quad d(x) \in C^1(\bar{J}_2) \cap C^3(J_2). \tag{9}$$

Насколько нам известно, что аналоги задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda_j = 0$ $(j = 1, 2)$ и $a(x) = 1$, $b(x) = 0$ изучены в работах [2]–[4].Задача BC для уравнения (1) ранее не были исследованы.

Теорема. Если выполнены условия (7) - (9), то в области D существует единствен-ное регулярное решение задачи BC.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Бицадзе А.В.* К теории нелокальных краевых задач. // "ДОК. АН СССР". 1984. Т.227. № 1. С.17.

2.*Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов. М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.// Т.: "Фан". 1986. 220 с.

3.*Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо- параболического типа.// "ЖВМ и МФ". 1966. Т. 6. № 6. С. 991-1001.

4.*Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.// "Доклады АН СССР". 1968. Т. 183. № 2. С. 261-264.

О ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

Исмоилов А.И.

Ферганский государственний университет, Фергана, Узбекистан
ismoilovaxrorjon@yandex.com

Рассмотрим неоднородного обобщенного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу

$$L\left(u\right) = u_{\xi\eta} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} + \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_{\xi} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} - \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_{\eta} + \gamma u = f\left(\xi,\eta\right) \tag{1}$$

в области Δ плоскости $\xi O\eta$, ограниченной отрезками$\overline{OA} = \{(\xi,\eta) : \eta = \xi, \quad 0 \le \xi \le 1\}$, $\overline{CA} = \{(\xi,1) : 0 \le \xi \le 1,\}$, $\overline{OC} = \{(0,\eta) : 0 \le \eta \le 1\}$, где α, β, γ - заданные действительные числа, а $f\left(\xi,\eta\right)$ - заданная функция.

Задача Дарбу. Найти решение $u\left(\xi,\eta\right) \in C\left(\bar{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\left(\xi,\xi\right) = \tau\left(\xi\right), \qquad 0 < \xi < 1, \tag{2}$$

$$u\left(0,\eta\right) = \psi\left(\eta\right), \qquad 0 < \eta < 1, \tag{3}$$

где $\tau\left(\xi\right)$, $\psi\left(\xi\right)$ - заданные непрерывные функции, причем $0 < \alpha\beta < 1/2$, $\psi_1\left(0\right) = \tau\left(0\right)$.

Функция Римана-Адамара уравнения $L\left(u\right) = 0$ для условий (2) и (3) построена в работе [1]:

$$V\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma\right) = \begin{cases} R_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma), & \eta_0 > \xi, \\ R_4(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma), & \eta_0 < \xi, \end{cases} \tag{4}$$

$$R_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma) = \sigma_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_3^k}{(k!)^2} F_3\left(\beta,\alpha,1-\beta,1-\alpha;1+k;\sigma_2,\sigma_1\right), \tag{5}$$

$$R_4(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma) = \chi\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha} \frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{\left[(\xi_0-\xi)\left(\eta_0-\eta\right)\right]^{\beta}} \sigma_2^{2\beta-1} \times$$

$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{k!(\beta)_k}H_2\left(1-\beta-k,1-\beta,\alpha,1-\alpha;2-2\beta;\frac{1}{\sigma_2},-\sigma_1\right). \tag{6}$$

где $\chi=\Gamma(1-\beta)/\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)$, $\sigma_0=[(\eta+\xi)/(\eta_0+\xi_0)]^\alpha[(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)]^\beta$, $\sigma_1=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)/(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)$, $\sigma_2=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)/(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)$, $\sigma_3=-\gamma(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)$, $\Gamma(z)$- гамма - функция Эйлера, а H_2 и F_3- соответственно гипергеометрические функции Горна и Аппеля двух переменных.

Функция $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ обладает следующими свойствами:

1^0) она по ξ_0,η_0 удовлетворяет уравнению (1) при $f(\xi,\eta)=0$, а по переменным ξ,η - сопряженному уравнению:

$$L*(u)=u_{\xi\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u\right]-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u\right]+\gamma u=0;$$

2^0) $V_\xi-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V=0$ при $\eta=\eta_0$, 3^0) $V_\eta-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V=0$ при $\xi=\xi_0$;

4^0) $V(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0;\gamma)=1$; 5^0) $\lim\limits_{\eta-\xi\to0}V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=0$.

6^0) $\lim\limits_{\eta-\xi\to0}\left\{\left[V_\xi-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V\right]\Big|_{\eta=\xi_0+\varepsilon}-\left[V_\xi-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V\right]\Big|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\right\}=0\varepsilon>0$

Пусть $u(\xi,\eta)$ - решение задачи Дарбу, а $P(\xi_0,\eta_0)$ - произвольная точка области $\Delta\cup CA$. Найдем $u(\xi_0,\eta_0)$. В треугольнике $O'A'D'$, ограниченном отрезками $O'A'$, $A'D'$, $O'D'$ прямых соответственно $\eta=\xi+\varepsilon$, $\eta=\xi_0-\varepsilon$, $\xi=0$, и в прямоугольнике $D''A''C''C'$, ограниченном отрезками $D''A''$, $C'C''$, $D''C'$, $A''C''$ прямых соответственно $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\eta=\eta_0$, $\xi=0$, $\xi=\xi_0-2\varepsilon$, справедливо тождество

$$VL(u)-uL^*(V)=M_\xi+N_\eta-Vf(\xi,\eta)\equiv0, \tag{7}$$

где $M=Vu_\eta-uV_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV$, $N=Vu_\xi+uV_\xi-\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV$.

Интегрируем тождество (7) по треугольнику $O'A'D'$ и четырехугольнику $D''A''C''C'$. Затем, переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ и учитывая свойства 1^0-6^0 функции $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ и краевые условия (2), (3), получаем

$$u(\xi_0,\eta_0)=\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi'(\eta)+\frac{\alpha+\beta}{\eta}\psi(\eta)\right]V(0,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)\,d\eta+$$

$$+(1+2\beta)\,\chi(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}\int\limits_0^{\xi_0}\left(\frac{2\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^\alpha\frac{\tau(\xi)}{[(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)]^{1-\beta}}\times$$

$$\times\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;\sigma_1,\sigma_3)|_{\xi=\eta}d\xi+\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_\xi^{\eta_0}f(\xi,\eta)\,V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0,\gamma)\,d\eta. \tag{8}$$

Из процесса получения формулы (8) ясно, что, если существует решение задачи (1),(2),(3), то это решение имеет вид (8). Из (8) при $0<\alpha,\beta<1/2$, $f(\xi,\eta)=0$ следует формула, полученная А.К.Уриновым и А.И.Исмоиловым в работе [1].

Исследуем формулу (8). Первое и второе слагаемые изучены в работе [1]. Здесть рассмотрим третье слагаемое.

Введем следующее обозначение:

$$F(\xi_0, \eta_0) = \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_{\xi}^{\eta_0} f(\xi, \eta) V(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta; \gamma) d\eta. \tag{9}$$

Теорема. Если функция $f(\xi, \eta)$ представима в виде $f(\xi, \eta) = (\eta - \xi)^{\varepsilon - 1} f_1(\xi, \eta)$, $\varepsilon > 0$, $f_1(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta})$, то функция $F(\xi_0, \eta_0)$ в области Δ удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям

$$\lim_{\eta_0 \to \xi_0} F(\xi_0, \eta_0) = 0, \quad 0 \le \xi_0 \le 1; \quad F(\xi_0, \eta_0)|_{\xi_0 = 0} = 0, \quad 0 \le \eta_0 \le 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уринов А.К., Исмоилов А.И. Принципы экстремума для обобщенного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу и его частных случаев. Узбекский матем. журнал. 2013. є3. -С.105-115.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. -М.: Наука, 1965. -296 с.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. -Минск:. Выщэйшая школа. 1977. 160 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.I. -Москва: Физматлит. 1960. -440 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА

Кадиркулов Б. Ж.[1], Жалилов М. А.[2]

[1]Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
kadirkulovbj@gmail.com

[2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
alimuhammad9978@mail.ru

Пусть $\Omega = \{(x, t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b, d - положительные действительные числа. В области Ω рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача A. Требуется найти функций $u(x,t)$ из класса

$$D^{\alpha,\gamma} u, t^{1-\gamma} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_1),\ u_t, \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_2),\ u_{tt} \in C(\Omega_2), u_{xxxx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), k = \overline{0,2},$$

удовлетворяющее в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ уравнению

$$0 = \begin{cases} D^{\alpha,\gamma} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t < 0, \end{cases}$$

условиям

$$u(-1,t)=0, u(1,t)=0, u_{xx}(-1,t)=0, u_{xx}(1,t)=0, t\in[-a,0)\cup(0,b],$$

$$u_t(x,-a)=D^{\alpha,\gamma}u(x,b)+\varphi(x),\ -1\le x\le 1,$$

а также условиям склеивания

$$\lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\gamma}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u(x,t),\ \lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\alpha}\frac{d}{dt}J_{0+}^{1-\gamma}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t).$$

Здесь $\varphi(x)$ заданная достаточно гладкая функция, $\varepsilon\in(-1,1)$, $D^{\alpha,\gamma}=J_{0+}^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}J_{0+}^{1-\gamma}$, $0<\alpha\le\gamma\le 1$ - оператор Хилфера [1]. Отметим, что при $\gamma=\alpha$ и $\gamma=1$ имеем $D^{\alpha,0}={}_{RL}D_{0+}^{\alpha}$ и $D^{\alpha,1}={}_{C}D_{0+}^{\alpha}$. Таким образом оператор $D^{\alpha,\gamma}$ является непрерывной интерполяцией по параметру γ известных операторов дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто дробного порядка, которые как известно описывают процессы, связанные с процессами диффузии [2].

Основным результатом настоящей работы являются:

Теорема 1. Пусть имеет место неравенство

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=\frac{sin\sqrt{\lambda_{ik}}a}{\sqrt{\lambda_{ik}}}-\cos\sqrt{\lambda_{ik}}a+b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^{\alpha})\neq 0,\ i=1,2.\, k=1,2,... \tag{1}$$

где $\lambda_{1k}=(1+\varepsilon)k^4\pi^4+d^2$, $\lambda_{2k}=(1-\varepsilon)(k-0,5)^4\pi^4+d^2, k=1,2,....$ Тогда, если решение задачи A существует, то оно единственно.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)\in C^3[-1,1], \varphi^{(l)}(-1)=0, \varphi^{(l)}(1)=0, l=0,2.$ Тогда:

1) задача A в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (1) и $|\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)|\ge C_i>0,\ i=1,2.$

2) если для некоторых $a,b,\varepsilon,\ i=i_0$ и $k=k_1,...,k_s$ выполняется условие $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$, то задача A разрешимо только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\varphi_{i_0k}=\int_{-1}^{1}\varphi(x)X_{i_0k}dx=0, k=k_1,...k_s,$$

Здесь $X_{1k}(x)=\sin k\pi x, X_{2k}(x)=\cos(k-0,5)\pi x, k=1,2,...$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilfer, R. Application of Fractional Calculus in Physics; //World Scientific Publishing Company: Singapore. 2000.

2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam. - 2006. 523 p.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВУМЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Калмуратова Г. Т.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

xalmurtovagulmira@gmail.com

В данной работе изучена задача с начальными и с двумя нелокальными гранич-ными условиями в двухмерном случае для уравнения теплопроводности. Решение этой нелокальной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующими спектральными задачами. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собст-венных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-гра-ничной задачи.

Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка.

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей.

Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузия в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате и операторами Лапласа с нелокаль-ными краевыми условиями.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$D_{at}^{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q = (0,1)\times(0,1)\times(0,T), \tag{1}$$

с начальными

$$u(x,y,t) = u_0(x,y) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,y,t) - u(1,y,t) = \tau_1(t), \\ u(x,0,t) - u(x,1,t) = \tau_2(t) \\ \int_0^1 u(x,y,t)dx = \mu_1(t), \\ \int_0^1 u(x,y,t)dy = \mu_2(t), \end{cases}$$

здесь $F(x,y,t)$, $u_0(x,y)$, $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, непрерывно дифференцируемых функции.

Здесь $D_{at}^{\alpha}u(x,t) = \frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}$ дробная производная Римана–Лиувилля.

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $F(x,y,t)$, $u_0(x,y), \tau_1(t), \tau_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, *непрерывно дифференцируемых функций. Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса* $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2;\,\theta}(Q)$ *с показателем* $s_1 = 3$, $s_2 = 3$, $\theta = -[-\alpha]$ *существует, единственно и при каждом* $t > 0$ *представляется в виде сходящийся ряда Фурье по собственным функциям соответствующих спектральных задач.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. No 2. С. 294-304.

2. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. // Ученые записки МГУ, серия математика. 4, No 148. 1951. С. 69-107.

3. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов. // Доклады Академии Наук. 1976. Т. 227. є 4. С. 796-799.

4. Касимов Ш.Г., Рахманов Ф.Д. Об одной спектральной задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. // Ташкент, Вестник НУУз, 2013г. No 2. С. 83-86.

НЕЛОКАЛЬНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННЫХ С БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Касимов Ш. Г.[1], Айтбаева А. Т.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
[1]shokiraka@mail.ru;
[2]aysanem.aytbaeva98@gmail.com

В данной работе изучена задача с начальными и нелокальными граничными условиями для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, связанных с бигармоническими операторами. Решение нелокаль-ной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующими спектральными задачами. У спектральной задачи най-дены собственные значения и построена соответствующая система собственных функ-ций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной за-дачи. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей.

Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузия в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате и операторами Лапласа с нелокаль-ными краевыми условиями.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+a^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{2m}u(x,y,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}u(x,y,t)}{\partial y_i^{2s_i}}=F(x,y,t), \qquad (1)$$

$$(x,y,t)\in Q=\Pi\times\Pi\times(0,T),\Pi=(0,\pi)\times...\times(0,\pi),\ l-1<\alpha\le l,\ l=-[-\alpha]$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,t)=\varphi_i(x,t),\ \ (x,y)\in\Pi\times\Pi,\ \ i=1,2,...l, \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha_j \frac{\partial^{4k} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^{4k} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\Big|_{x_j=0} = 0, \ k = \overline{0, m-1}, \ j = \overline{1,n}, \\ \beta_j \frac{\partial^{4k+1} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^{4k+1} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \alpha_j \frac{\partial^{4k+2} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+2}}\Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^{4k+2} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+2}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \beta_j \frac{\partial^{4k+3} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+3}}\Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^{4k+3} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+3}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \frac{\partial^{2k} u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\Big|_{x_j=0} = 0, \ , \frac{\partial^{2k} u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\Big|_{x_j=\pi} = 0, \qquad k = \overline{0, s-1}, j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{3}$$

здесь $m, s_i, l \in N$, $T > 0$ – заданные положительные числа и $F(x,y,t)$, $\varphi_i(x,y)$, $i = 1, 2, ..., l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_q(x,y), \ q \in N^{2n}\}$ спектральной задачи:

$$a^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^{2m} v(x,y) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 (-1)^{s_i} \frac{\partial^{2s_i} v(x,y)}{\partial y_i^{2s_i}} - \lambda v(x,y) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha_j \frac{\partial^{4k} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^{4k} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \beta_j \frac{\partial^{4k+1} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^{4k+1} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \alpha_j \frac{\partial^{4k+2} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+2}}\Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^{4k+2} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+2}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \beta_j \frac{\partial^{4k+3} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+3}}\Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^{4k+3} u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+3}}\Big|_{x_j=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1,n}, \\ \frac{\partial^{2k} u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\Big|_{x_j=0} = 0, \ \frac{\partial^{2k} u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\Big|_{x_j=\pi} = 0, k = \overline{0, s-1}, j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $D_{at}^{\alpha} u(x,t) = \frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau) \cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}$ дробная производная Римана–Лиувилля. Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1 \leq j \leq n$ *и* $\rho = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sqrt{{\theta_j}^2 + 2 (\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1$, *где* $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, *при* $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max\limits_{x \in [0,\pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$,

$\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{{\alpha_j}^2 + {\beta_j}^2}$, $m_j \in \mathbb{Z}$.*Тогда система собственных функций* $\{v_q(x,y), \ q \in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева* $\overset{0}{W}{}_2^{4m,2s}(\Pi \times \Pi)$.

Теорема 2. *Пусть начальные функций* $\varphi_i(x,y)$, $i = 1, 2, ..., l$, *и правую часть* $F(x,y,t)$ *достаточно гладкие функции при каждом* $t > 0$ *и пусть* $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1 \leq j \leq n$ *и*

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{{\theta_j}^2 + 2 (\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, *при* $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max\limits_{x \in [0,\pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$,

$\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{{\alpha_j}^2 + {\beta_j}^2}$, $m_j \in \mathbb{Z}$. *Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса* $\overset{0}{W}{}_2^{s_1, s_2; \theta}(Q)$ *с показателем* $s_1 = 4m + \frac{n}{2}$, $s_2 = 2s + \frac{n}{2}, \theta = -[-\alpha]$ *существует, единственно и при каждом* $t > 0$ *представляется в виде сходящийся ряда Фурье по собственным функциям* $\{v_q(x,y), \ q \in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5).*

ЛИТЕРАТУРА

1. O.A. Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes.// Mathematics 2019, Basel, Switzerland. 7, 235. 1-20 pp.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Касимов Ш. Г.[1], Жайсанова Н. К.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

[1]shokiraka@mail.ru;

[2]nargizajaysanova1991@gmail.com2

В данной работе изучена задача с начальными и граничными условиями для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных высокого по-рядка от нескольких переменных. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответ-ствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На осно-вании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности ре-шения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{\partial^{4m_i}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4m_i}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}u(x,y,t)}{\partial x_j^{2s_i}}=F(x,y,t), \tag{1}$$

$$(x,y,t)\in Q=\Pi\times\Pi\times(0,T),\ \Pi=(0,p)\times...\times(0,p),\ l-1<\alpha\le l,\ l=-[-\alpha]$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,t)=\varphi_i(x,t),\ \ (x,y)\in\Pi\times\Pi,\ \ i=1,2,...l, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, & \\ \left.\frac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k}}\right|_{x_j=p}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\right|_{x_j=p}=0, & k=\overline{0,m-1}, \\ \left.\frac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial {y_j}^{2k}}\right|_{x_j=p}=0, & k=\overline{0,s-1}, \end{cases} \tag{3}$$

здесь $m,s,l\in N,\ \ p,T>0$ – заданные положительные числа и $F(x,y,t),\ \varphi_i(x,y),$ $i=1,2,...,l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_q(x,y),\ q\in N^{2n}\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{\partial^{4m_i}v(x,y)}{\partial x_j^{4m_i}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}v(x,y)}{\partial x_j^{2s_i}}-\lambda v(x,y)=0), \tag{4}$$

$$
\begin{cases}
\left.\frac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial {x_j}^{4k}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}v(x,y)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, & \\
\left.\frac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial {x_j}^{4k}}\right|_{x_j=p}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}v(x,y)}{\partial {x_j}^{4k+1}}\right|_{x_j=p}=0, & k=\overline{0,m-1}, \\
\left.\frac{\partial^{2k}v(x,y)}{\partial {y_j}^{2k}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{2k}v(x,y)}{\partial {y_j}^{2k}}\right|_{x_j=p}=0, & k=\overline{0,s-1},
\end{cases} \tag{5}
$$

Здесь

$$
D_{at}^{\alpha}u(x,t)=sign^{l}(t-a)\frac{d^{l}}{dt^{l}}D_{at}^{\alpha-l}u(x,t)=\frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^{l}}{dt^{l}}\int\limits_{a}^{t}\frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.
$$

дробная производная Римана–Лиувилля. Справедливо следующая

Теорема 1. *Система собственных функций $\{v_q(x,y),\ q\in N^{2n}\}$ спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева $\overset{0}{W}{}_{2}^{4m,2s}(\Pi\times\Pi)$.*

Теорема 2. *Пусть начальные функций $\varphi_i(x,y)$, $i=1,2,...,l$, и правую часть $F(x,y,t)$ достаточно гладкие функции при каждом $t>0$. Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса $\overset{0}{W}{}_{2}^{s_1,s_2;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=4m+1$, $s_2=2s+1$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и при каждом $t>0$ представляется в виде сходящийся ряда Фурье по собственным функциям $\{v_q(x,y),\ q\in N^{2n}\}$ спектральной задачи (4)-(5).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. №2, 311 - 324.
2. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №1, С.89–100.
3. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №5, С.665-671.
4. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае.//Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №10, С. 1379-1391.
5. Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае // Вест-ник РГГУ. Серия "Информатика. Информационная безопасность. Математика". 2020. №1. С. 75-101.
6. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва: Наука, 1966. 672 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АКТИВНЫХ УЧАСТКОВ В ПОЛЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Коршунова Н. А., Райимов А.[1]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
bea40371@rambler.ru

Рассматривается вариационная задача о движении точки переменной массы (центр масс космического аппарата) в поле двух неподвижных центров в постановке Лоудена. Эта задача сведена к проблеме интегрирования замкнутой гамильтоновой системы четырнадцатого порядка по участкам нулевой, промежуточной и максимальной тяг. К настоящему времени для участков промежуточной тяги известно пять общих интегралов, которых недостаточно для определения общего решения дифференциальных уравнений вариационной задачи. Поэтому представляет интерес определение частных интегралов и частных решений. Одним из методов нахождения частных решений гамильтоновых систем является метод Леви-Чивита, использующий знание только некоторого числа интегралов или инвариантных соотношений, находящихся в инволюции. Этот метод добавляет к имеющимся интегралам инвариантные соотношения, недостающие до сведения задачи к квадратурам.

Поскольку три из известных интегралов находятся в инволюции, то метод Леви - Чивита позволил получить новый класс частных решений для активных участков. Эти решения расширяют класс ранее полученных, так как снимают ограничения на область существования траекторий. Решениям соответствуют равномерные движения точки по круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны линии центров. Вектор тяги лежит в плоскости, нормальной к траектории. Величины, описывающие полученные активные участки, зависят от начального положения точки, от отношения гравитационных параметров центров притяжения и расстояния между ними, от расстояния до линии центров и от положения плоскости траектории.

Для конкретных соотношений гравитационных параметров центров притяжения построены графики зависимостей величин, характеризующих направление и величину силы тяги от положения траектории в области между центрами тяготения. Из графиков определены точки, где происходит реверс тяги по радиальной составляющей базис-вектора. Показано, что при увеличении отношения гравитационных параметров, точки реверса тяги приближаются к линии центров. А при приближении плоскости траектории к одному из центров, точки реверса тяги для различных отношений гравитационных параметров сгущаются. Рассмотрен случай, когда плоскость траектории находится на равном расстоянии от центров притяжения, что значительно облегчает анализ движения.

Рассмотрен вопрос об осуществимости найденных программных движений при автоматическом управлении. Показано, что для найденных круговых траекторий существуют области неустойчивости, которые увеличиваются при удалении точки от центра с меньшим гравитационным параметром. Показано, что система полностью управляемая по первому приближению, и невозмущенное движение можно стабилизировать линейным регулятором. Получен линейный регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость по Ляпунову найденных программных движений. Поскольку потенциал поля двух неподвижных центров может быть использован при построении потенциала земного тяготения, то полученные результаты могут быть применены для решения конкретных задач перелета в качестве опорных при численном интегрировании.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.

Курбанов О. Т.

Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
e-mail1: odil0769@gmail.com.

В данной работе с помощью результатов [1-4] исследована однозначная разрешимость одной краевой задачи.

Требуется определить в области $D = \{(x, y) : h_1(y) < x < h_2(y), 0 < y \leq 1\}$ функцию $u(x{,}y)$, обладающую свойствами:

$$1) u\,(x\,y) \in C^{3,1}(D) \bigcap C^{2,0}(x = h_2(y), 0 < y \leq 1) \bigcap C^{1,0}(\overline{D});$$

2) являющейся регулярным решением уравнение

$$L(x,y) \equiv u_{xxx} - u_y = f(x,y,u(x,y)), \tag{1}$$

в области D;

3) удовлетворяющую условиями

$$u(x,o) = u_0(x), \quad h_1(0) \le x \le h_2(0), \tag{2}$$

$$u(\,h_1(y),y) = \varphi(y) \quad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u_x(\,h_1(y),y) = \psi(y) \quad 0 \le y \le 1, \tag{4}$$

$$u_{xx}(h_2(y),y) \;+\; \alpha u_x(h_2(y),y) \;=\; g(u(h_2(y),y),y) \;\; 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

а также естественные условия согласования в угловых точках:

$$u_0{}''(h_2(0)) + u_0{}'(h_2(0)) \;=\; g(u_0(h_2(0)),0)\ ,$$

$$u_0(\,h_1(0)) = \varphi(0)\ \ , u_0'(h_2(0)) = \psi(0)\ \ .$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть $h_r(y) \in C^1\,[0;1]\ , r = 1,2$ и $g(u,y),\ \ f(x,y,u(x,y))$ непрерывные функции своих аргументов $0 \le y \le 1$ при любом $|u| < \infty$, удовлетворяющие условии

$$|g(u_1,y) - g(u_2,y)| \le l(y)\,|u_1 - u_2|\,, \tag{6}$$

$$|f(x,y,u_1) - f(x,y,u_2)| \le L(x,y)\,|u_1 - u_2| \tag{7}$$

$$0 < l(y) \le -h_2{}'(y) - \alpha^2, \tag{8}$$

$$0 < L(x,y) \le \beta - \alpha^3, \tag{9}$$

где $\alpha > 0,\ \ \beta > \alpha^3,\ \ \ h_2{}'(y) < -\alpha^2$.

Тогда решение задачи единственно.

Единственность решение задачи доказано методом интегралов энергии, применением некоторые элементарные неравенства.

Теорема 2. Пусть наряду с условиями теоремы 1 выполняются и следующие условия

$$u_0(x) \in C^3\,[h_1(0);h_2(0)\,]\ \ \ , \varphi(y) \in C^2\,[0;1]\ \ ,\ \varphi\,(0) = 0,\quad \psi\,(y) \in C^1\,[0;1]\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y,u)) \in C(\overline{D})\ ,\ f\,(x,0,u\,(x,0)) = 0$$

и $y \in [0;1]$ при любом $|u| < \infty$ имеет место неравенства

$$|g(u,y)| < M_1\,,\ \ |g_u(u,y)| < M_2\ ,\ |g_y(u,y)| < M_3$$

а также для $(x,y) \in D$ и $|u| < \infty$

$$|f(x,y,u)| < M_4\ , |f_x(x,y,u)| < M_5\ ,\ \ |f_y(x,y,u)| < M_6\ ,$$

$$|f_u(x,y,u)| < M_7\ .$$

Тогда решение задачи существует.

Исследуемая задача эквивалентно сведено к систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна относительно $u\,(x\,,y)\,,\ \ \tau\,(\eta) \;=\; u\,(h_2\,(\eta)\,,\ \eta)$ и $\nu\,(\eta) \;=\; u_x\,(h_2\,(\eta)\,,\ \eta)$.Однозначную разрешимость этой системы доказано с помощью принципа сжимающих отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cattabriga. L. Un problem al contorno per una equazione parabolica di ordin dispari.// Amali della Souola Normale Superiore di Pisa a Matematicha. Seria III. Vol XIII. Fasc. II. 1959, P.163 – 203.

2.Джураев.Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.// Ташкент. Фан. 1979 г.

3. Хашимов. А.Р. Нелинейные краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Уз МЖ .1993. є 2. с.97 - 102.

4. Курбанов О.Т., Холбоев Б.М. Об одной нелинейной краевой задаче для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками. //Уз МЖ. 2003.є 3-4.с. 35 - 40.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кучкарова С. А.[1], Ибрагимов Г. И.[2]

[1]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
kuchkarova11@yandex.ru;
[2]Университет Путра Малайзии, Малайзия
ibragimov@upm.edu.my

В этой статье рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений. Вопросы существования и единственности обсуждаются в Гильбертовом пространстве l_2. Мы доказали теорему, которая позволяет исследовать оптимальное управление и различные игровые задачи, описываемые такой системой.

Мы изучаем дифференциальную игру для следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\alpha_i x_i - \beta_i y_i + w_{i1}, & x_i(0) = x_{i0}, \\ \dot{y}_i = \beta_i x_i - \alpha_i y_i + w_{i2}, & y_i(0) = y_{i0}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

в Гильбертовом пространстве l_2, где α_i, β_i - действительные числа,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots) \in l_2, \quad y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots) \in l_2.$$

Предполагается, что α_i - ограниченные отрицательные числа: $a \le \alpha_i \le 0$, $i = 1, 2, \dots$, где a - заданное число.

Класс функций $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots)$, $w : [0, T] \to l_2$, с измеримыми координатами $w_i(t) = (w_{i1}(t), w_{i2}(t))$, $0 \le t \le T$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \left(w_{i1}^2(s) + w_{i2}^2(s) \right) ds \le \rho_0^2$$

обозначим через $S(\rho_0)$, где ρ_0 - заданное положительное число.

Пусть $C(0, T; l_2)$ - пространство непрерывных функций $z(t) \in l_2$, $0 \le t \le T$.

Пусть $w(\cdot) \in S(\rho_0)$. Функция $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots)$, $0 \le t \le T$, с непрерывными координатами $z_i(t)$, удовлетворяющими начальным условиям $z_i(0) = z_{i0}$, $i = 1, 2, \dots$, называется решением системы (1), если она дифференцируема почти всюду на $[0, T]$ и удовлетворяет почти всюду на $[0, T]$ систему (1).

Теорема 1. Если $w(\cdot) \in S(\rho_0)$ и $a \leq \alpha_i \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любого заданного $T > 0$ существует единственное решение бесконечной системы дифференциальных уравнений (1) в пространстве $C(0, T; l_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка. Математические заметки. 2006. 80(4). С.613–626.

2. Ibragimov G.I. A Problem of Optimal Pursuit in Systems with Distributed Parameters. J. Appl. Math. Mech. 2003, Vol. 66, No 5, pp.719–724.

3. Ibragimov G.I. On possibility of evasion in a differential game, described by countable number differential equations. Uzbek Math. Journal. Tashkent, 2004. No 1, pp. 50–55.

4. Ibragimov G.I., Azamov A., Risman Mat Hasim. Existence and Uniqueness of the Solution for an Infinite System of Differential Equations. Journal KALAM, International Journal of Mathematics and Statistics. Vol. 1, No 2, 2008, pp.9-14.

5. Ibragimov G., Norshakila A.R., Kuchkarov A., Fudziah I. Multi Pursuer Differential Game of Optimal Approach with Integral Constraints on Controls of Players. Taiwanese Journal of Mathematics. 2015. 19(3). 963–976.

6. Ибрагимов Г.И., Кучкарова С.А. Существование и единственность решений бесконечной системы 2-блочных дифференциальных уравнений. Бюллетень Института математики. 2021. No4. С.70–75.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА /REGULARIZATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A FOUR-DIMENSIONAL CAUCHY-RIEMANN SYSTEM

Маликов З. [1]**, Муйдинова Ш. Н.**[2] **Йорматов С. Ш.**

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

[1]malikovz@gmail.com

[2]shodiya94com@gmail.com

В данной работе рассматривается восстановление решение системы Коши- Римана в ограниченной области по его известным значением на куске границы области, т.е.задачи Коши для 4-х мерной системы Коши- Римана. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. В работе при помощи функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области гармоническая функция и получена оценка условной устойчивости.

Пусть G- ограниченная односвязная область с границей ∂G, состоящей из части T гиперплоскости $y_4 = 0$ и гладкокого куска гиперповерхности S лежащей в полупространстве $y_4 > 0$.

Вводим следующие обозначение:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ \ y = (y_1, y_2, y_3, y_4),\ x' = (x_1, x_2, x_3),\ \ y' = (y_1, y_2, y_3),\ \alpha = |y' - x'|.$$

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\partial_y U = 0, \tag{1}$$

где $u = u_1(y) + iu_2(y) + ju_3 + ku_4(y)$ кватерион с законом умножения для единиц,

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2} + j\frac{\partial}{\partial y_3} + k\frac{\partial}{\partial y_4},$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ \ ij = -ji = k.$$

Постановка задача. Пусть $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ удовлетворяет систем (1) в области G и на части границы S задано значение вектор - функции $U(x)$, т.е.

$$U(x)|_S = f(x),$$

где $f(x)$ непрерывная функция, заданная на части S границы области G. Требуется используя условие (2), продолжить $U(x)$ в G.

Задача (1), (2) называется задачей Коши.

Если $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ и является решением системы (1) тогда верна следующее интагральное представление [1,2].

$$U(x) = \int_{\partial G} \partial_{\overline{y}} \Phi_\sigma(y,x) \beta u(y) dS, \ \ x \in G, \tag{3}$$

где

$$\partial_{\overline{y}} = \frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2} - j\frac{\partial}{\partial y_3} - k\frac{\partial}{\partial y_4},$$

$\beta = \beta_1(y) + i\beta_2(y) + j\beta_3 + k\beta_4(y)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ единичная внешняя нормаль проведенная в точке y границы ∂G.

$$\Phi_\sigma(y,x) = \frac{1}{2\omega_n} e^{-\sigma x_4^2} Im \frac{e^{\sigma w^2}}{(i\alpha + y_4 - x_4)\alpha}, \ \ w = i\sqrt{u^2 + \ \alpha^2} + y_2. \tag{4}$$

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \partial_{\overline{y}} \Phi_\sigma(y,x) \beta u(y) dS.$$

Теорема 1. Пусть $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ является решением системы (1) на части S границы ∂G удовлетворяющий начальному условию (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \leq 1, \ \ y \in T.$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(x_4, \sigma) e^{-\sigma x^4},$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq C_1(x_4, \sigma) e^{-\sigma x_4^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где $C(x_4, \sigma)$ и $C_1(x_4, \sigma)$ функции, зависиящая от σ и x_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов В.С. Об одном аналоге системы Коши-Римана в четырехмерном пространстве // ДАН СССР. 1964. т. 154. N1. -С.16-19.

2. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Дисс. докт. физ. -мат. наук, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.

О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАВЕН 1

Мамажонов М.[1], Шерматова Х. М.[2], Махкамова О. С.[3]

[1]Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан,
[1]bek84-08@mail.ru

[2,3]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
[2,3]hilola-1978@mail.ru

В настоящем сообщении рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

в области G плоскости xOy, где $c\in R$,

$$Lu=\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}, & (x,\,y)\in G_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,\,y)\in G_i\ \ (i=2,\,3),\end{cases}$$

$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$, G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$; G_2 и G_3- треугольники с вершинами в точках $D\,(-1,\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $C\,(0,\,-1)$ и $A\,(0;\,0)$, $D\,(-1,\,0)$, $A_0\,(0,\,1)$ соответственно; J_1 и J_2- открытые отрезки с вершинами в точках $D\,(-1,\,0)$, $B\,(1;\,0)$ и $A\,(0;\,0)$, $A_0\,(0,\,1)$ соответственно.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача 1. Требуется найти функцию $u\,(x,\,y)$ со свойствами: 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2$, имеет непрерывные производные, участвующие в уравнении (1), причем производные u_x и u_y непрерывны в G, а также непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в граничных условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям

$$u\,(1,\,y)=\varphi_1\,(y)\,,\quad 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$\left.u\right|_{BC}=\psi_1\,(x)\,,\ \ 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$\left.u\right|_{DE}=\psi_2\,(x)\,,\ \ -1\le x\le -\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{D}=\psi_3\,(x)\,,\ \ -1\le x\le 0 \tag{5}$$

и 4) удовлетворяет следующим непрерывным условиям склеивания на линиях изменения типа J_1 и J_2:

$$u\,(x,\,+0)=u\,(x,-\,0)=T\,(x)\,,\ \ -1\le x\le 1, \tag{6}$$

$$u_y\,(x,\,+0)=u_y\,(x,\,-0)=N\,(x)\,,\ \ -1\le x\le 1, \tag{7}$$

$$u_{yy}\,(x,\,+0)=u_{yy}\,(x,\,-0)=M\,(x)\,,\ \ x\in(-1,0)\cup(0,1)\,, \tag{8}$$

$$u\,(+0,\,y)=u\,(-0,\,y)=\tau_3\,(y)\,,\ \ 0\le y\le 1, \tag{9}$$

$$u_x\,(+0,\,y) = u_x\,(-0,\,y) = \nu_3\,(y)\,,\ \ 0 \le y \le 1, \tag{10}$$

$$u_{xx}\,(+0,\,y) = u_{xx}\,(-0,\,y) = \mu_3\,(y)\,,\ \ 0 < y < 1. \tag{11}$$

Мы приведем здесь теорему о существовании и единственности решения задачи 1.

Теорема. Если $\varphi_1 \in C^3\,[0,\,1]$, $\psi_1 \in C^3\,[0,1]$, $\psi_2 \in C^3\,[-1,\,-1/2\,]$, $\psi_3 \in C^2\,[-1,\,0]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1\,(0) = \psi_1\,(1)$, то задача 1 допускает единственное решение.

Здесь мы приведем идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1\,(x-y)\,e^{-cy},\ \ (x,\,y) \in G_1, \tag{12}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i\,(x-y)\,e^{-cy},\ \ (x,\,y) \in G_i\ \ \ (i = 2,\,3), \tag{13}$$

где введено обозначение $u\,(x,\,y) = u_i\,(x,\,y)\,,\ \ (x,\,y) \in G_i\ \ \left(i = \overline{1,\,3}\right)$, а $\omega_i\,(x-y)$, $\left(i = \overline{1,\,3}\right)$ неизвестные пока непрерывно дифференцируемые функции.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Записывая решение уравнения (13) $(i = 2)$, удовлетворяющее условиям (6), (7), затем подставляя его в условие (5), находим неизвестную функцию $\omega_2\,(x-y)$. Далее, подставляя это решение в (4) и (3), получим две соотношения между $T\,(x)$, $N\,(x)$ и $\tau_2\,(x)$, $\nu_2\,(x)$ соответственно. Из этих полученных соотношений находим $\tau_2\,(x)$ и $\nu_2\,(x)$. Полагая в уравнении (12) $y \to +0$, а в (13) $(i = 2)$ $y \to -0$ в силу условий (6)-(8), получим еще две соотношения между $\tau_1\,(x)$, $\nu_1\,(x)$ и $\mu_1\,(x)$. Исключая из этих двух соотношений и из соотношения между $T\,(x)$ и $N\,(x)$ функции $\mu_1\,(x)$ и $\nu_1\,(x)$, приходим к дифференциальному уравнению третьего порядка относительно $\tau_1\,(x)$. Решая это уравнение при известных данных условий, находим функцию $\tau_1\,(x)$, тем самым Ц и функцию $u_2\,(x,y)$.

Теперь переходим в область G_3. Переходя в уравнениях (13) $(i = 2)$ и (13) $(i = 3)$ к пределу при $y \to 0$, находим $\omega_3\,(x) = \omega_2\,(x)\,,\ -1 \le x \le 0$. Затем применяя метод продолжения, находим функцию $u_3\,(x,\,y)$, в которой участвуют неизвестные функции $\tau_3\,(y)$ и $\nu_3\,(y)$. Полагая в этом решении $x \to -0$, получим первое соотношение между $\tau_3\,(y)$ и $\nu_3\,(y)$. Переходя в уравнении (13) $(i = 3)$ к пределу при $x \to -0$, приходим ко второму соотношению между $\tau_3\,(y)$ и $\mu_3\,(y)$.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (12), удовлетворяюшее условиям (2), (6) $(0 \le x \le 1)$, (9) и дифференцируя это решение по x, затем переходя в полученном равенстве к пределу при $x \to 0$, получим третье соотношение между $\tau_3\,(y)$ и $\nu_3\,(y)$. Из этих полученных соотношений находим функции $\tau_3\,(y)$, $\nu_3\,(y)$ и $\mu_3\,(y)$ и тем самым, решение поставленной задачи единственным образом.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мамажонов С. М.

Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
sanjarbekmamajonov@gmail.com

В настоящем сообщении ставится одна краевая задача для уравнения

$$S_1 S_2 Lu \equiv \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0, \tag{1}$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup J_1 \cup J_2$; G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках B, $C\,(0,\,-1)$, $D\,(-1,\,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0\,(-1,\,1)$, A_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0;

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \ (x,\,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, \, (x,\,y) \in D_i, \ i = 2,\,3, \end{cases}$$

$a_1, b_1 \in R$, $1 < \gamma_1 < +\infty$, $\gamma_2 = -1$ $(\gamma_i = b_i/a_i,\ i = 1, 2)$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u\,(x,\,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u\,(1,\,y) = \varphi_1\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u\,(-1,\,y) = \varphi_2\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u_x\,(1,\,y) = \varphi_3\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1, \tag{4}$$

$$u_x\,(-1,\,y) = \varphi_4\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$u|_{BC} = \psi_1\,(x)\,, \ \ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

$$u|_{DF} = \psi_2\,(x)\,, \ \ -1 \le x \le -1/2, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3\,(x)\,, \ \ 0 \le x \le 1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4\,(x)\,, \ \ -1 \le x \le 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5\,(x)\,, \quad 0 < x < 1, \tag{10}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u\,(x,\,+0) = u\,(x,\,-0) = T\,(x)\,, \ \ -1 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$u_y\,(x,\,+0) = u_y\,(x, -0) = N\,(x)\,, \ \ -1 \le x \le 1, \tag{12}$$

$$u_{yy}\,(x,\,+0) = u_{yy}\,(x,\,-0) = M\,(x)\,, \ \ x \in (-1, 1) \setminus \{0\}\,, \tag{13}$$

$$u_{yyy}\,(x,\,+0) = u_{yyy}\,(x,\,-0) = \Theta\,(x)\,, \ \ x \in (-1, 1) \setminus \{0\}\,, \tag{14}$$

$$u\,(+0,\,y) = u\,(-0,\,y) = \tau_3\,(y)\,, \ \ 0 \le y \le 1, \tag{15}$$

$$u_x\,(+0,\,y) = u_x\,(-0,\,y) = \nu_3\,(y)\,, \ \ 0 \le y \le 1, \tag{16}$$

$$u_{xx}\,(+0,\,y) = u_{xx}\,(-0,\,y) = \mu_3\,(y)\,, \ \ 0 < y < 1 \tag{17}$$

$$u_{xxx}\,(+0,\,y) = u_{xxx}\,(-0,\,y) = \theta_3\,(y)\,, \ \ 0 < y < 1, \tag{18}$$

где $\varphi_i\ \left(i=\overline{1,4}\right),\ \psi_j\ \left(j=\overline{1,5}\right)$ - заданные достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=1$, а $F\left(-1/2\ ,-1/2\ \right)$.

В работе [1], исследовано краевая задача при $a_1=1, a_2=1, b_1=0, b_2=1$.

Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи в следующей теореме:

Теорема. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4\left[0,1\right], \varphi_3,\varphi_4\in C^3\left[0,1\right], \psi_1\in C^4\left[0,1\right], \psi_2\in C^4\left[-1,-1/2\right], \psi_3\in C^3\left[0,\,1\right],\ \psi_4\in C^3\left[-1,\,0\right], \psi_5\in C^2\left[0,\,1\right]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1\left(1\right)=\varphi_1\left(0\right),\ \varphi_2\left(0\right)=\ \psi_2\left(-1\right),\ \psi'_4\left(0\right)=-\psi'_3\left(0\right)$, то задача-1 имеет единственное решение.

Эта теорема доказывается методом непосредственно построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}\left(b_1x-a_1y\right)+\omega_{12}\left(x+y\right),\ \ (x,\,y)\in G_1, \tag{19}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}\left(b_1x-a_1y\right)+\omega_{i2}\left(x+y\right),\ \ (x,\,y)\in G_j\ \ (j=2,\,3), \tag{20}$$

где введены обозначения $u\left(x,y\right)=u_i\left(x,\,y\right),(x,y)\in G_i\left(i=\overline{1,3}\right)$, причем $\omega_{i1}\left(b_1x-a_1y\right)$, $\omega_{i2}\left(x+y\right)\ \ \left(i=\overline{1,\,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование проведется сначала в области G_2. Записывая решение уравнения (20) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и удовлетворяя условиям (8), (9) и (10) после некоторых выкладок, находим функцию $\omega_{21}\left(b_1x-a_1y\right)+\omega_{22}\left(x+y\right)$. Затем подставляя записанное решение в (6), (7), имеем соотношения между неизвестными функциями $T\left(x\right)$, $N\left(x\right)$ и $\tau_2\left(x\right)$, $\nu_2\left(x\right)$. Из этих полученных двух соотношений находим функции $\tau_2\left(x\right)$ и $\nu_2\left(x\right)$. Затем пользуясь условиями склеиваний (11)-(14), приходим к соотношениям между неизвестными функциями $\tau_1\left(x\right)$, $\nu_1\left(x\right)$, $\mu_1\left(x\right)$ и $\theta_1\left(x\right)$. Из этих полученных четырех соотношений находим функции $\tau_1\left(x\right)$, $\nu_1\left(x\right)$, $\mu_1\left(x\right)$ и $\theta_1\left(x\right)$. В области G_3 задача решается методом продолжения. В этой области получается одно соотношение между $\tau_3\left(y\right)$ и $\nu_3\left(y\right)$. А в области G_1 записывается решение уравнения (17), удовлетворяющего условиям (2), (10), (14) и дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю, получим второе соотношение между $\tau_3\left(y\right)$ и $\nu_3\left(y\right)$. Пользуясь условиям склеивания (15)-(18), получим еще две соотношения между $\tau_3\left(y\right)$, $\nu_3\left(y\right)$, $\mu_3\left(y\right)$ и $\theta_3\left(y\right)$. Из этих четырех соотношений находим эти функции и тем самым – решение поставленной задачи единственным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамажонов С.М. К постановке и исследованию одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Научный вестник Наманганского государственного университета. 2019, №7. С. 18–26.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
matveeva@math.nsc.ru

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных дифференциальных и разностных уравнений с запаздыванием. Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений этих систем на правой полуоси. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1–9]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00754).

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

2. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

3. Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

4. Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

5. Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063-1079.

6. Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.

7. Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020, No. 20. P. 1–12.

8. Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

9. Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 583–598.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ И ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Мирсабуров М.[1], Абрайкулов Р.[2], Жовлиева К.[3]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан,
[1]mirsaburov@mail.ru;
[2]rustam.abraykulov@gmail.com
[3]kamola94akrom@mail.ru

Для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с локальными и нелокальными условиями на частях граничной характеристики и с разрывными условиями склеивания на линии вырождения.

Введение. Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x+iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянные $m > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1- соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = \{x : \ -1 < x < 1, \ y = 0\}$.

В задаче Трикоми $[1, c.223]$ во всех точках граничной характеристики AC задавалась значение искомой функции, в настояшей работе исследуется корректность задачи, где характеристика AC произвольном образом разбивается на две части AC_0 и C_0C и на первой части AC_0 задается значение искомой функции, а на второй части C_0C и параллельной ей внутренней характеристике EC_1 задается условие Бицадзе-Самарского [2].

Задача A. В области Ω требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$;
2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 $[3, c.35]$ в области Ω^-;
4) на интервале вырождения выполняется общие условия сопряжения [4]

$$u(x, -0) = a_1(x)u(x, +0) + a_0(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = b_1(x)\lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x), \ x \in I \setminus \{c\}, \tag{3}$$

причем эти пределы при $x \to \pm 1$, $x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta, \quad$ где $\quad \beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2) \in (0, 1/2)$; 5) выполнены условия

$$u(x, \sigma_0(x)) = c(x)u(x, +0) + \varphi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

$$u(x,y) \mid_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2], \tag{5}$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x), \quad x \in [c, 1], \tag{6}$$

где

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(x_0+1)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i\left[\frac{(m+2)(x_0-c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

–соответственно аффиксы точек пересечения характеристик $C_0C \subset AC$ и EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $(x_0, 0)$, где $x_0 \in [c, 1], a_0(x), a_1(x), b_0(x), b_1(x)$, $c(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)-$ заданные достаточно гладкие функции, $\mu-$ некоторая постоянная причем $\psi(-1) = 0, \rho(c) = = \rho(1) = 0, \quad \varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Заметим, что условие

(4) является условием Бицадзе–Самарского на σ_0 и на отрезке вырождения AB, а условие (6) так же есть условие Бицадзе–Самарского [2] на параллельных характеристиках $C_0C \subset AC$ и EC_1.

Отметим, что задача A при $\mu = 0$, $(\psi((c-1)/2) = \rho(c))$ переходит в задачу Трикоми с разрывными условиями сопряжения на линии вырождения вида (2) и (3) [4].

Идея исследования задачи A простая: заранее предполагается, что известны величини $u(x, \pm 0)$ и $\lim\limits_{y\to\pm 0} |y|^{\beta_0} u_y$ на отрезке AB и по этим данным в области Ω^- выписывается известное решение видоизмененной задачи Коши [3, c.34], а в области Ω^+, дополнительно в предположение что известны $u(x,y)\mid_{\sigma_0}$, выписывается решение задачи Дирихле или решение видоизмененней задачи Хольмгрена [3, c.93], затем эти решения подченяются краевым условиям и получается нестандартные сингулярные интегральные уравнения Трикоми относительно неизвестной функции $\nu(x) = \lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$.

Однозначная разрешимость этого уравнения доказывается методом работы [5].

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.,1985.304 с.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобшениях линейних эллиптических краевых задач //ДАН СССР.1969.т.185,є4, с.739-740.
3. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005.
4. Каратопраклиев Г. Об одном обобшении задачи Трикоми //ДАН СССР.1964.т.158,є2, с.271-274.
5. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Задача с условием Бицадзе- Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2020, том 56 є8, С.1073-1094.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДЕФОКУСИРУЕЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

Муминов У. Б.[1], Данияров С. М.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
[1]umuminov153@gmail.com;

В данной работе рассматривается задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) с нагруженными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2+q^2) + a(t)p(x_0,t)p_x + b(t)q(x_0,t)q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2+q^2) + a(t)p(x_0,t)q_x - b(t)q(x_0,t)p, \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \; x \in R \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических по x функций:

$$\begin{array}{l} p(x+\pi,t)=p(x,t),\ q(x+\pi,t)=q(x,t),\ x\in R,\ t\geq 0,\\ p(x,t),\ q(x,t)\in C_x^2(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)C(t\geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)\in C([0,\infty))$ заданные непрерывные ограниченные функции, а $x_0\in R$.

В данной статье предлагается алгоритм построения решения $p(x,t),q(x,t)$,$x\in R,\quad t>0$, задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y\equiv By'+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\ x\in R,\ t>0, \tag{4}$$

где

$$B=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ -1 & 0\end{array}\right),\ \ \Omega\,(x,t)=\left(\begin{array}{cc} p(x,t) & q(x,t)\\ q(x,t) & -\,p(x,t)\end{array}\right),\ \ y=\left(\begin{array}{c} y_1\\ y_2\end{array}\right).$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t)=(c_1(x,\lambda,\tau,t),c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t)=$ $=(s_1(x,\lambda,\tau,t),s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t)=(1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t)=(0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t)=c_1(\pi,\lambda,\tau,t)+s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Корни уравнений $\Delta(\lambda,\tau,t)=\pm 2$ обозначим через $\lambda_n(\tau,t)$, она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задач $y(0,\tau,t)=\pm y(\pi,\tau,t)$ для уравнения (4).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0,\tau,t)=0\,,\ y_1(\pi,\tau,t)=0, \tag{5}$$

для уравнения (4). Первая компонента вектор-функции $s(x,\lambda,\tau,t)$ удовлетворяет первому граничному условию (5), подставляя его на второе граничное условие, получим $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$. Решая его относительно$\lambda$, находим собственное значение $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$, задачи Дирихле (4), (5). Обозначим через $\sigma_n(\tau,t)$знак:$\sigma_n(\tau,t)=sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$.

Множество $\{\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}\}$, называется спектральными параметрами, а набор $\{\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}\}$- спектральными данными оператора $L(\tau,t)$. Восстановление коэффициента $\Omega\,(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega\,(x,t)$ - оператора $L(\tau,t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}\}$. Теперь с помощью начальной функций $p_0(x+\tau)$,$q_0(x+\tau)$, $\tau\in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau,0)y=\lambda y$,$x,\tau\in R$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n,\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau),\ n\in\mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau,0)$. Отсюда следует, что $\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть пара $p(x,t)$,$q(x,t)$,$x\in R$, $t>0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau,t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$1)\ \lambda_n(\tau,t)=\lambda_n, n\in\mathbb{Z},$$

2)

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\{q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)+[p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)]^2+$$

$$+\xi_n^2(\tau,t)-a(t)p(x_0,t)[p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)]+\frac{1}{2}b(t)q(x_0,t)\} \tag{6}$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}} \quad (7).$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in\mathbb{Z}$, меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)\,,\,\sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\,,\,n\in\mathbb{Z}, \tag{8}$$

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t))\,,q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \tag{9}$$

$$q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)), \tag{10}$$

систему дифференциальных уравнений (6) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данныеλ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}$, оператора $L(\tau,0)$ соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$, $q_0(x+\tau)$, $\tau\in R$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ черезλ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}$. Теперь в системе уравнения (6) с начальным условием (8) положим $\tau=x_0$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0,t)$,$\sigma_n(x_0,t)$,$n\in\mathbb{Z}$. Затем из формулы следов (9), определим функции $p(x_0,t)$,$q(x_0,t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (6) и решая задачу Коши (6)-(7) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}$. Из формул следов (9), определим $p\,(\tau,t)$ и $q(\tau,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.

2. Итс А.Р. Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.

3. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера// Докл. АН УССР. Сер.А.,1976, є11, 965-968.

4. Смирнов А.О. Эллиптические по t решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.

5. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199,є1,с.60-68.

6. Домрин А.В. О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрӵдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.

7. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. //Функц.анализ и его прил. – Москва, 1975.т.9.вып.3. с.41-51.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нуриддинов Ж. З.

Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;
j.zafarovich@mail.ru;

В настоящей работе изучается задача определиния функций $u(x,t)$, $k(x',t)$, $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n,\ t>0$ из следующих уравнений:

$$u_t=a(t)\Delta u+\int\limits_0^t k(x',\tau)u(x,t-\tau)d\tau, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{2}$$

$$u\Big|_{x_n=0}=f(x',t),\ 0\le t\le T,\ f(x',0)=\varphi(x',0), \tag{3}$$

где $\triangle$ - оператор Лапласа относительно пространственного переменного $x=(x_1,...,x_n):$ $\triangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; $\mathbb{R}^n_T=\{(x,t)|x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n,\ 0<t<T\}$ представляет собой полосу с толщиной T, $T>0$ произвольное фиксированное число, $a(t)$ является гладкой функцией и $0<a_0\le a(t)\le a_1<\infty$. для $t\in[0,T]$.

Для заданных функций $\varphi(x)$,$f(x',t)$ и решения задачи $(1)-(3)$ используются пронстранства Гельдьдера [1, стр. 16-27] для функций, зависящих только от пространственных переменных -H^{α} и для функций, зависящих от пространственных и временной переменной - $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$, α- неотрицательное целое число.

Для решения, поставленная задача $(1)-(3)$ заменяется вспомогательной задачей, в которой неизвестное ядро $k(x',t),\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ t>0$ входит в допольнительное условия. Затем используя формулу, обобщающую формулу Пуассона для решения задачи Коши в случае урувнения теплопроводности с переменным коэффициентом при лапласиана, получена эквивалентная система интегральных уравнений относительно неизвестных функций. Применяя метод сжатых отображений [2, стр. 87-97] для последней доказано следующее утверждение:

Теорема (существование и единственность). *Если условия* $\varphi(x)\in H^{l+6}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $|\varphi(x)|\ge\varphi_0=const>0$ $f(x',t)\in H^{l+4,(l+4)/2}\left(\bar{\mathbb{R}}^{n-1}_T\right)$, $l\in(0,1)$, $f(x',0)=\varphi(x',0)$, $f_t(x',0)=\triangle\varphi(x',0)$ *выполняются, то существует достаточно малое число* $T>0$, *такое, что решение задачи (1)-(3) в классе функций* $\{u(x,t)\in H^{l+4,(l+4)/2}\left(\bar{\mathbb{R}}^{n}_T\right),\ k(x',t)\in H^{l,l/2}\left(\bar{\mathbb{R}}^{n}_T\right)$ *существует и единственно.*

Среди работ посвященных обратным задачам определения ядра интегро-дифференциального уравнения теплопроводности, отметим [3], [4], в которых исследованы близкие к рассмотренной в этой работе задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Москва: Наука, 1967, 736 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976, 543 с.

3. Дурдиев Д. К., Рашидов А.Ш. Обратная задача определения ядра в интегро– дифференциальном уравнении параболического типа, // Дифференц. уравн., Том 50,No 1, 2014, ст.110–116

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Очилова Н. К.

Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан

nargiz.ochilova@gmail.com

Основная цель данной работы Ц исследование существования и единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа. Рассматривается параболо-гиперболическое уравнение с дробной производной Капута. Единственность решения доказана методом интегральной энергии с использованием необходимых свойств гипергеометрических функций и интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Существование доказывается методом интегральных уравнений.

В настоящей работе исследуется краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_{\mathbb{C}}D^{\alpha}_{oy}u, & y>0,\\ (-y)^m u_{xx}-x^n u_{yy}, & y<0,\end{cases} \tag{1}$$

$0<\alpha<1, \quad m,n=const>0$, с операторами:

$$_{\mathbb{C}}D^{\alpha}_{oy}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}u_t(x,t)dt,$$

в области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I_1$. Ω_1- область,ограниченная отрезками: $A_1A_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h_2\}$, $A_1B_1=\{(x,y):\ y=0,\ 0<x<h_1\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ x=h_1,\ 0<y<h_2\}$, $A_2B_2=\{(x,y):\ y=h_2,\ 0<x<h_1\}$, при $y>0$, а Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком A_1B_1 оси x и двумя характеристиками $A_1C:\ \frac{1}{q}x^q-\frac{1}{p}(-y)^p=0$, $\quad B_1C:\ \frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}(-y)^p=1$, уравнения (1) выходящими из точек $A_1\,(0;0)$, $B_1\,(h_1;0)$, пересекающимися в точке $C\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q},\ -\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$ при $y<0$. Здесь $2q=n+2$, $2p=m+2$, $h_1=q^{1/q}$, $h_2>0$, $m>n$.

Введем следующие обозначения: $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$, $I_1=\{(x,y):0<x<h_1,\ y=0\}$, $I_2=\{(x,y):x=0,\ 0<y<h_2\}$, $2\alpha_1=n/(n+2)$, $2\beta_1=m/(m+2)$ причем $0<\alpha_1<\beta_1<0.5$,

$$F_{0x}\begin{bmatrix} a, & b\\ c, & x^k\end{bmatrix}f(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^x f(t)(x^k-t^k)^{c-1}F\left(a,b,c,\frac{x^k-t^k}{x^k}\right)kt^{k-1}dt,\ k>0,\ c>0,$$

где $\Gamma(z)$- Гамма функция, $F(a,b,c;z)$- гипергеометрическая функция Гаусса, $F_{0x}\left[...\right]$ - известный оператор, введенный в [1]. В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая

Задача БС. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими из класса:
1) $\Delta=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega^-),\ u_{xx}\in C\left(\Omega^+\right),\ {}_C D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega^+\right)\right\}$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;
3) $y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega_1)$, $u_y\in C(\Omega_2)$, причем эти функции непрерывны вплоть до границы A_1B_1. Кроме того на A_1B_1 выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,+0)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u(x,0)+\lambda_3(x),\ (x,0)\in A_1B_1;$$

причем $\nu^{\pm}(x)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x\to 0$ и ограничена при $x\to h_1$;
4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\left[\gamma_1 u_x(x,y)+\gamma_2 u(x,y)\right]\Big|_{A_1A_2}=\varphi_1(y),\ 0\leqslant y\leqslant h_2,$$

$$\left[\delta_1 u_x(x,y)+\delta_2 u(x,y)\right]\Big|_{B_1B_2}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant h_2,$$

$$\frac{d}{d\left(x^{2q}\right)}\left(x^{2q}\right)^{\frac{1-\alpha_1-\beta_1}{2}}F_{ox}\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1+\beta_1-1}{2}, & \dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}\\ \beta_1, & x^{2q}\end{bmatrix}\left(x^{2q}\right)^{\frac{2\alpha_1-1}{2}}u\left[\theta(x)\right]=$$
$$=a(x)u_y(x,0)+b(x),\qquad 0<x<h_1,$$

где γ_1, γ_2, δ_1, $\delta_2=const$, и $\lambda_i(x)\ i=\overline{1,3}$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\tilde{a}(x)=a(x^{1/2q})$, $\tilde{b}(x)=b(x^{1/2q})$ - заданные функции, $F_{0x}\left[...\right]$ и обобщенный интегральной оператор дробного порядка [1], а

$$\theta(x)=\left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q}-i\left(\frac{p}{q}\frac{x^q}{2}\right)^{1/p}$$

точка пересечения характеристик уравнения (1) выходящих из точек $(x,0)\in I_1$, с характеристикой AC.

ЛИТЕРАТУРА

1.Islomov B.I.,Ochilova N.K.,Sadarangani K.S. On a Frankl type boundary value problem for a mixed type degenerating equation. Ukrainian Mathematical Journal.(2019).vol. 71, pages 1347 – 1359.

Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа

Х. Р. Расулов

Бухарский филиал института Математики АН Республики Узбекистан, Бухарский государственный университет
xrasulov71@mail.ru

Известно, что в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования уравнений смешанного типа. Практический интерес к данной области связан с применением уравнений смешанного типа в газовой динамике трансзвуковых течений, в математической биологии, в теории лазерного излучения, в теории упругости, в теории оболочек, в теории плазмы, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде и других разделах науки и техники.

Рассмотрим уравнение

$$|y|^k u_{xx} + sign(xy)|x|^k u_{yy} = f(x,y,u), \qquad k>0. \qquad (1)$$

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область плоскости xy, ограниченная кривой Жордана σ с концами в точках $A(1;0)$ $B(0;1)$, лежащей на первом квадрате $x>0, y>0$ и характеристиками

$$BC:(-x)^p + y^p = 1, \quad CD: x+y=0, \quad DA: x^p + (-y)^p = 1$$

уравнение (1), где $2p = k+2$. Эллиптическую часть области обозначим через Ω_1, а гиперболические - через Ω_2 и Ω_3. Пусть $A(x_0,0)$ и $B(0,y_0)$ произвольные точки отрезков OA и OB соответственно. Под A_0P_1, A_0P_2 и B_0E_1, B_0E_2 будем понимать характеристики

$$x^p + (-y)^p = x_0, \qquad x^p - (-y)^p = x_0,$$

$$(-x)^p + y^p = y_0, \qquad (-x)^p - y^p = y_0$$

уравнение (1), соединяющие точки $A(x_0,0)(0\le x_0\le 1)$ и $B(0,y_0)(0\le y_0\le 1)$ с точками

$$P_1\Big\{\left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, -\left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\Big\}, P_1\Big\{\left(\frac{x_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, -\left(\frac{1-x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\Big\},$$

$$E_1\Big\{\left(\frac{y_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, -\left(\frac{y_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\Big\}, P_1\Big\{\left(\frac{y_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, -\left(\frac{1-y_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\Big\}.$$

Через Ω^* обозначим область, ограниченную контуром $A\sigma BE_2B_0E_1OP_1A_0P_2A$.

Определение: регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $U(x;y)$, непрерывную в замкнутой области $\bar{\Omega}$, имеющую непрерывные производные до второго порядка включительно в области Ω и удовлетворяющую уравнению (1).

Задача Г. Найти регулярное решение уравнение (1) в области Ω^* при $xy\ne 0$, обладающие следующими свойствами:

1)$u(x;y)\in C(\Omega^*)\cap C^2(\Omega^*)$;

2)$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1 в точке $O(0;0)$, $A(1;0)$ $B(0;1)$;

3)$u(x;y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$u|_\sigma = \varphi(\xi)$ ($\xi-$ точка контура σ), (2)

$$\begin{cases} u|_{A_0P_1} = \psi_1(x), x\in \bar{I}_1; & u|_{A_0P_2} = \psi_2(x), x\in \bar{I}_2, \\ u|_{B_0E_1} = \psi_3(y), y\in \bar{I}_1; & u|_{B_0E_2} = \psi_4(y), y\in \bar{I}_4, \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$I_1 = \left(\left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < x < x_0\right), \quad I_2 = \left(x_0 < x < \left(\frac{x_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

$$I_3 = \left(\left(\frac{y_0}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < y < y_0\right), \quad I_4 = \left(y_0 < y < \left(\frac{y_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

и $\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4-$ заданные функции.

В данном сообщении при определенных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи **Г**.

Следует отметить, что в данной работе с помощью методом последовательных приближений [1-3] доказаны существование решения задачи, получены определенную оценку для решение $u(x,y)$ и существенно расширен класс рассматриваемых функций $f(x,y,u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салахитдинов М. С., Расулов Х. Р. Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН РУ, 1996 г., No4, стр. 3-7.
2. Расулов Х. Р. Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллитичесческого типа с двумя линиями вырождения // ДАН РУ, 1996 г., No12, стр. 12-16.
3. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, стр. 197-199.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Расулов М. С.[1], Норов А. К.[2]
Институт Математики , Ташкент, Узбекистан
[1]rasulovms@bk.ru
[2]norov@mathinst.uz

В работе рассматривается задача со свободной границей для системы параболических уравнений реакции-диффузии: требуется найти функции $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ удовлетворяющие условиям

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_x u_x = u(m(x) - u - kv), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - m_x v_x = v(m(x) - v - hu), \quad (t,x) \in Q, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0), \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x < \infty, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = v_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad s(t) \le x < \infty, \tag{6}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$\dot{s}(t) = -\mu e^{m(s(t))} u_x(t,x), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < +\infty\}$, $s(t)$– свободная (неизвестная) граница определяется вместе с $u\,(t,x)$, $v\,(t,x)$; d_1, d_2, k, h, μ, ρ – положительные постоянные, положительная функция $m(x)$ удовлетворяет $m(x) \in C^1[0,s(t)]$. Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ удовлетворяют условиям:

$$u_0(x), v_0(x) \in C^{1+\alpha}(0,s_0),\ u_0(x) > 0 \text{ в } [0,s_0],\ v_0(x) > 0 \text{ в } (0,s_0),$$
$$u_0(0) = v_0(0) = 0, u_0(s_0) = v_0(s_0) = 0,\ u_0'(s_0) < 0,\ v_0'(s_0) < 0.$$

Задачу (1)-(8) можно рассматривать как описывающую распространение двух взаимодействующих видов с плотностью $(u(t,x), v(t,x))$ по месту обитания.

Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала устанавливаются двусторонние оценки для $u\,(t,x)$, $v(t,x)$ и $\dot{s}(t)$, а затем оценки для $|\cdot|_{1+\alpha}$, $|\cdot|_{2+\alpha}$. При этом воспользуемся результатами работы [1-2]. Далее, доказаны теоремы существование и единственности, а также исследованы некоторые качественные свойства решении [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр.ММО. 1967. Т.16. С. 329–346.
2. Du Y., Lin Z.G. The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2014. Vol.19, pp. 3105-3132.
3. Zhou. L. An evolutional free-boundary problem of a reaction-diffusion-advection system // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 2017. Vol. 147, Issue 3. pp. 615–648.

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН КОШИ МАСАЛАСИ

Расулов Х.Р.[1], Ахмедов О.С[2].
Бухоро давлат университети, Бухоро, Ўзбекистон
[1]xrasulov71@mail.ru, [2]axmedov.olimjon70@gmail.com

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг муҳим ва жадал ривожланиб бораётган йўналишларидан бири аралаш типдаги тенгламалар соҳаси ҳисобланади. Иккинчи томондан бу тенгламаларнинг ечимлари механика, физика ва техника масалаларида кенг кўламли тарзда татбиқ этилиши амалиётда катта қизиқиш уйғотади.

Битта ва иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар Ф.Франкль, А.Чаплыгин, А.В.Бицадзе, А.Самарский, М.Салохитдинов, Т.Джураев ва уларнинг ўқувчилари томонидан ўрганилган. Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенгламалар эса кам ўрганилган [1,2].

Аралаш типдаги тенгламалар деб қаралаётган соҳанинг бир қисмида эллиптик, иккинчи қисмида гиперболик типга тегишли бўђлган тенгламаларга айтилади, уларни ажратиб турувчи чизиқда (бузилиш чизиғи) эса тенглама параболик типга тегишли ёки аниқланмаган бўлиши мумкин.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида бузилиш чизиғига (тенгламанинг типи ўзгаради) эга ва сингуляр коэффициентли квазичизиқли гиперболик типдаги тенгламалар муҳим роль ўйнайди. Ушбу мақолада $y = 0$ ўқининг OA кесмаси ва OD: $x + y = 0$, DA: $\mathrm{x}^p + (-y)^p = 1$, $\ 2\mathrm{p} = \mathrm{m} + 2$ характеристикалар билан чегараланган Ω - соҳада

$$-(-y)^m U_{xx} + x^m U_{yy} + \ \frac{\alpha}{x}U_x + \frac{\beta}{y}U_y = f\,(x,\ y,\ U)\,,\quad \alpha\mathrm{up},\beta\mathrm{up},\mathrm{m} = \mathrm{const} > 0$$

тенгламани қараймиз.

Таъриф: Берилган тенгламани қаноатлантирувчи $U(x,y) \in C\left[\overline{\Omega}\right] \cap C^2\left[\Omega\right]$ функцияга тенгламанинг регуляр ечими деб аталади.

Коши масаласи: тенгламани қуйидаги бошланғич шартларни

$$U\,(x, 0) = \tau\,(x)\,,\quad 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{y\to -0}(-\text{y})^{\beta}U_y(x,y)=\nu\left(x\right),\quad 0<x<1$$

қаноатлантирувчи регуляр ечимини топинг, $\tau(x)$ ва $\nu\left(x\right)-$ берилган функциялар, бунда $\tau\left(x\right)\in \text{C}\left[0,1\right]\cap C^{2}\left(0,1\right), \nu\left(x\right)\in \text{C}(0,1]\cap C^{2}(0,1)$ ва $\nu\left(x\right)$ - O(0,0) нуқтада 2/(m+2) тартибли иккинчи тур узилишга эга бўлиши мумкин.

Айтиш жоизки, аксарият мақолаларда, хусусан [1] ва [2] илмий ишларда тенгламанинг ечими мавжудлигини кўрсатишда кетма-кет яқинлашиш принципидан фойдаланилганлиги сабабли, $f\left(x,\ y,\ U\right)$ ва $f\left(x,\ y,\ U,\ U_x,\ U_y\right)$ функция ва унинг $U,\ U_x,\ U_y$ аргументлари бўйича ҳосилаларининг абсолют қийматларини маълум бир сондан кичик бўлиши талаб қилинади.

Мазкур ишда тенгламанинг ечими мавжудлигини исботлашда юқоридаги ишлардан фарқли ўлароқ, Шаудер принципидан фойдаланилади. Натижада, ўнг томондаги $f\left(x,\ y,\ U\right)$ функция синфи кенгайтирилиб ва $\alpha,\ \ \beta,$ m$-$ ўзгармасларга маълум шартлар қўйилиб, тенгламанинг ягона ечимга эга бўлиши исботланилган.

АДАБИЁТЛАР

1. Салахитдинов М.С., Расулов Х.Р. Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа. ДАН РУ, 1996 г., No4, с.3-7.
2. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

ЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Рахимова З.В.

Наманганский государственный университет, г. Наманган, Узбекистан,
zuhrarahimova256@gmail.com

Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются так называемые уравнения смешанно-составного типа. Впервые в работах А.В.Бицадзе и М.С.Салахитдинова[1] поставлен и исследован ряд задач для модельного уравнения смешанно-составного типа видов.

После этих работ краевые задачи для модельных уравнений смешанно-составного типа, главная часть которых содержит операторы эллиптико-гиперболического, параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов, были исследованы в рабо-тах М.С.Салахитдинова [2], Т.Д.Джураева [3-4] и их учеников.

Начиная с работ [5-6] в теории уравнений параболического типа появилось новое направление, в котором рассматриваются краевые задачи для вырождающегося урав-нения параболического типа.

Насколько нам известно, краевые задачи для уравнения параболо-гиперболичес-кого типа с одной линией вырождения второго и третьего порядков изучены, сравни-тельно мало. Отметим работы Б.Исломова и Ф. Хасанова [7], Б.И. Исломова и З.С. Мадрахимовой [8].

Данная работа посвящена постановке и исследованию локальной краевой задачи для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка, вырождаю-щегося в внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(Lu), \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} x\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}, & (x, y) \in \Omega_0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x, y) \in \Omega_j,\ (j = 1, 2), \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

Здесь Ω_0- область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно; а Ω_1- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси x и двумя характеристиками

$$AC : x + y = 0, \qquad BC : x - y = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси y и двумя характеристиками $AD : x + y = 0$, $A_0D : y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек A и A_0,пересекающимися в точке $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения:

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I_1 \cup I_2,$$

$$I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\},\ I_2 = \{(x, y) :\ \ x = 0,\ \ 0 < y < 1\}.$$

Задача B. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойст-вами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;

2) $u(x, y) \in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ и удовлетворяет уравнения (1) в области Ω_i $(i = \overline{0, 2})$;

3) u_x, u_y- непрерывны вплоть до AD; 4) на интервале I_1 и I_2 соответственно имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} u_y(x, y) = \lim_{y \to +0} u_y(x, y),\ (x, 0) \in I_1,\ \lim_{x \to -0} u_x(x, y) = \lim_{x \to +0} u_x(x, y),\ (0, y) \in I_2;$$

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{AC} = \psi_1(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ , \quad u(x, y)|_{A_0B_0} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(x, y)|_{AD} = \varphi_1(y), \qquad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{AD} = \varphi_2(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},$$

$$u(x, y)|_{BB_0} = \varphi_3(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

где $n-$ внутренная нормаль, $\varphi_k(y)$ $(k = \overline{1, 3})$, $\psi_j(x)$ $(j = \overline{1, 2})-$ заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0)\,,\ \ \psi_2(1) = \psi_3(1)\,, \tag{3}$$

$$\varphi_3(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1), \quad \varphi_2(y) \in C\left[0; \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0; \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1(y) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

$$\psi_2(x) \in C\,[0;1] \cap C^2\,(0;1)\,, \tag{6}$$

а функции $\psi_1'''\ \left(\frac{x}{2}\right),\ \left(\varphi_1'''\ \left(\frac{y}{2}\right)\right)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше α_0 на концах интервала $I_1\,(I_2)$.

Справедливо следующая

Теорема. Если выполняются условия (2) - (6), то в области Ω существует единственное решение задачи **B**.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа. // Сибирский математический журнал. Новосибирск, 1961. Т.II. № 1. С. 7-19.

2.*Салахитдинов М.С.* Уравнение смешанно-составного типа.// Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

3.*Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-состав-ного типов.// Ташкент: Фан, 1979. 240 с.

4.*Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений пара-боло-гиперболического типа.// Ташкент: ФАН, 1986. 204 с.

5.*Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.// Новосибирск: НГУ, 1973. 144 с.

6.*Терсенов С.А.*Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени.// Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. 53 с.

7.*Исломов Б., Хасанов Ф.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Тез. докл. Международного Российско-Узбекского симпозиума. Нальчик, 2003. С. 58-59.

8.*Исломов Б.И., Мадрахимова З.С.* Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором .// Узбекский математи-ческий журнал. Ташкент, 2009. № 4. С.76-81.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рузиев М. Х.

Институт Математики АН РУз., Ташкент, Узбекистан

mruziev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ - первый квадрант плоскости, D^- - конечная область четвертый квадрант плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. В (1) m, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющее условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_0 = \{(x,y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x,y) : 1 \le x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 - соответственно точки пересечения характеристик OC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$- произвольное фиксированное число.

Пусть $q(x) \in C^1[c,1]$ - диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c,1]$ в множество точек отрезка $[0,c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(1) = 0$, $q(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $q(x) = k(1-x)$, где $k = \frac{c}{1-c}$.

Задача GF. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами: 1)$u(x,y) \in C(\bar{D})$ где $\bar{D} = \bar{D^-} \cup D^+ \cup \bar{I_0} \cup \bar{I_1}$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] в области D^-;

4) выполняется равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, x \ge 0, y \ge 0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi(y),\ \ y \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x),\ \ x \in \bar{I}_1,$$

$$x^\beta D_{0,x}^{1-\beta} u[\theta(x)] = \mu(x)(x-c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta} u[\theta^\star(x)] + \psi(x), c < x < 1,$$

$$u(q(x),0) = \mu_0 u(x,0) + f(x),\ \ c \le x \le 1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, $f(1) = 0$, $f(c) = 0$, $\mu(x), \psi(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_2}(c,1)$, $\psi(c) = 0$, μ_0- const, $\tau_1(x) \in C(\bar{I_1})$, причем функцию $\tau_1(x)$ в окрестности точке $x = 1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau_1}(x)$, $\tau_1(x) \in C(\bar{I_1})$, и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \le \frac{M}{x^\varepsilon}$, ε, M - положительные константы, $\tau_1(x)$ - удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1,N]$, $N > 1$, $\varphi(y) \in C(I_0)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi(y) \in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0,N]$, $N > 0$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $D_{0,x}^{1-\beta}$ и $D_{c,x}^{1-\beta}$ - операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, точками пересечения характеристик $C_0C(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0 \in (c,1)$, являются $\theta(x_0) = \frac{x_0}{2} - i\left(\frac{m+2}{4}x_0\right)^{\frac{2}{m+2}}$, $\theta^\star(x_0) = \frac{x_0+c}{2} - i\left(\frac{m+2}{4}(x_0-c)\right)^{\frac{2}{m+2}}$.

В работе [2] в ограниченной области была исследована задача, где граничная характеристика была произвольным образом разбита на два куска и на первом куске задавалось условие Трикоми, и на втором куске и параллельной ей характеристике -условие Бицадзе-Самарского. Данная работа, посвященная исследованию задачи в бесконечной области, отличается от [2] тем, что здесь характеристика OC_0 свобождена от краевого условия, которое заменено аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi(y) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \le 0$. Тогда задача FBS имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $q(x) = k(1-x)$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \le 0$, где $k = c/(1-c)$. Тогда решение задачи FBS существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов М.М. Уравнения смешаннного типа. Москва.: Высшая школа, 1985.
2. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках.//Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, №9. С. 1281–1284.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛАПЛАСОВА ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Сатторов Э. Н.[1], Мардонов Дж. О.[2]

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
[1]Sattorov@rambler.ru;
[2]mardonov-jolgosh@mail.ru

Пусть R^3- вещественное трехмерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (x_1, x_2),\ y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'| = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,\ \ r^2 = s + (y_3 - x_3)^2 = |y - x|^2,$$

$\Omega-$ ограниченная область в R^3, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из плоскости $y_3 = 0$(обозначим через T) и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 > 0, \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega, \partial\Omega = T \cup S$, обозначим. $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))-$ лапласово векторное поле в Ω , краевое значение $\varphi(x)$ непрерывной по Гельдеру.

Постановка задачи (з а д а ч а К о ш и). Известны данные Коши решения системы ([1], с. 136-139)

$$\Delta F(x) = 0, x \in \Omega, \tag{1}$$

$$rot F(x) = 0, x \in \Omega \tag{2}$$

на поверхности S :

$$F(y) = \varphi(y), y \in S, \tag{3}$$

где $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y))-$ заданная на S непрерывная вектор-функция по Гельдеру. Требуется восстановить лапласово поле $F(x)$ в Ω, исходя из заданной φ, т. е. решить задачу аналитического продолжения в трехмерном евклидовом пространственной ограниченной области по ее значениям на гладком куске S границы.

Задача Коши для системы уравнений (1), как и многие задачи Коши для нахождения регулярных решений эллиптических уравнений и систем, в общем случае оказывается неустойчивой относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эта задача некорректно поставлены ([2], с.39).

ЛИТЕРАТУРА

1.Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей,Наука, М, 1984. - С. 136-139.

2. Ж.Адамар, Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, Наука, М, 1978. - С. 38-70.

ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУКТУРНО- НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН (ОБОЛОЧЕК), ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СРЕДОЙ

Сафаров И.И.[1], Алмуратов Ш.Н.[1], Аблокулов Ш.З.[1], Ахмедов М.Ш.[2], Умаров А.О.[2]

[1] Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан, safarov54@mail.ru;

[2] Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан, maqsud.axmedov.1985@mail.ru.

Рассматриваются колебания диссипативно- неоднородных многослойных оболочек (пластин), взаимодействующих со средой. Рассматривая колебания трехслойной пластины, связанной с упругим инерционным основанием Винклера составляются уравнения движения. Частотное уравнение решена методом Мюллера. Результаты показывают, что наличие внешней среды практически не влияет на частоты крутильных колебаний. Частота крутильных колебаний ограничена (постоянна), при высоких частотах и жестких средах она резко возрастает.

В промышленности слоистые конструкции используются в качестве элементов корпусов космических и авиационных аппаратов, строительных панелей, электронных плат, машиностроительных элементов и др. Колебания трехслойных тел в диссипативно-однородном случае, рассмотрены в работах.

Рассмотрим колебания диссипативно- неоднородных трчхслойных (или двухслойных) оболочек (или пластин), взаимодействующих со средой. Уравнения движения получены используя принцип Эйлера-Лагранжа. Ставятся граничные условия жесткого закрепления.

В слоях трехслойного пластинчатого (или цилиндрического) тела напряжения с деформациями связаны законом Гука.

На внешние поверхности пластинок воздействует распределенная сила и реакция среды.

Задача определения неизвестных функций перемещений замыкается присоединением к системе уравнений краевых условий.

Для получения решения воспользуемся методом Бубнова - Галеркина. При решении системы (при собственных колебаниях) применим метод замораживания. Тогда вместо системы уравнений в частных производных, содержащие интегралы, получим систему уравнений в полных дифференциалах с комплексными коэффициентами

При собственных колебаниях решение ищется в виде экспоненциальной функции от чисто мнимого аргумента. При исследовании затухающих колебаний в упругих однородных слоистых средах определяются частоты. Для этого составлено уравнение частот (трансцендентное уравнение). Для вычисления корней трансцендентного уравнения с комплексными параметрами применяли метод Мюллера. Для расчета коэффициентов затухания и действительных частей частот составлена программа на языке C^{++}. Задача приведена к задаче определения собственных чисел.

Собственные векторы вычисляются по найденным частотам. Рассмотрим колебания трехслойной пластины, связанной с упругим инерционным основанием Винклера с учетом вязких свойства взаимодействия основания с пластинчатой системой.

Численные результаты получены для свободно опирающейся трехслойной цилиндрической оболочки (Д16Т-фторопласт), находящейся в безынерционной среде Винклера.

За ядра релаксации принимали трехпараметрическое ядро Ржаницына -Колтунова. Корни частотного уравнения определяются методом Мюллера. За начальное приближение выбирали частоты собственных колебаний упругой системы.

Результаты расчетов, когда не учитываются реологические свойства материалов (для упругих механических систем), сравниваются с результатами, полученными Д.В. Леоненко. Результаты отличаются с разницей до 10 %. Результаты показывают, что наличие внешней среды практически не влияет на частоты крутильных колебаний. Частота крутильных колебаний ограничена (постоянна), при высоких частотах и жестких средах она резко возрастает.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Сафаров Ж. Ш.

Институт Математики имени В.И Романовского АН РУз, Ташкент,Узбекистан
j.safarov65@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \int\limits_0^t k(t-\theta)u(x,\theta)\,d\theta, \qquad x \in (0,l), t > 0 \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = \delta'(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

Здесь $\delta'(t)-$ производная дельта функции Дирака. В обратной задаче требуется найти функцию $k(t) \in C(0,\infty)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) известно дополнительная информация:

$$u(0,t) = f(t), \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

Определение. *Функция $k(t) \in C[0,\infty)$ (из класса непрерывных функций) называется решением обратной задачи (1)-(4), если соответствующее ей решение задачи (1)-(3) $u(x,t) \in D'(D)$ (из класса обобщенных функции) удовлетворяет условию (4) при $f(t) \in D'[0,\infty)$.*

В обратных задачах имеются теоремы существования и единственности для достаточно малых областей определения неизвестных коэффициентов, т.е. для таких задач разрешимость носит локальный характер. Связанно это явление с нелинейностью задачи.Однако в задачах определения ядра интегрального члена в гиперболических уравнениях второго порядка, где нелинейность носит сверточный характер, удается получить глобальные теоремы существования в пространстве непрерывных функций с экспоненциальным весом. С современным состоянием теории обратных задач для гиперболических уравнений можно ознакомиться в [1].

Основным результатом данной работы является следующая теорема глобальной, однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены условия*

$$\widetilde{f}(t) \in C^2(0,l), \;\; \widetilde{f}(+0) = 0 \;\; \widetilde{f}'(+0) = 0,$$

тогда для любого фиксированного $l > 0$, *существует единственное решение обратной задачи (1)-(4) и* $k(t) \in C(0,2l)$.

Здесь функция $\widetilde{f}(t)$ связана с функцией $f(t)$ формулой $f(t) = -\delta(t) + H(t)\widetilde{f}(t)$, где $\widetilde{f}(t)-$регулярная функция, $H(t)-$ функция Хевисайда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последействиями. Ташкент: Турон-икбол, 2014.

О СПЕКТРЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Суяров Т.Р.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
tsuyarov996@gmail.com;

Исследуется линейная устойчивость аналога течения Пуазейля сдвиговое течение в бесконечном плоском канале для случая несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, рассматривается базовая реологическая модель Покровского-Виноградова.

$$div\mathbf{u} = u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

.

$$\frac{du}{dt} + p_x = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{(a_{11})_x + (a_{12})_y\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dt} + p_y = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{(a_{12})_x + (a_{22})_y\right\}. \tag{3}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1u_x - 2a_{12}u_y + K_Ia_{11} = -\beta\left(a_{11}^2 + a_{22}^2\right), \tag{4}$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1v_x - A_2u_y + \tilde{K}_Ia_{12} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2v_y - 2a_{12}v_x + K_Ia_{22} = -\beta\left(a_{12}^2 + a_{22}^2\right), \tag{6}$$

В область G

$$G = \left\{(t,x,y) \mid t > 0, (x,y) \in \prod = \{(x,y)||x| < \infty, 0 < y < 1\}\right\},$$

необходимо найти решение линейной системы,

$$U_t + \hat{B}U_x + \hat{C}U_y + \hat{R}U + F = 0, \tag{7}$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\sigma_{xx} + 2\,(a_{12})_{xy}\right\} - 2\hat{\omega}v_x. \tag{8}$$

При выполнении краевые условия в границах области G

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0, \tag{9}$$

$$\Omega_y = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(a_{12})_x \ \text{ при } \quad y = 0, 1; \tag{10}$$

$$\|U(t,x,y)\| = (U,U)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad p(t,x,y) \to 0, p_x(t,x,y) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty \tag{11}$$

и начальные данные

$$U|_{t=0} = U_0(x,y), \quad p|_{t=0} = p_0(x,y). \tag{12}$$

Теперь применения преобразования Фурье по переменной x,

Система (6) преобразуется следующим образом:

$$U_t + \tilde{C}U_y + (-i\xi\tilde{B} + \hat{R})U + F = 0, \quad 0 < y < 1, \tag{13}$$

Исследуется поведение спектра при возрастании по модулю параметра, двойственного при преобразовании Фурье по отношению к переменной, меняющейся вдоль стороны канала. И определена спектра иметь следуюшие вид:

$$s = i\xi\hat{u} + \sqrt[3]{Q(y)}\xi^{\frac{2}{3}} + R(y)\xi^{\frac{1}{3}} + \dots \tag{14}$$

Замечание 4. Суть разложения (13) заключается в следующем: $|\xi| \longrightarrow \infty$ хотя бы для одного корня $Res \longrightarrow \infty$ Следовательно, основным решением нашей смешанной задачи является линейная неустойчивость.

В работе рассмотрена о спектре задачи для системы интегро-диффе-ренциальных уравнений. Для базовой модели Покровского-Виноградова исследована линейная устойчивость аналога течения Пуазейля, характеризующего течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в плоском бесконечном канале.Найдено экспоненциальное решение возрастающей по времени формы амплитуды, гарантирующее линейную неустойчивость выбранного базового решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтухов Ю.А., Головичева И.Э., Пышнограй Г.В. Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент // Известия РАН. Механ. жидкости и газа. 2000.

2. Блохин А.М., Бамбаева Н.В. Нахождение решений типа Пуазейля и Куэтта для уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Вестник НГУ, Серия: матем. механ. информатика. 2011.

3. Владимиров В.С. Обобшенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ.

Туракулов Х. Ш.

Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,

e-mail1: hamidtsh87@gmail.com.

В данной работе с использованием результатов работ [1-3] изучаются однозначная разрешимость обобшенного решения одной периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области.
В области

$$Q = (-1,1) \times (0,T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа . Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.
Периодическая краевая задача. Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$D_x^p\, u|_{x=-1} = D_x^p\, u|_{x=1}\,, \tag{3}$$

при $p = 0,1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.
Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3). Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q_1)}\, d\lambda, \tag{A}$$

где $W_2^l(Q_1)$ пространства Соболева, $s,l-$ любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\le l} \int\limits_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2\, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$есть обобщенная производная по переменними x и t, а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье, функции $u(x,t,z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Цыбиков.Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа.// В. кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск,1986, С.201–206.

2.Dzhamalov Z.S A nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional equation of mixed type of the first kind,// Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria: Fiziko-matematicheskie nauki,2017,T.21,No 4, P.1–14.

3.Джамалов.С.З., Ашуров.Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве.// Казахский математ журнал,2015,Т.18,№2, С.59–70.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ТОЧЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

Тешаев М.Х.[1], Райимов Д.Г.[2], Авезов А.[3], Хомидов Ф.Ф.[2], Жалолов Ф.Б.[4]

[1]Институт Математики им. В.И.Романовского

[2]Бухарский инженерно-технологический институт

[3]Бухарский государственный университет

[4]Бухарский филиал Ташкентского института ирригации и механизации сельского хозяйства

Рассматриваются установившиеся и неустановившиеся колебания вязкоупругих систем, образованных из конечного числа вязкоупругих тел (пластинчатых или оболочечных), имеющих внутренние связи и сосредоточенные массы. Дана постановка задач о вынужденных колебаниях вязкоупругой прямоугольной пластины с точечными связями. Обсуждены методика решения и алгоритм. Приведены численные результаты и обоснована их достоверность.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях для класса тонкостенных деформируемых тел. За точечные связи принимаем точечные опоры (упругие, жесткие или вязкоупругие) шарнирного или защемленного типа, а также стойки, соединяющие элементы системы между собой. Расположение сосредоточенных масс и точечных связей произвольное. Элементы системы могут быть как вязкоупругими, так и упругими. На краях элементов ставятся ограничения в виде шарнирных опор или защемленного края. Рассматривается случай, когда действующие на систему вынуждающие силы гармонические. Требуется определить амплитудно- частотные характеристики системы.

Предположим, что внешние силы, приложенные к n-му телу, имеют разные амплитуды, но одинаковые частоты. Тогда закон их изменения может быть записан в виде экспоненциальной функции от мнимого переменного аргумента.

Для описания релаксационных процессов, происходящих в точечных связях или вязкоупругих элементах системы, примем линейную наследственную теорию Больцмана - Вольтерры.

Здесь, в отличие от задач о собственных колебаниях, малость функции релаксации ядра, не предполагается. Коэффициент Пуассона принимается постоянным ($v = const$).

Для вывода уравнений движения используем принцип Эйлера-Лагранжа Закон установившихся колебаний n-го элемента ищется в виде экспоненциальной функции от мнимого переменного аргумента.

Вариационное уравнение преобразуем, выражая деформации через компоненты вектора перемещений.

Точечные связи, как и в задаче о собственных колебаниях, вносятся под знак вариации, используя метод множителей связей (Лагранжа).

Решение уравнений движения ищем как суперпозиции фундаментальных базисных ортогональных функций. Для элементов, свободных от сосредоточенных масс, и всех точечных связей (опор, стоек) они предполагаются известными. Тогда, в качестве искомого поля перемещений, удовлетворяющего заданным однородным граничным условиям, и вариационному уравнению примем конечную сумму этих фундаментальных базисных ортогональных функций.

Полученная система решена методом Гаусса. Уравнения движения имеют комплексные коэффициенты, поэтому программу, реализующую алгоритм, составили для систем с комплексными коэффициентами и комплексными неизвестными.

Рассмотрена задача система из двух квадратных упругих пластинок, соединенных невесомым одним вязкоупругим амортизатором в центре. На обеих пластинках имеется по одной присоединенной массе. Пластинки одинаковы по геометрическим и механическим параметрам, шарнирно оперты по контуру. Максимум скачка амплитуды из-за диссипативных свойств конструкции несколько смещен влево от собственной (и, следовательно, внешней возмущающей) частоты. Проанализировали графики поведения амплитуд. По сравнению со вторым, в случае первого резонанса, резонансные амплитуды центральных точек обеих пластин принимают большие значения.

Резонансные амплитуды центральных точек обеих пластин принимали большие значения по сравнению со вторым, в случае первого резонанса. Это объясняется тем, что приложенные к пластинам внешние нагрузки находятся в одной фазе колебаний при первом резонансе. Первый резонанс пластин играет роль определителя фазы колебаний друг друга и наблюдается, когда колебания обеих пластин совпадают по фазе (с равными или разными амплитудами), а второй резонанс наблюдается, когда колебания пластин происходят в противофазе (сдвиг на период).

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Турдиев Х.Х.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
hturdiev@mail.ru

Рассмотрим двумерную систему уравнений Максвелла [1]

$$\begin{cases} \epsilon\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + (\varphi_0 + \sigma) E_2 + \int\limits_0^t \varphi'(t-\tau) E_2(x_1, x_3, \tau) d\tau + J_2 = 0, \\ \mu\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \psi_0 H_1 + \int\limits_0^t \psi'(t-\tau) H_1(x_1, x_3, \tau) d\tau = 0, \\ \mu\frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \psi_0 H_3 + \int\limits_0^t \psi'(t-\tau) H_3(x_1, x_3, \tau) d\tau = 0, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$ напряженности электрического и магнитного полей, $\varphi(t)$, $\psi(t)-$ представляющие память, $J(x_1, x_3, t) = (0, J_2, 0)-$ вектор-функция, ϵ и μ будем предполагать положительно-определенными симметрическими матрицы, зависящими только от координаты x_3, $\sigma = \sigma(x_3)$ - матрица, $\varphi_0 = \varphi(0)$, $\psi_0 = \psi(0)$.

В дальнейшем в (1) введем функции [2]

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\epsilon}E_2 + \sqrt{\mu}H_1\right), \ U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\epsilon}E_2 - \sqrt{\mu}H_1\right), \ U_3 = \sqrt{\mu}H_3.$$

Тогда система уравнений (1) записывается в следующем каноническим виде:

$$\left(A_0\frac{\partial}{\partial t}+A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial}{\partial x_3}+A_3\right)U=\int\limits_0^t\widetilde{K}(x_3,\tau)U(x,t-\tau)d\tau+\widehat{J}(x_1,x_3,t). \tag{2}$$

Здесь $U=(U_1,U_2,U_3)^*-$ вектор - столбец,

$$A_0=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} & \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} & 0\\ \sqrt{\frac{\mu}{2}} & -\sqrt{\frac{\mu}{2}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} & \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} & 0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2\mu}} & \frac{1}{\sqrt{2\mu}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} & -\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}\frac{\varphi_0+\sigma}{\sqrt{2\epsilon}}+\frac{\mu'}{2\sqrt{2}\mu^{\frac{3}{2}}} & \frac{\varphi_0+\sigma}{\sqrt{2\epsilon}}-\frac{\mu'}{2\sqrt{2}\mu^{\frac{3}{2}}} & 0\\ \frac{\psi_0}{\sqrt{2\mu}}+\frac{\epsilon'}{2\sqrt{2}\epsilon^{\frac{3}{2}}} & -\frac{\psi_0}{\sqrt{2\mu}}+\frac{\epsilon'}{2\sqrt{2}\epsilon^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\psi_0}{\sqrt{\mu}}\end{pmatrix},\quad \widetilde{K}(x_3,t)=-\begin{pmatrix}\frac{\varphi'}{\sqrt{2\epsilon}} & \frac{\varphi'}{\sqrt{2\epsilon}} & 0\\ \frac{\psi'}{\sqrt{2\mu}} & -\frac{\psi'}{\sqrt{2\mu}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\psi'}{\sqrt{\mu}}\end{pmatrix},$$

$\widehat{J}=(0,J_2,0)$, $*-$ символ транспонирования.

Умножая слева на обратную матрицу A_0^{-1} уравнение (2), получим

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial}{\partial x_3}+B_3\right)U=\int\limits_0^t\overline{K}(x_3,\tau)U(x,t-\tau)d\tau+\overline{J}(x_1,x_3,t). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем I_3 означает единичную матрицу, $B_j=A_0^{-1}A_j$, $j=1,3$,

$$B_2=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\Lambda_0,\ \ \Lambda_0=diag(-1,1,0),\ \ \overline{J}=A_0^{-1}\widehat{J},\ \ \overline{K}(x_3,t)=A_0^{-1}\widetilde{K}(x_3,t).$$

Введчм новыю переменную z с помощью формулы

$$z=\theta(x_3)=\int\limits_0^{x_3}\sqrt{\epsilon(\xi)\mu(\xi)}d\xi. \tag{4}$$

где $V(x_1,z,t):=U(x_1,\theta^{-1}(z),t)$, $J(x_1,z,t):=\overline{J}(x_1,\theta^{-1}(z),t)$, $C_i(z):=B_i(\theta^{-1}(z))$, $K(z,t):=\overline{K}(\theta^{-1}(z),t)=(k_{ij})_{i,j=1}^3$, $\theta^{-1}(z)$ функцию, обратную к $\theta(x_3)$.

Тогда система (3) принимает вид

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C_1\frac{\partial}{\partial x_1}+C_2\right)V=\int\limits_0^t K(z,\tau)V(x_1,z,t-\tau)d\tau+J(x_1,z,t). \tag{5}$$

В прямой задаче при заданных матриц K, C_1, C_2, и вектор-функции J требуется определить в области $D=\{(x_1,z,t):0<z<L,\ t>0,\ x_1\in\mathbb{R}\}$ вектор функцию $V(z,t)$, удовлетворяющую уравнению (5) при следующих начальных и граничных условиях:

$$V_i(x_1,z,t)\big|_{t=0}=\phi_i(x_1,z),\ \ i=\overline{1,3}, \tag{6}$$

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=L}=g_1(x_1,t);\ V_2(x_1,z,t)|_{z=0}=g_2(x_1,t), \tag{7}$$

где $\phi(x_1,z) = (\phi_1,\phi_2,\phi_3)\,(x_1,z)$ и $g(x_1,t) = (g_1,g_2)\,(x_1,t)$ заданные функции.

Обратную задачу поставим следующем образом: найти функции $\varphi(t),\ \psi(t),\ t>0$, входящие в матрицу K, если относительно решения задачи (5)-(5) известны дополнительные условия

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=0} = h_1(x_1,t),\ V_2(x_1,z,t)|_{z=L} = h_2(x_1,t). \tag{8}$$

При этом $\varphi_i(0)$ и $\psi_i(0)$ считаются заданными.

Пусть функции $J(x_1,z,t),\ \phi_i(x_1,z),\ g_i(x_1,t)$ входящие в правую часть (5) и данные (6), (7) финитны по x_1 при каждом фиксированном z,t [3]. Более точно, мы ограничимся изучением образа Фурье по переменным x_1 решения. Обозначим $\widetilde{V}(\eta,z,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} V(x_1,z,t)e^{i\eta x_1}dx_1$, где $\eta-$ параметры преобразования. Фиксируем η и для удобства, введем обозначение $\widetilde{V}(\eta,z,t) = \widetilde{V}(z,t)$.

Пусть $\Omega = \{(z,t) : 0<z<L,\ t>0\}$ проекция области D на плоскость переменных $z,\ t$. В терминах функции $\widetilde{V}$ задачу (5)-(7) запишем в виде

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial z} + C(\eta,z)\right)\widetilde{V} = \int\limits_0^t K(z,\tau)\widetilde{V}(\eta,z,t-\tau)d\tau + \widetilde{J}(\eta,z,t) \tag{9}$$

$$\widetilde{V}_i\Big|_{t=0} \equiv \widetilde{\phi}_i(z),\ i=1,2,3, \tag{10}$$

$$\widetilde{V}_1|_{z=L} = \widetilde{g}_1(t),\ \widetilde{V}_2|_{z=0} = \widetilde{g}_2(t), \tag{11}$$

и дополнительные условия (8)

$$\widetilde{V}_1|_{z=0} = \widetilde{h}_1(t),\ \widetilde{V}_2|_{z=L} = \widetilde{h}_2(t). \tag{12}$$

Пусть выполнены условия

$$\widetilde{\phi}_1(L) = \widetilde{g}_1(0),\ \widetilde{\phi}_2(0) = \widetilde{g}_2(0),\ \widetilde{J}_1(L,0) - \gamma_1\left[\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_1(z)\right]_{z=L} - \sum_{j=1}^{3} c_{1j}(L)\widetilde{\phi}_j(L) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{g}_1(t)\right]_{t=0},$$

$$\widetilde{J}_2(0,0) - \gamma_2\left[\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_2(z)\right]_{z=0} - \sum_{j=1}^{3} c_{2j}(0)\widetilde{\phi}_j(0) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{g}_2(t)\right]_{t=0}. \tag{13}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\hat{\varepsilon}(x_3) \in C^1[0,\infty)$, $\hat{\mu}(x_3) \in C^1[0,\infty)$, кроме того

$$\widetilde{\phi}(z) \in C^2\,[0,\ L]\,,\ \widetilde{g}(t) \in C^2\,[0,L]\,,\ \widetilde{h}(t) \in C^2[0,L],\ \widetilde{J}(z,t) \in C^2\,(\Omega_0)\,,$$

выполнены условие $\widetilde{\phi}_1(0)\widetilde{\phi}_1(L) \neq \widetilde{\phi}_2(0)\widetilde{\phi}_2(L)$ и условия согласования (13). Тогда для любого $L>0$ на отрезке $\left[0,L\right]$ существует единственное решение обратной задачи (9)-(11), (12) из класса $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C^1\left[0,L\right]$,
где

$$\Omega_0 := \{(z,t) : 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le L\}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурдиев Д. К. Обратные задачи для сред с последействием. Ташкент. "Turon-Iqbol 2014. с.240
2. Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П. Обратные задачи электродинамики. Город.: Выч. центр СО АН СССР. Новосибирск 1984.
3. Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х. Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. N: 12. С. 1666-1675.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА 3-ГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СМЕШАННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов М.Х.

Наманганский государственный университет, г. Наманган, Узбекистан,
Maqsadjon6290126@gmail.com

Аналоги задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка вырождающегося внутри области изучены в работах [1-2].

В данной работе изучается краевая задача с условием Геллерстедта на непараллельных характеристиках для уравнения параболо-гиперболического типа 3-го порядка с вырождением в гиперболической части смешанной области.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(Lu) = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y\,, & (x;y) \in D_1, \\ xu_{xx} + (-x)^n u_{yy} + \alpha u_x\,, & (x;y) \in D_2, \end{cases} \tag{2}$$

здесь α, $n = const$, причем

$$n > 1, \quad (1-n)/2 < \alpha < 1, \tag{3}$$

а D_1- область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно; D_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси $y-$ OB и двумя характеристиками

$$AC : y - \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}} = 0, \qquad A_0C : y + \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $A_0(0,1)$, пересекающимися в точке $C\left(-\left((n+1)/2\right)^{2/(n+1)}\ ;\ 0,5\right)$.

Введем обозначения: $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, $D_1 = D \cap (x > 0,\, y > 0)$,
$D_2 = D \cap (x < 0,\, y > 0)$, $J = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < 1\}$, $E(0,y_0) \in J$,
$EC_1 : y + \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}} = y_0$, $EC_2 : y - \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}} = y_0$, $C_1 \in AC$, $C_2 \in A_0C$.

В области D для уравнения (1) изучим следующую задачу.

Задача Γ_2. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях D_1 и D_2;
3) u_x, u_y непрерывны вплоть до AC;

4) на J выполняется условие склеивания $\lim\limits_{x\to -0}(-x)^{\alpha}u_x(x,y)=\lim\limits_{x\to +0}u_x(x,y)$ равно-мерно при $0<y<1$,

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AB}=\varphi_1(x),\ u(x,y)|_{A_0B_0}=\varphi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_3(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(x,y)|_{EC_1}=\psi_1(y),\quad \frac{y_0}{2}\leqslant y\leqslant y_0;$$

$$u(x,y)|_{EC_2}=\psi_2(y),\quad y_0\leqslant y\leqslant \frac{y_0+1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3(y),\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2},$$

где $n-$ внутренняя нормаль, $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(y),\ \psi_i(y)\ (i=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем $\psi_1\left(y_0\right)=\psi_2\left(y_0\right),\varphi_3\left(0\right)=\varphi_1\left(1\right),\varphi_3\left(1\right)=\varphi_2\left(1\right),$

$$\psi_1(y)\in C^2\left[\frac{y_0}{2};y_0\right]\cap C^4\left(\frac{y_0}{2};y_0\right),\quad \psi_2(y)\in C^2\left[y_0;\frac{y_0+1}{2}\right]\cap C^4\left(y_0;\frac{y_0+1}{2}\right),\tag{4}$$

$$\psi_3\left(x\right)\in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right),\ \varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1),\tag{5}$$

$$\varphi_3(y)\in C\left(\bar{J}\right)\cap C^1(J).\tag{6}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3), (4), (5) и (6), то в области D существует единственное регулярное решение задачи Γ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Исломов Б.И., Мадрахимова З.С.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка вырождающегося внутри области. // Доклады АН РУз. Ташкент, 2009. є5. С. 15-18.

2.*Исломов Б.И., Мадрахимова З.С.* Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором .// Узбекский математичес-кий журнал. Ташкент, 2009. є4. С.76-81.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Турсунов Ф. Р.[1], Шодиев Д. С.[2], Раззаков Ж. Д.[3]

[1,2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

[1]farhod.tursunov.76@mail.ru;

[2]dilshod.shodiev.76@mail.ru;

[3]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

Работа посвящена изучению продолжения решения задачи Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. В работе при помощи функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама бигармоническая функция, но и ее производные и получена оценка условной устойчивости.

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ и G- ограниченная односвязная область в R^2 с границей ∂G, состоящей из компактной части $T = \{y_1 \in R: \ a_1 \le y_1 \le b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S: y_2 = h(y_1)$, лежащей в полуплоскости $y_2 > 0$. $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$.

В области G рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0, \ \ y \in G, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.:

$$\begin{gathered} U(y_1, y_2)|_S = f_1(y), \ \ \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_2(y), \\ \left.\frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial n}\right|_S = f_3(y), \ \ \left.\frac{\partial(\Delta U(y_1, y_2))}{\partial n}\right|_S = f_4(y), \end{gathered} \tag{2}$$

здесь $f_j(y) \in C^{j-1}(S), j = 1, 2, 3, 4$ - заданные функции, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и его производный $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \ x \in G, \ i = 1, 2$ [3],[4]. В данной работе предлагается алгоритм построения приближенного решения, и производные приближенных решений т.е. $U(x, \sigma, f_{k\delta}) = U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}, \ k = 1, 2, 3, 4; \ i = 1, 2$ зависящих от параметра σ и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \to 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta})$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i}, \ i = 1, 2$ с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [1].

Для построения приближенного решения воспользуем функцией Карлемана предложенной Ш. Ярмухамедовым [2]:

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2}\right] \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}. \tag{3}$$

В работе [2] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y), \tag{4}$$

где $F(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \ G_\sigma(x, y)$- гармоническая функция по y в R^2 включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$для любого $\sigma > 0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x, y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [1].

Для функции $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ и любого $x \in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [5]:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial \left(\Delta L(x,y) \right)}{\partial n} - \Delta L(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L(x,y)}{\partial n} - L(x,y) \frac{\partial \left(\Delta U(y) \right)}{\partial n} \right] dS_y, \; x \in G, \tag{5}$$

где $L(x,y) = r^2 \ln \frac{1}{r}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (4), тогда в интегральное представление (5) $L(x,y)$ заменяя на функцию $L_\sigma(x,y) = r^2 \Phi_\sigma(x,y)$, имеем:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial \left(\Delta L_\sigma(x,y) \right)}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - L_\sigma(x,y) \frac{\partial \left(\Delta U(y) \right)}{\partial n} \right] dS_y, \;\; x \in G. \tag{6}$$

Основной результат настоящей работе является полученые оценки отклонения производных первого порядка приближенного решения от производных точного решения.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Хасанову Акназару Бекдурдиевичу за постановки задач и полезными советами при решение задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. //Изд. СО АН СССР, Новосибирск,1962.

2. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши.// Математические заметки, 83:5, (2008), 763-778.

3. А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Уфимский матем. журнал, 11:4, (2019),92-106.

4. А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, N 2,(2021), 56-73.

5. И.Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений.// ОГИЗ Государственное издательство техника -теоретической литературы. Москва. 1948.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА НАГРУЖЕННАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖИТ СЛЕД ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Узбеков Ж.А.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
ozbekovjorabek@gmail.com

Трехмерные аналоги задачи Трикоми и Геллерстедта для уравнения эллиптико-гиперболического изучены в работах [1-3].

Локальные и нелокальные задачи для параболо-гиперболического уравнения с общими нагруженными слагаемыми в двухмерных областях рассмотрены в работах [4-7].

Насколько нам известно, что трехмерные краевые задачи для нагруженного урав-нения смешанного типа ранее мало изучены. Отметим работы [8-9].

В настоящей работе в бесконечной цилиндрической области изучается аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа, когда нагружен-ная часть уравнения содержит след оператора дробного порядка.

Пусть Ω- трехмерная область, ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_k:\ x=k,\ 0\leqslant y\leqslant h,\ \ z\in R,\ k=0,1,\ \ R=(-\infty,+\infty),\ \Gamma_2:\ y=h,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ z\in R,$$

$$\Gamma_3:\ \ x+y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\ z\in R,\ \Gamma_4:\ \ x-y=1,\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ z\in R.$$

Введем обозначения: $I_0=\{(x,y,z):\ \ 0<x<1,\ y=0,\ \ z\in R\}$,

$$I_1=\{(x,y,z):\ \ 0<x<x_0, y=0,\ z\in R\},\ I_2=\{(x,y,z):\ x_0<x<1,\ y=0,\ z\in R\},$$

$$\Gamma_{31}:\ \ x+y=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant\frac{x_0}{2},\ \ z\in R,\ \Gamma_{41}:\ \ x-y=x_0,\ \ \frac{x_0}{2}\leqslant x\leqslant x_0,\ \ z\in R,$$

$$\Gamma_{32}:\ x+y=x_0,\ x_0\leqslant x\leqslant\frac{1+x_0}{2},\ z\in R,\ \ \Gamma_{42}:\ x-y=1,\ \frac{1+x_0}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ z\in R,$$

$$(x_0,0,z)\in I_0,\ h>0, A_1(0,0,z)=\bar\Gamma_0\cap\bar\Gamma_3,\ \ A_2(1,0,z)=\bar\Gamma_1\cap\bar\Gamma_4,$$

$$A_3(1,h,z)=\bar\Gamma_1\cap\bar\Gamma_2,\ A_4(0,h,z)=\bar\Gamma_0\cap\bar\Gamma_2, C_0\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},z\right)=\bar\Gamma_3\cap\bar\Gamma_4,$$

$$C_1\left(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2},z\right)=\bar\Gamma_{31}\cap\bar\Gamma_{41},\ \ C_2\left(\frac{1+x_0}{2},\frac{x_0-1}{2},z\right)=\bar\Gamma_{32}\cap\bar\Gamma_{42},$$

$$E(x_0,0,z)=\bar\Gamma_{41}\cap\bar\Gamma_{32},\ \Omega_1=\Omega\cap\{(x,y,z):x>0,y>0,\ z\in R\}=\square A_1A_2A_3A_4,$$

$$\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y,z):0<x<x_0,\ \ -x<y<x-x_0,\ \ z\in R\}=\Delta A_1C_1E,$$

$$\Omega_3=\Omega\cap\{(x,y,z):x_0<x<1,\ x_0-x<y<x-1,\ z\in R\}=\Delta EC_2A_2,$$

$$\Omega_4=\square C_1C_0C_2E.$$

Для уравнения

$$0=\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}+\mu\,D_{0x}^{-\alpha}U\,(x,0,z) & \text{в}\,\Omega_1,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}+\mu\,D_{0x}^{-\beta}U\,(x,0,z) & \text{в}\,\Omega_2\end{cases}\tag{1}$$

в области Ω будем изучать аналог задачи Геллерстедта, где μ- любая действительная постоянная, причем $\mu<0$, а $D_{0x}^{-\gamma}\,(\gamma=\alpha,\beta)-$ оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля [6]) интегрирования порядка γ, при $0<\gamma<1$.

Задача АГ. Найти функцию $U\,(x,y,z)$ со следующими свойствами: 1) $U(x,y,z)$ функция непрерывна вплоть до границы области Ω; 2) $U\,(x,y,z)\in C^1\,(\Omega\cup\Gamma_{31}\cup\Gamma_{32})$, причем $U_x\,(x,y,z)$ и $U_y\,(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в линиях A_1, A_2, A_4 и E; 3) $U\,(x,y,z)\in C^{2,1,2}_{x,y,z}\,(\Omega_1)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\,(\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4)$ и удовлетворяет уравнению (1)в областях $\Omega_j\,(j=1,2)$; 4)$U(x,y,z)$ удовлетворяет усло-виям

$$U|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),\quad U|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\quad 0\leqslant y\leqslant h,\ \ z\in R,$$

$$U|_{\Gamma_{31}}=\Psi_1(x,z),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{x_0}{2},\quad z\in R,$$

$$U|_{\Gamma_{32}} = \Psi_2(x,z), \quad x_0 \leqslant x \leqslant \frac{x_0+1}{2}, \quad z \in R,$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U = \lim_{|z|\to\infty} U_x = \lim_{|z|\to\infty} U_y = \lim_{|z|\to\infty} U_z = 0,$$

где $\Phi_0(y,z),\ \Phi_1(y,z),\ \Psi_1(x,z),\ \Psi_2(x,z)$– заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\Phi_0(0,z) = \Psi_1(0,z),\ \lim_{|z|\to\infty} \Phi_j(y,z) = 0,\ (j=0,1)\,, \quad \lim_{|z|\to\infty} \Psi_l(x,z) = 0,\ (l=1,2).$$

Основным методом исследования задачи $A\Gamma$ является преобразование Фурье [8-9]. На основании преобразование Фурье при определенных ограничениях на заданные функции доказывается однозначная разрешимость задачи $A\Gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Бицадзе А.В.* Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми. // "Сибирский математический журнал".1962. Т. III. С. 642–644.

2.*Нахушев А.М.* Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта.// "Дифференциальные уравнения".1968. Т. 4. є 1. С. 52–62.

3.*Салахитдинов М.С., Исломов Б.И.* О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнений смешанного типа.// "Доклады АН СССР". 1990. Т. 311. є 4 С. 797–801.

4.*Исломов Б.И., Курязов Д.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравне-ния второго порядка.// ДАН РУз. 1996. є 1-2. С. 3-6.

5.*Kishin B.S. and Abdullaev O.Kh.* About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives.// International Journal of Differential Equations. 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.

6.*Islomov B., Baltaeva U. I.* Boundary value problems for the classical and mixed integrodifferential equations with Riemann-Liouville operators. (English).// Int. J. Partial Differ. Equ. 2013. Article ID 157947. 7 p. (2013).

7.*Дженалиев Н.Т.* Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными и граничными условиями. // "Дифференциаль-ные уравнения". 1991. Т. 27. є 10. С. 1925-1927.

8.*Islomov B.I., Yuldashev T.K., Alikulov E. K.* Boundary-Value Problems for Loaded Third-Order Parabolic-Hyperbolic Equations in Infinite Three-Dimensional Domains.// Labachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. є 5. pp. 926–944.

9.*Islomov B.I., Alikulov E. K.* Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimen-sional domain (English).// International Journal of Applied Mathematics (IJAM). 2021. V.34. є. 2. pp.377. 2021. Vol. 34. No 2. pp. 377–390.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ SH ВОЛН В ПОРИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Умаров И., Янгибоев З.Ш.[1] Шобердиев Б.З.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
[1]zoyiry@mail.ru

Рассмотрим относительно функций $u\,(x,y,t)\,,\ v\,(x,y,t)$ в полупространстве $G = R_+^2 \times R,\ R_+^2 = \{(x,y) \in R^2\,|\,y>0\}$ систему дифференциальных уравнений [1-3]

$$\rho_s u_{tt} = (\mu u_x)_x + (\mu u_y)_y - b\rho_l\,(u_t - v_t)\,,\ (x,y,t) \in G, \tag{1}$$

$$\rho_l v_{tt} = b\rho_l\left(u_t - v_t\right), \ \ (x,y,t) \in G, \tag{2}$$

в котором коэффициенты $\mu = \mu(y)$, $\rho_s = \rho_s(y)$ являются положительными функциями класса $C^2(R_+)$, $b = \chi\rho_l$, $\chi = \chi(y)$, $\rho_l = \rho_l(y)$ являются положительными функциями класса $C^1(R_+)$. Пусть функции $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, кроме (1), (2), удовлетворяют следующим начальным и граничным условиям:

$$v|_{t<0} \equiv 0, \ u|_{t<0} \equiv 0, \quad \mu u_y|_{y=0} = f(t)\,\delta(x), \ \ (f(t) \equiv 0, \ t < 0). \tag{3}$$

При заданных функциях $b(y)$, $\mu(y)$, $\rho_s(y)$, $f(t)$ задача (1)-(3) корректна и определяет функции $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, обладающие компактными носителями при любом конечном t. В приложениях, например, в геофизике, представляет интерес задача об определении структуры среды (в данном случае функций $b(y)$, $\mu(y)$, $\rho_s(y)$) по измеренным на границе области смещениями точек среды:

$$u|_{y=0} = F(x,t), \ \ (x,t) \in R_+^2. \tag{4}$$

Эта задача, называемая обратной динамической задачей для уравнений SH волн в насыщенных жидкостью пористых средах, рассматривались для известных функций $b(y)$, $\mu(y)$, $\rho_s(y)$, $f(t)$ в работах [3]. Обычно в качестве $f(t)$ выбиралась дельта-функция Дирака $\delta(t)$ либо регулярная функция, имеющая конечный разрыв при $t = 0$ [6].

В данной работе, используя методику, предложенную в [6], исследуем следующую обратную задачу:

Задача. Требуется по информации (4) восстановить $\mu(y)$ и $f(t)$ из (1)-(3) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(y)$, $b(y)$).

Следуя [6] предположим, что функция $f(t)$ имеет следующую структуру:

$$f(t) = a\delta(t) + \hat{f}(t)\,\theta(t), \ a \neq 0, \tag{5}$$

где $\theta(t)$ −функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$; $\hat{f}(t) \in C^1[0,T]$, $T > 0$, предположим также, что функции $b(y)$, $\mu(y)$, $\rho_s(y)$ известны в достаточно тонком слое $y \in [0, y_0]$, $y_0 > 0$, прилегающем к границе полупространства R_+^2.

Преобразуем задачу (1)-(4), для чего введем вместо y координату z соотношением:$z = \int\limits_0^y \frac{d\xi}{c_s(\xi)}$. Здесь $c_s(y) = \sqrt{\mu(y)/\rho_s(y)}$− скорость распространения поперечных сейсмических волн в пористой среде.

После перехода к координате z, скорость распространения сейсмических волн в пористой среде становится равной единице. Применим к полученной системе преобразование Фурье по переменной x, тогда задача (1)-(4) преобразуется к виду

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{zz} + \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{u}_z - \frac{b(z)\,\rho_l(z)}{\rho_s(z)}\tilde{u}_t + \left[\frac{b^2(z)\,\rho_l(z)}{\rho_s(z)} - \xi^2 c_s^2(z)\right]\tilde{u} + \breve{f}(\xi,z,t). \tag{6}$$

$$\tilde{u}|_{t<0} \equiv 0, \ \ \tilde{u}_z|_{z=0} = f(t), \ \tilde{u}|_{z=0} = \tilde{F}(\xi,t), \ (\xi,t) \in R_+^2, \tag{7}$$

где $\sigma = \sqrt{\mu\rho_s}$, $f(t) \overset{def}{=} f(t)/\sigma(0)$, $\breve{f}(\xi,z,t) = -\frac{b^3(z)\rho_l(z)}{\rho_s(z)}\int\limits_0^t \tilde{u}(\xi,z,\tau)\,e^{-b(z)(t-\tau)}d\tau$.

После решения начально-краевой задачи (6)-(7) функция $v(x,y,t)$ в частотной области находиться по формуле $\tilde{v}(\xi,z,t) = b(z)\int\limits_0^t \tilde{u}(\xi,z,\tau)\,e^{-b(z)(t-\tau)}d\tau$.

Обозначим через $\Lambda\left(a_0, f_0, \mu_0, \chi_0, \rho_{0l}, \rho_{0s}\right)$ множество функций $\{\mu\left(z\right), \chi\left(z\right), \rho_l\left(z\right), \rho_s\left(z\right)\}$, удовлетворяющих при некотором $T>0$ следующим условиям:

1) функция $f\left(t\right)$представима в виде (5) и для нее выполнены неравенства $|a| \geq a_0 > 0$, $\left\|\hat{f}\right\|_{C^1[0,T]} \leq f_0$,

2) функции $\left(\mu\left(z\right), \rho_s\left(z\right)\right) \in C^2\left[0, T/2\right]$, $\left(\chi\left(z\right), \rho_l\left(z\right)\right) \in C^1\left[0, T/2\right]$ и для них выполнены неравенства

$$0<\mu_0 \leq \mu\left(z\right),\ \ \|\mu\left(z\right)\|_{C^2[0,T/\ 2]} \leq \mu_{00}<\infty,\ 0<\rho_{0s} \leq \rho_s\left(z\right),\ \|\rho_s\left(z\right)\|_{C^2[0,T/2]} \leq \rho_{00s}<\infty,$$

$$0<\chi_0 \leq \chi\left(z\right),\ \|\chi\left(z\right)\|_{C^2[0,T/2]} \leq \chi_{00}<\infty\ 0<\rho_{0l} \leq \rho_l\left(z\right),\ \|\rho_l\left(z\right)\|_{C^2[0,T/2]} \leq \rho_{00l}<\infty.$$

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. Пусть для некоторого $T>2z_0$ функции $f^{(k)}\left(t\right), \sigma^{(k)}\left(z\right),\ k=1,2$ принадлежат множеству $\Lambda\left(a_0, f_0, \mu_0, \chi_0, \rho_{0l}, \rho_{0s}\right)$ и функции $\tilde{F}^{(k)}\left(\xi_j, t\right),\ j=1,2$ при $z=0$ являются следами решений задач (7), (8) при $f\left(t\right)=f^{(k)}\left(t\right)$ и $\sigma\left(z\right)=\sigma^{(k)}\left(z\right), k=1,2.$ Тогда, если $\tilde{F}^{(1)}\left(\xi_j, t\right)=\tilde{F}^{(2)}\left(\xi_j, t\right)$ для $t \leq T,\ \ j=1,2$ и $\sigma^{(1)}\left(z\right)=\sigma^{(2)}\left(z\right)$ для $z \in\left[0, z_0\right]$, то $f^{(1)}\left(t\right)=f^{(2)}\left(t\right)$ для $t \leq T$ и $\sigma^{(1)}\left(z\right)=\sigma^{(2)}\left(z\right)$ для $z \in\left[z_0,\, T/2\right]$.

Эта теорема является следствием следующей теоремы, характеризующей устойчивость обратной задачи.

Теорема 2. Пусть для $T>2z_0>0$ функции $f^{(k)}\left(t\right), \sigma^{(k)}\left(z\right), \tilde{F}^{(k)}\left(\xi_j, t\right),\ j=1,2, k=1,2$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть число $a^{(k)}$ соответствует коэффициенту при дельта-функции в представлении $f^{(k)}\left(t\right)$ в виде (5), $\hat{F}^{(k)}\left(t\right) \equiv \tilde{F}^{(k)}\left(\xi_1, t\right)-\tilde{F}^{(k)}\left(\xi_2, t\right)$ Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая от $a_0, f_0, \mu_0, \chi_0, \rho_{0l}, \rho_{0s}, z_0, T, \xi_1, \xi_2$, такая, что имеет место неравенство

$$\left\|\sigma^{(1)}-\sigma^{(2)}\right\|_{C^2[z_0,T/2]}+\left|a^{(1)}-a^{(2)}\right|+\left\|\hat{f}^{(1)}-\hat{f}^{(2)}\right\|_{C^1[0,T]} \leq C\varepsilon, \tag{8}$$

в котором $\varepsilon=\left\|\sigma^{(1)}-\sigma^{(2)}\right\|_{C^1[0,z_0]}+\sum\limits_{j=1}^{2}\left\|\tilde{F}^{(1)}\left(\xi_j, t\right)-\tilde{F}^{(2)}\left(\xi_j, t\right)\right\|_{C^2[0,T]}+\left\|\tilde{F}^{(1)}-\tilde{F}^{(2)}\right\|_{C^3[0,T]}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Imomnazarov Kh.Kh. Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwells equations and equations of porous media // Comp. Appl. Math. 2001. v.20. pp.20-34.

2. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн а пористой среде // Вестник НУУз, Серия механика и математика. 2006. є 2. сс.86-91.

3. Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Mathematical and Computer Modelling.2007.v.45, є 3-4.pp.270-280.

4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М. Наука.: 1984.

5. Белишев М. И., Благовещинский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПб.ун-та. 1999.

6. Романов В.Г. О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сибирский математический журнал. 2007. т.48. є 4. сс.867-881.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Уринов А. К.[1], Халилов К. С.[2]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

[1]urinovak@mail.ru;

[2]xalilov_q@mail.ru

В области D, ограниченная при $y > 0$ прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и при $y < 0$ – прямыми $x + y = 0$, $x - y = 1$, рассмотрим уравнение $(\partial/\partial x)\,Lu = 0$, где

$$L = \begin{cases} L_1 \equiv \left(\partial^2/\partial x^2\,\right) - (\partial/\partial y\,) - \lambda_1^2, & (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \\ L_2 \equiv \left(\partial^2/\partial x^2\,\right) - \left(\partial^2/\partial y^{\,2}\right) - (2\beta/y)\,(\partial/\partial y) + \lambda_2^2, & (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \end{cases}$$

β, λ_1 и λ_2 – заданные действительные числа, причем $0 < \beta < (1/2)$.

Для уравнения $(\partial/\partial x)\,Lu = 0$ в области D исследуем следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u\,(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u\,(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, $u_x,\, u_y \in C\,(D \cup D_3)\,;$ 2) в $D_1 \cup D_2$ является решением уравнения $(\partial/\partial x)\,Lu = 0$; 3) удовлетворяет условиям:

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, \quad u\,(1,y) = \varphi_2\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1;$$

$$\int\limits_0^1 u\,(x,y)\,dx = \varphi_3\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u\,(x,y)|_{D_3} = \psi_1\,(x)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{D_3} = \psi_2\,(x)\,, \quad 0 \le x \le (1/2)\,;$$

$$\lim_{y\to+0} u_y\,(x,y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} u_y\,(x,y)\,, \quad 0 < x < 1,$$

где $D_3 = \{(x,y) : y = -x,\ 0 \le x \le 1/2\ \}$, n – внутренняя нормаль к D_3, а $\varphi_j\,(y)$, $\psi_1\,(x)$, $\psi_2\,(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_j\,(y) \in C^1\,[0,1]$, $j = \overline{1,3}$; $\psi_1\,(x) \in C^1\,[0,1/2] \cap C^2\,(0,1/2)$, $\psi_2\,(x) \in C\,[0,1/2] \cap C^1\,(0,1/2)$, $\psi_1\,(0) = \varphi_1\,(0)$ и $\psi_1{}''\,(x)$, $\psi_2{}'\,(x) \in L_1\,[0,1/2]\,.$

Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. При этом поставленная задача эквивалентно сведена к задаче для параболо-гиперболического уравнения второго порядка с неизвестной правой частью. При исследовании последней задачи использованы формулы решения задачи Коши для гиперболического уравнения, имеющего сингулярный коэффициент и спектральный параметр, а также решения первой краевой задачи для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979.

2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Фаязов К. С.[1], Хажиев И. О.[2]

[1]Туринский политехнический университет в г. Ташкенте,

kudratillo52@mail.ru
[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
kh.ikrom04@gmail.com

Работа посвящена исследованию некорректной краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения параболического типа высокого порядка с одной линей вырождения.

Пусть $Q_t = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega,\ 0 < t < T\}$, $\Omega = \{(x, y) : |x| < l,\ 0 < y < d\}$, S - граница области Ω, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{sgn}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} + a\,u = f(x, y, t) \tag{1}$$

в области $Q_t \cap \{x \neq 0\}$, где a - некоторая константа, $n \in N$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, y, t) \in W_2^{2,2n,1}(Q_t) \cap C_{x,y,t}^{1,2n-2,0}\left(\bar{Q}_t\right)$ удовлетворяющую уравнению (1) в области $Q_t \cap \{x \neq 0\}$ и следующим условиям:
начальным

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),\ (x, y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

краевым

$$\begin{array}{l} u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \left.\frac{\partial^{2i} u}{\partial y^{2i}}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^{2i} u}{\partial y^{2i}}\right|_{y=d} = 0,\ i = 0, 1, ..., (n-1),\ -l \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{array} \tag{3}$$

и условия склеивания

$$u(-0, y, t) = u(+0, y, t),\ u_x(-0, y, t) = u_x(+0, y, t),\ \ 0 \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $\varphi(x, y)$, $f(x, y, t)$ достаточные гладкие функции и удовлетворяют условия согласования.

В данной работе краевая задача исследуется для неоднородного параболического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени, получена априорная оценка для решения и доказывается условная корректность рассматриваемой задачи.

Обозначим $(u, v) = \int\limits_{\Omega} u\,v\,d\Omega$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|u\|^2 = (u, u)$. Согласно [5], имеем

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\operatorname{sgn} x\, u(x, y, t),\, \bar{\omega}_{k,j}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\operatorname{sgn} x\, u(x, y, t),\, \tilde{\omega}_{k,j}\right)^2. \tag{5}$$

Из результатов работы [5] следует, что $\{\bar{\omega}_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\{\tilde{\omega}_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$ собственные функции соответствующей спектральной задачи образуют базис Рисса в H_0 и норма в пространстве $L_2(\Omega)$, определенная равенством (5), эквивалентна исходной.

Лемма 1. Для решение задачи (1)-(4) при $t \in (0,\, T)$ имеет место неравенство

$$\|u(x, y, t)\|_0 \leqslant \sqrt{2}(\|u(x, y, 0)\|_0 + \alpha)^{1-\frac{t}{T}}(\|u(x, y, T)\|_0 + \alpha)^{\frac{t}{T}} + \alpha,$$

$\alpha = \left(\int\limits_0^T \|f(x, y, t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Введем множества корректности следующим образом

$$M = \{u(x,y,t): \|u(x,y,T)\|_0 \leqslant m\}.$$

Теорема 1. Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,y,t) \in M$. Тогда решение задачи (1)-(4) единственно.

Обозначим через $u(x,y,t)$ решение задачи (1)-(4) по точным данным $\varphi(x,y)$, а через $u_\varepsilon(x,y,t)$ решение задачи (1)-(4) по приближенным данным $\varphi_\varepsilon(x,y)$.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1) - (4) существует, $u, u_\varepsilon \in M$ и $\max\limits_{t\in[0;T]} \|f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \leqslant \varepsilon$, $\|\varphi(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)\|_0 \leqslant \varepsilon$. Тогда имеет место оценка

$$\|u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \leqslant \sqrt{2}\left(\varepsilon\left(\sqrt{T}+1\right)\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m+\sqrt{T}\varepsilon\right)^{\frac{t}{T}} + \sqrt{T}\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Levine H.A. Logarithmic Convexity, First order Differential Inequalities and Some Applications. / Trance. of AMS, v.152, November 1970.
2. Schock E, Fayazov K.S. Boundary value problems for second order partial differential equations with operator coefficients. Abstractand Applied Analysis, v.6, 2001, №5, P. 253-266.
3. Егоров И.Е. Краевые задачи для уравнений высокого порядка и с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т.303, №6. С. 1301-1304.
4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
5. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. - Новосибирск, 1986. - С. 65-84.
6. Фаязов К. С., Хажиев И. О. Некорректная начально-краевая задача для системы уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Вычислительные технологии, Том 22, №3, 2017. С. 103-115
7. Фаязов К.С. Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядка с операторными коэффициентами. Сибирский Математический Журнал, 1994, т.35, №3, С. 702-706.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Хасанов А. Б.[1], Муминов У. Б.[2], Ибрагимов Р. К.[3]

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
[1]ahasanov2002@mail.ru
[2]umuminov153@gmail.com
[3]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В статье методом обратной спектральной задачи интегрируется нелинейное уравнение Шредингера с дополнительными членами в классе бесконечнозонных периодических функций.

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2+q^2) + a(t)[p^2(x_0,t)+q^2(x_0,t)]p_x + \\ \qquad +\{b(t)+c(t)[p^2(x_1,t)+q^2(x_1,t)]\}\cdot q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2+q^2) + a(t)[p^2(x_0,t)+q^2(x_0,t)]q_x - \\ \qquad -\{b(t)+c(t)[p^2(x_1,t)+q^2(x_1,t)]\}\cdot p, \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x)\,, \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических по x функций:

$$p(x+\pi,t) = p(x,t),\ q(x+\pi,t) = q(x,t),\ x \in R, t > 0,$$

$$p(x,t),\ q(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t)$,$b(t)$, $c(t) \in C[0,\infty)$ - заданные непрерывные ограниченные функции, а x_0,$x_1 \in R$.

В данной статье предлагается алгоритм построения решения $p(x,t), q(x,t)$,$x \in R$, $t > 0$, задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv By' + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x \in R,\ t > 0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Omega\,(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -\,p(x,t) \end{pmatrix},\ \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) =$ $= (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Корни уравнений $\Delta(\lambda,\tau,t) = \pm 2$ обозначим через $\lambda_n(\tau,t)$, она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задач $y(0,\tau,t) = \pm y(\pi,\tau,t)$ для уравнения (4).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0,\tau,t) = 0\,,\ y_1(\pi,\tau,t) = 0, \tag{5}$$

для уравнения (4). Первая компонента вектор-функции$s(x,\lambda,\tau,t)$ удовлетворяет первому граничному условию (5), подставляя его на второе граничное условие, получим $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$. Решая его относительно$\lambda$, находим собственное значение $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$, задачи Дирихле (4), (5). Обозначим через $\sigma_n(\tau,t)$знак:$\sigma_n(\tau,t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$.

Множество $\{\xi_n(\tau,t),\, \sigma_n(\tau,t),\, n \in \mathbb{Z}\}$, называется спектральными параметрами, а набор$\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t),\, n \in \mathbb{Z}\}$- спектральными данными оператора $L(\tau,t)$. Восстановление коэффициента $\Omega\,(x,t)$ оператора$L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega\,(x,t)$ - оператора $L(\tau,t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t),\, n \in \mathbb{Z}\}$. Теперь с помощью начальной функций $p_0(x+\tau)$,$q_0(x+\tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau,0)y = \lambda y$,$x,\tau \in R$.

Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau),\ n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau, 0)$. Отсюда следует, что $\xi_n^0(\tau+\pi) = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau+\pi) = \sigma_n^0(\tau)$, $\ n \in \mathbb{Z}$.
Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть пара $p(x,t)$,$q(x,t)$,$x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t),\ n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau,t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$1)\ \lambda_n(\tau,t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z},$$

$$2)\ \frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) \cdot \{q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) +$$
$$+ [p(\tau,t) + \xi_n(\tau,t)]^2 + \xi_n^2(\tau,t) - a(t)(p(\tau,t) + \xi_n(\tau,t))[p^2(x_0,t) +$$
$$+ q^2(x_0,t)] + \frac{1}{2}[b(t) + c(t)(p^2(x_1,t) + q^2(x_1,t))]\}\ , n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}\,. \tag{7}$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$,$n \in \mathbb{Z}$, меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)\,,\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t))\,, q(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau,t) h_k(\xi(\tau,t)), \tag{9}$$

$$q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t)), \tag{10}$$

систему дифференциальных уравнений (6) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данныеλ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$, $q_0(x+\tau)$, $\tau \in R$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ черезλ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Теперь в системе уравнения (6) с начальным условием (8) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0,t)$,$\sigma_n(x_0,t)$,$n \in \mathbb{Z}$, и $\xi_n(x_1,t)$, $\sigma_n(x_1,t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Затем из формулы следов (10), определим функции $p(x_0,t)$,$q(x_0,t)$, и $p(x_1,t)$, $q(x_1,t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (6) и решая задачу Коши (6), (7) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из формул следов (9), определим $p(\tau,t)$ и $q(\tau,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.

2. Итс А.Р. Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.

3. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера// Докл. АН УССР. Сер.А.,1976, є11, 965-968.

4. Смирнов А.О. Эллиптические по t решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.

5. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199,є1,с.60-68.

6. Домрин А.В. О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрчдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.

7. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. //Функц.анализ и его прил. – Москва, 1975.т.9.вып.3. с.41-51.

НЕКОТОРЫЕ РАСШИРЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ АППЕЛЯ $F_1\left(a;b_1,b_2;c;x,y\right)$

Хасанов А.[1], **Толашева Ё.**[2]

[1]Институт математики, Ташкент, Узбекистан
anvarhasanov@yahoo.com;
[2]Наманганский гос. университет, Наманган, Узбекистан
yorqinoytolasheva@gmail.com

Карлсон [1] представил определенные связи между функциями Бесселя и обобщенными гипергеометрическими функциями, обобщающие некоторые более ранние результаты. Здесь, мы разделив гипергеометрический ряд Аппеля $F_1\left(a;b_1,b_2;c;x,y\right)$ на шестнадцать части, мы покажем, что существуют некоторые полезные и обобщенные соотношения между $F_1\left(a;b_1,b_2;c;x,y\right)$ и функцией Кампе де Фериет $F^{4;4,4}_{4;3,3}\left[x^4,y^4\right]$.

Показано, что эти основные результаты специализированы для получения определенных соотношений между функциями Гаусса, обобщенными гипергеометрическими ${}_8F_7\left(x^4\right)$ и элементарными функциями chx. Используем обозначения, как в [2-5] гипергеометрическая функция Аппеля $F_1\left(a;b_1,b_2;c;x,y\right)$ определяется

$$F_1\left(a;b_1,b_2;c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\,(b_1)_m\,(b_2)_n}{(c)_{m+n}\,m!n!}x^my^n,\ \ |x|<1,\ |y|<1, \tag{1}$$

где $(\lambda)_k$ обозначения Похгаммера и определяется следующим образом

$$(\lambda)_k=\frac{\Gamma\left(\lambda+k\right)}{\Gamma\left(\lambda\right)},\ \ \lambda\in\mathcal{C}\backslash\mathcal{Z}_0^- \tag{2}$$

Теорема 1. Если $c\neq 0,-1,-2,...$ то справедливо следующее соотношение между функцией Аппеля $F_1(a;b_1,b_2;c;x,y)$ и функцией Кампе де Фериет $F^{4;4,4}_{4;3,3}[x^4,y^4]$

$$\begin{aligned}F_1(a;b_1,b_2;c;x,y) &= A_1 + y\frac{(a)_1(b_2)_1}{(c)_1}A_2 + y^2\frac{(a)_2(b_2)_2}{2(c)_2}A_3 + y^3\frac{(a)_3(b_2)_3}{6(c)_3}A_4\\ &+x\frac{(a)_1(b_1)_1}{(c)_1}A_5 + xy\frac{(a)_2(b_1)_1(b_2)_1}{(c)_2}A_6 + xy^2\frac{(a)_3(b_1)_1(b_2)_2}{2(c)_3}A_7 + xy^3\frac{(a)_4(b_1)_1(b_2)_3}{6(c)_4}A_8\\ &+x^2\frac{(a)_2(b_1)_2}{2(c)_2}A_9 + x^2y\frac{(a)_3(b_1)_2(b_2)_1}{2(c)_3}A_{10} + x^2y^2\frac{(a)_4(b_1)_2(b_2)_2}{4(c)_4}A_{11} + x^2y^3\frac{(a)_5(b_1)_2(b_2)_3}{12(c)_5}A_{12}\\ &+x^3\frac{(a)_3(b_1)_3}{6(c)_3}A_{13} + x^3y\frac{(a)_4(b_1)_3(b_2)_1}{6(c)_4}A_{14} + x^3y^2\frac{(a)_5(b_1)_3(b_2)_2}{12(c)_5}A_{15} + x^3y^3\frac{(a)_6(b_1)_3(b_2)_3}{36(c)_6}A_{16},\end{aligned} \tag{3}$$

где $A_i\,(i = 1...16)$ выражаются гипергеометрическими функциями Кампе де Фериет $F^{4;4,4}_{4;3,3}[x^4,y^4]$ [3]

$$F^{p;q;k}_{l;i;j}\left[\begin{array}{lll}(a_p): & (b_q); & (c_k);\\ (\alpha_l): & (\beta_m); & (\gamma_n);\end{array} x,y\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s\, r!s!}x^r y^s.$$

Теорема 2. Если $c \neq 0,-1,-2,...$ то справедливо следующее соотношение между функцией Гаусса $F(a,b;c;x)$ и обобщенной функцией ${}_8F_7(x^4)$

$$\begin{aligned}F(a,b_1;c;x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b_1)_m}{(c)_m m!}x^m\\ &= {}_8F_7\left(\begin{array}{c}\frac{a}{4},\frac{a+1}{4},\frac{a+2}{4},\frac{a+3}{4},\frac{b_1}{4},\frac{b_1+1}{4},\frac{b_1+2}{4},\frac{b_1+3}{4};\\ \frac{c}{4},\frac{c+1}{4},\frac{c+2}{4},\frac{c+3}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4};\end{array} x^4\right)\\ &+x\frac{(a)_1(b_1)_1}{(c)_1}{}_8F_7\left(\begin{array}{c}\frac{a+1}{4},\frac{a+2}{4},\frac{a+3}{4},\frac{a+4}{4},\frac{b_1+1}{4},\frac{b_1+2}{4},\frac{b_1+3}{4},\frac{b_1+4}{4};\\ \frac{c+1}{4},\frac{c+2}{4},\frac{c+3}{4},\frac{c+4}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4};\end{array} x^4\right)\\ &+x^2\frac{(a)_2(b_1)_2}{2(c)_2}{}_8F_7\left(\begin{array}{c}\frac{a+2}{4},\frac{a+3}{4},\frac{a+4}{4},\frac{a+5}{4},\frac{b_1+2}{4},\frac{b_1+3}{4},\frac{b_1+4}{4},\frac{b_1+5}{4};\\ \frac{c+2}{4},\frac{c+3}{4},\frac{c+4}{4},\frac{c+5}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{6}{4};\end{array} x^4\right)\\ &+x^3\frac{(a)_3(b_1)_3}{6(c)_3}{}_8F_7\left(\begin{array}{c}\frac{a+3}{4},\frac{a+4}{4},\frac{a+5}{4},\frac{a+5}{4},\frac{b_1+3}{4},\frac{b_1+4}{4},\frac{b_1+5}{4},\frac{b_1+6}{4};\\ \frac{c+3}{4},\frac{c+4}{4},\frac{c+5}{4},\frac{c+6}{4},\frac{5}{4},\frac{6}{4},\frac{7}{4};\end{array} x^4\right),\end{aligned} \tag{4}$$

где [3,5]

$${}_pF_q\left[\begin{array}{c}\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\\ \beta_1,\beta_2,...,\beta_q\end{array} x\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i)_m}{\prod\limits_{i=1}^{q}(\beta_i)_m\, m!}x^m.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. C. Carlson, Some extensions of Lardner's relations between ${}_0F_3$ and Bessel functions. SIAM J. Math. Anal., vol. 1, pp. 232-242, 1970.

2. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, ser. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1964, vol. 55.
3. P. Appell and J. Kampe de Feriet, Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
4. J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, Expansions of Appell's double hypergeometric functions, Quart. J. Math. Oxford Ser., vol. 11, pp. 249-270, 1940.
5. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, Higher transcendental functions. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, vol. I.

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КАМПЕ ДЕ ФЕРИЕТ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Хасанов А.[1], Козимова О.[2]

[1]Институт математики, Ташкент, Узбекистан
anvarhasanov@yahoo.com
[2]Наманганский гос. университет, Наманган, Узбекистан
odinakozimova@mail.ru

Гипергеометрические функции занимают важное место в ряду специальных функций математической физики. В настоящий момент существует, по крайней мере, четыре подхода к изучению свойств гипергеометрической функции многих переменных. Такие функции могут определяться как суммы степенных рядов определенного вида (так называемых гипергеометрические ряды), как интеграл типа Меллина-Барса, как решения систем дифференциальных уравнений [1-4].

Рассмотрим следующую гипергеометрическую функцию Кампе де Фериет [7]

$$F^{1;3,3}_{0;3,3}\left[\begin{array}{llll} a; & b,c,d; & b_1,c_1,d_1; & \\ -; & e,f,g; & e_1,f_1,g_1; & \end{array} x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b_1)_n(c)_m(c_1)_n(d)_m(d_1)_n}{(e)_m(e_1)_n(f)_m(f_1)_n(g)_m(g_1)_n\,m!n!}x^m y^n, \quad (1)$$

где $(\lambda)_k$ обозначения Похгаммера и определяется следующим образом [5-7]

$$(\lambda)_k=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},\ \ \lambda\in\mathcal{C}\backslash\mathcal{Z}_0^-. \quad (2)$$

Теорема. Если $a,b,c,d,b_1,c_1,d_1\in\mathcal{C}$ и $e,f,g,e_1,f_1,g_1\in\mathcal{C}\backslash\mathcal{Z}_0^-$, $\mathcal{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...\}$ то гипергеометрическая функция Кампе де Фериет (1) удовлетворяет следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left\{\begin{array}{l}
\quad x^3(1-x)u_{xxxx}-x^3yu_{xxxy}+[e+g+f+3-(a+b+c+d+6)x]x^2u_{xxx}\\
\quad -(b+c+d+3)x^2yu_{xxy}\\
\quad +[ef+eg+fg+e+f+g+1\\
\quad -(ab+ac+ad+bc+bd+cd+3(a+b+c+d+1)+4)x]xu_{xx}\\
\quad -(bc+bd+cd+b+c+d+1)xyu_{xy}\\
\quad +\left[efg-\left(\begin{array}{l} abc+abd+acd+bcd\\ +ac+ad+ab+bc+bd+cd+a+b+c+d+1\end{array}\right)x\right]u_x\\
\quad -bcdyu_y-abcdu=0,\\
y^3(1-y)u_{yyyy}-xy^3u_{xyyy}+[e_1+f_1+g_1+3-(a+b_1+c_1+d_1+6)y]y^2u_{yyy}\\
-(b_1+c_1+d_1+3)xy^2u_{xyy}\\
+[e_1f_1+e_1g_1+f_1g_1+e_1+f_1+g_1+1\\
-(ab_1+ac_1+ad_1+b_1c_1+b_1d_1+c_1d_1+3(a+b_1+c_1+d_1+1)+4)y]yu_{yy}\\
-(b_1c_1+b_1d_1+c_1d_1+b_1+c_1+d_1+1)xyu_{xy}\\
+\left[e_1f_1g_1-\left(\begin{array}{l} ab_1c_1+ab_1d_1+ac_1d_1+b_1c_1d_1\\ +ac_1+ad_1+ab_1+b_1c_1+b_1d_1+c_1d_1+a+b_1+c_1+d_1+1\end{array}\right)y\right]u_y\\
-b_1c_1d_1xu_x-ab_1c_1d_1u=0,
\end{array}\right. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем справедливость первого уравнения из системы (2). Используя формулу дифференцирования

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}F^{1;3,3}_{0;3,3}\left[\begin{array}{llll} a; & b,c,d; & b_1,c_1,d_1; & \\ -; & e,f,g; & e_1,f_1,g_1; & x,y\end{array}\right]=\dfrac{(a)_{i+j}(b)_i(b_1)_j(c)_i(c_1)_j(d)_i(d_1)_j}{(e)_i(e_1)_j(f)_i(f_1)_j(g)_i(g_1)_j}\\
\times F^{1;3,3}_{0;3,3}\left[\begin{array}{cccc} a+i+j; & b+i,c+i,d+i; & b_1+j,c_1+j,d_1+j; & \\ -; & e+i,f+i,g+i; & e_1+j,f_1+j,g_1+j; & x,y\end{array}\right]\\
=\displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+i+j)_{m+n}(b+i)_m(b_1+j)_n(c+i)_m(c_1+j)_n(d+i)_m(d_1+j)_n}{(e+i)_m(e_1+j)_n(f+i)_m(f_1+j)_n(g+i)_m(g_1+j)_n\,m!n!}x^my^n,
\end{array} \tag{4}$$

определяем все производные входящие в уравнение и их подставляем. Тогда мы после некоторых элементарных преобразований получаем следущий выражение

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}B(m,n)\left\{\begin{array}{l}
(m^3+em^2+gm^2+fm^2+efm+egm+fgm+efg)\\
\times\dfrac{(a+m+n)(b+m)(c+m)(d+m)}{(e+m)(f+m)(g+m)}\\
-m^4-m^3n-am^3-bm^3-cm^3-dm^3\\
-bm^2n-cm^2n-dm^2n-abm^2-acm^2-adm^2\\
-bcm^2-bdm^2-cdm^2-abcm-abdm-acdm\\
-bcdm-bcmn-bdmn-cdmn-bcdn-abcd
\end{array}\right\}x^my^n=0, \tag{5}$$

где

$$B(m,n)=\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b_1)_n(c)_m(c_1)_n(d)_m(d_1)_n}{(e)_m(e_1)_n(f)_m(f_1)_n(g)_m(g_1)_n\,m!n!}. \tag{6}$$

Учитывая тождества

$$m^3+em^2+gm^2+fm^2+efm+egm+fgm+efg=(e+m)(f+m)(g+m),$$

и

$$\begin{array}{l}
m^4+am^3+bm^3+cm^3+dm^3+bm^2n+cm^2n+dm^2n+abm^2+acm^2\\
+adm^2+bcm^2+bdm^2+cdm^2+abcm+abdm+acdm+bcdm+bcmn+bdmn\\
+cdmn+bcdn+m^3n+abcd=(a+m+n)(b+m)(c+m)(d+m)
\end{array}$$

убеждаемся, что выражение фигурной скобке в (5) равна нулю.

Аналогичные исследования рассмотрены в работах [8-10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа. УМН. Т. 47:4. 1992. С. 3-82.

2. Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. Гипергеометрические функции и торические многообразия. Функциональный анализ и его приложения. Т. 23. Вып. 2. 1989. С. 12-26.

3. Hormander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Springer-Verlag. 1990.

4. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество, 2001, 226 с.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1, М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1973, 296 с.

6. Karlsson P. W., Srivastava H. M. Multiple Gaussian hypergeometric series. Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, New York, 1985.

7. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926.

8. Anvar Hasanov, Rakhila B. Seilkhanova and Roza D. Seilova, Linearly independent solutions of the system of hypergeometric Exton function X12. Contemporary Analysis and Applied Mathematics. Vol.3, No.2, 279-282, 2015.

9. Rakhila B. Seilkhanova, Anvar H. Hasanov; Particular solutions of generalized Euler-Poisson-Darboux equation, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2015 (2015), No. 09, pp. 1-10.

10.Maged G. Bin-Saad and Anvar Hasanov. Linear Independent Solutions and Operational Representations for Hypergeometric Functions of Four Variables. Chinese Journal of Mathematics Volume 2014, pp. 1-6

ПРЯМАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАХАРОВА-ШАБАТА

Хасанов И.И.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
ihasanov998@gmail.com;

После того как Захаров и Шабат (ЗШ) в 1971 году показали,что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) может быть проинтегрировано методом обратной задачи, ранее примененного к уравнению Кортевега де Фриза, интерес к этому уравнению возник во всех областях физики, где имеются волновые системы, потому что НУШ описывает огибающую для узких волновых пучков.

Система Захарова-Шабата имеет вид

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix}-i\zeta & q\\ -\sigma q^* & i\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\sigma = -1$ для нормальной и $\sigma = 1$ для аномальной дисперсии.

Рассматриваем потенциал q с пределами на бесконечности

$$q(t) \to \rho e^{i\theta_-} \text{ при } t \to -\infty, \quad q(t) \to \rho e^{i\theta_+} \text{ при } t \to +\infty. \tag{2}$$

Сделаем замену

$$q = e^{i\theta_+}\tilde{q}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_1, \quad \psi_2 = e^{i\theta_+}\tilde{\psi}_2, \tag{3}$$

тогда получим систему

$$\begin{bmatrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix}-i\zeta & \tilde{q}\\ -\sigma\tilde{q}^* & i\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

и асимптотики

$$\tilde{q}(t) \to \rho e^{i\theta} \text{ при } t \to -\infty, \quad \tilde{q}(t) \to \rho \text{ при } t \to +\infty, \tag{5}$$

где $\theta = \theta_- - \theta_+$. Далее волну над буквами опускаем.

Система (4) имеет асимптотические решения

$$\Psi \to c_1^+ X_1^+ + c_2^+ X_2^+, \quad X_1^+ = e^{-i\mu t}\begin{bmatrix}1\\ i\frac{\zeta-\mu}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$X_2^+ = e^{i\mu t}\begin{bmatrix}1\\ i\frac{\zeta+\mu}{\rho}\end{bmatrix}, \text{ при } t \to +\infty,$$

$$\Psi \to c_1^- X_1^- + c_2^- X_2^-, \quad X_1^- = e^{-i\mu t}\begin{bmatrix}1\\ ie^{-i\theta}\frac{\zeta-\mu}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$X_2^- = e^{i\mu t}\begin{bmatrix}1\\ ie^{i\theta}\frac{\zeta+\mu}{\rho}\end{bmatrix}, \text{ при } t \to -\infty,$$

где

$$\mu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 + \sigma\rho^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasegawa, Akira, and Yuji Kodama. Solitons in optical communications. // No. 7. Oxford University Press, USA, 1995.
2. Захаров, В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи// Наука, 1980.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов У. А.[1], Хасанов Т. Г.[2]

Хорезмское отделение института математики им. В.И.Романовского, Ургенч, Узбекистан
[1]x_umid@mail.ru;
Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
[2]temur.xasanov.2018@mail.ru

В данной работе изучается нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза, а именно рассмотрим следующее уравнение

$$u_t + \beta(t)u(x_0,t)(u_{xxx} - 6uu_x) + \gamma(t)u(x_1,t)u_x = 0 \tag{1}$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции и x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ имеет следующие свойства: 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty \tag{3}$$

2) Оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, $\ldots$, $\lambda_N(0)$.

Требуется найти достаточно гладкую функцию $u(x,t)$, достаточно быстро стремящаяся к своим пределам в $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|) \left| u(x,t) + \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right| \right) dx < \infty, \quad j = 1,2,3. \tag{4}$$

Целью данной работы является разработка алгоритма построения решения $u(x,t)$ задачи (1) - (4) методом обратной задачи рассеяния для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функция $u(x,t)$является решением задачи (1) - (4), то данные рассеяния $\left\{ r^+(k,t), \lambda_n(t), B_n(t),\ n = \overline{1,N} \right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = (8ik^3\beta(t)u(x_0,t) - 2ik\gamma(t)u(x_1,t))r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = (8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t) + 2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t))B_n(t), \quad n = 1,2,\ldots,N.$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым позволяют применить метод обратной задачи для решения задачи (1) - (4). Пусть дана функция $(1 + |x|\,u_0(x)) \in L^1(\mathbb{R})$. Затем решение проблемы находится по следующему алгоритму.

Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ и получаем данные рассеяния $\{r^+(k),\ \chi_1,\ \chi_2, \ldots,\ \chi_N,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ B_N\}$ для оператора $L(0)$.

Используя результаты теоремы, находим данные рассеяния для $t > 0$:

$$\left\{ r^+(k,t),\ \chi_1(t),\ \chi_2(t), \ldots,\ \chi_N(t),\ B_1(t),\ B_2(t), \ldots,\ B_N(t) \right\}.$$

Используя метод, основанный на интегральном уравнении Гельфанда – Левитана – Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t > 0$, полученных на предыдущем шаге.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faddeev L.D. The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering // Usp. Mat. Mauk, 1959, 14:4(88) P 57–119.
2. Fokas A.S., Ablowitz M.J. Forced Nonlinear Evolution Equations and the Inverse Scattering Transform Stud // Appl. Math., 1989, №80 P. 253–272.
3. Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation // Phys. Rev. Lett., 1967. №19, P. 1095–1097.
4 Hoitmetov U.A. Integration of the general KdV equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Reports of the Ac. of Sc. RUz., 2007, №5, P. 16–20.
5. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of Korteweg-de Vries equation in a class of rapidly decreasing complex-valued functions, Russian Math. (Iz. VUZ) // 2018, V.62, №3, P. 68–78.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Холбеков Ж.А.

Ташкентский государсвенный технический университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: xolbekovja@mail.ru

Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0 \tag{1}$$
где
$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-\ u_{yy}, & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-\ u_{yy}-\mu_1 u(0,y), & (x,y)\in\Omega_2,\\ u_{xx}-\ u_{yy}-\mu_2 u(1,y), & (x,y)\in\Omega_3\end{cases}$$
в области $\Omega=\sum\limits_{j=0}^{3}\Omega_j\cup\ AB\cup BC\cup DA,$ где Ω_0 – область, ограниченная отрезками $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ прямых $y=0,\ x=1,\ y=1,\ x=0$ соответственно; Ω_1 – область, ограниченная отрезком AB прямой $y=0$ и двумя характеристиками AN и BN уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N\,(0,5\,;\ -0,5)$; Ω_2 – область, ограниченная отрезком AD прямой $x=0$ и двумя характеристиками AK и DK уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K\,(-0,5\,;\ 0,5)$; Ω_3 – область, ограниченная отрезком BC прямой $x=1$ и двумя характеристиками CM и BM уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M\,(1,5\,;\ 0,5)$. В уравнении (1) μ_j $(j=1,2)$ – заданные действительные числа, причем
$$\mu_j\geqslant 0,\ \ (j=1,2)\,. \tag{2}$$

Определение. Если функция $u_{yy}\in C\,(\Omega_0)\,,\ u_{yyy}\in C\,(\Omega_j)\,,\ u_{xxy}\in C\,(\Omega_0\cap\Omega_j)\,,\ u\in C^2\,(\Omega_2\cup\Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0 и $\Omega_j(j=\overline{1,3})$, то функция $u(x,y)$ называется регулярным решением уравнения (1).

Задача B_3. Найти регулярное в областях Ω_0 и $\Omega_j\,(j=\overline{1,3})$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\; u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0),\; 0<x<1,$$
$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y),\; u_x(1+0,y)=u_x(1-0,y),\; 0<y<1$$

и граничным условиям

$$u(x,y)|_{AN}=\varphi_1(x),\;,\;\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AN}=\varphi_2(x),\; x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\;\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BN}=\varphi_3(x),\; x\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$
$$u(x,y)|_{AK}=\varphi_4(y),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AK}=\varphi_5(y),\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},$$
$$u(x,y)|_{CM}=\varphi_6(y),\qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{CM}=\varphi_7(y),\quad \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,$$

где $n-$ внутренняя нормаль, а $\varphi_j(x)$ $(j=\overline{1,7}\,)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_2'\left(\frac{1}{2}\right)=-\varphi_3'\left(\frac{1}{2}\right),\; \varphi_1(0)=\varphi_4(0),\; \varphi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{3}$$
$$\varphi_3\,(x)\in C^1\left[\frac{1}{2};1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2};1\right),\; \varphi_2\,(x)\in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right), \tag{4}$$
$$\varphi_4(y)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \varphi_5\,(y)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{5}$$
$$\varphi_6(y)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^3\left(\frac{1}{2},1\right),\quad \varphi_7\,(y)\in C^1\left[\frac{1}{2};1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2};1\right). \tag{6}$$

Заметим, что задача B_2 для уравнения (1) в области $\Omega^*=\Omega_0\cup\Omega_1$ изучены в работах [1]- [2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2) - (6), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи B_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных урав-нений второго и третьего порядка. // Дифференциальные уравнения. 1994. -Т. 30. № 2. С. 230-237.

2. *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // Узбекский математический журнал. 2000. № 2. С. 29-35.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Хуррамов Н.Х.[1], Хидиров Б.[2], Алланазаров О.[3]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

[1]nxurramov22@mail.ru

[2]nxurramov22@mail.ru

[3]allanazarov.1998@mail.ru

Для уравнения $(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0$, рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с условиями Бицадзе–Самарского на нормальной кривой уравнении (1) и на отрезке линии вырождения , а также с условиями Геллерстедта на части граничной характеристики и на параллельной ей внутренней характеристике.

I.**Постановка задачи** T_0**.** Пусть $D-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x))$: $x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками AC и BC уравнения

$$(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точка пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходящих из точки $E(c, 0)$, где c- некоторое число, принадлежащее интервалу $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$.

С. Геллерстедт [1,с.186, с.201] для обобщенного уравнения Ф.Трикоми исследовал задачи, при постановке которых в гиперболической части области D значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик разного семейства EC_0 и EC_1 или AC_0 и BC_1 . При этом в эллиптической части области D граничные значения задаются на произвольной кривой σ_0. Настоящая работа отличается от задачи Геллерстедта тем, что здесь в условиях задачи значения искомого решения задаются на характеристиках одного семейства т.е на граничной характеристике AC_0 и параллельной ей внутренней характеристике EC_1

Задача T_0. Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщенным решением класса $R_1[1, c.104]$;

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x \to \pm1$, $x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2) \in (0, 1/2)$;

4) для любых $x \in \overline{I}$ выполняются равенства

$$u(x, \sigma_0(x)) = a(x)u(x, 0) + \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3}$$

$$u(x, y)\mid_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c - 1)/2], \tag{4}$$

$$u(x, y)\mid_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c, (c + 1)/2], \tag{5}$$

Функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $\psi_0(x), \psi_1(x)$ заданы и $\varphi(x) \in C[-1, 1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1, 1)$, $\psi_0(x) \in C[-1, (c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1, (c-1)/2)$, $\psi_1(x) \in C[(c+1)/2, 1] \cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2, 1)$, $\alpha_0 \in (0, 1)$, причем $\varphi(x) = (1 - x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1, 1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1, 1)$, $\psi_0(-1) = 0$, $\psi_1(c) = 0$.

Заметим, что условие (3) является условием Бицадзе–Самарского на σ_0 и на отрезке вырождения AB, а условия (4) и (5) есть соответственно условие Геллерстедта заданное на граничной характеристике AC_0 и на внутренней характеристике EC_1 . При $c = -1$ или $c = 1$ из задачи следует задача Трикоми [1,с.128].

Единственность решения задачи T_0 доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В.Бицадзе [3, с.301], а существования решения задачи T_0 доказывается методом теории регулярных и сингулярных интегральных уравнений [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.:Высшая школа.1985.-304 с.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. 448 с.
3. Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми //Дифференциальные уравнения. 2019, том 55 є8, С.1117-1126.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Чориева С.Т.[1], Чориев Х.

Термезский Государственный университети, Термез, Узбекистан

[1]**sanamchoriyeva3@gmail.ru**

Рассмотрим уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad m > 0. \tag{1}$$

Пусть Ω конечная односвязная область плоскости независимых переменных $x,\ y$, ограниченная характеристиками уравнения (1).

Задача Г. Найти в области Ω регулярное решение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), \ (x,y) \in \Omega_1 = \Omega \cap y > 0, \\ u_2(x,y), \ (x,y) \in \Omega_2 = \Omega \cap y > 0. \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C\left(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}\right) \cap C^2\left(\overline{\Omega} \setminus AB\right)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_j[\theta^{(j)}(x)] = \mu_1 u_j[\theta^{(j)}_{k_1}(x)] + \mu_2 u_j[\theta^{(j)}_{k_2}(x)] +$$

$$+\frac{1}{2}\mu_1 u_j(p_1(x),0) - \frac{1}{2}\mu_2 u_j(p_2(x),0) + \delta_j(x), \ \forall x \in I = AB, \tag{2}$$

здесь, $j = 1$ соответствует области Ω_1, а $j = 2$ соответствует области Ω_2, $p_1(x) = a_1 + b_1 x$, $p_2(x) = a_2 + b_2 x$, где $a_i = \frac{2}{k_i+1}, \quad b_i = \frac{k_i-1}{k_i+1}, \ i = 1,2$ и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0} u_1(x,y) = c \lim_{y\to-0} u_2(x,y), \ \forall x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$\lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_1}{y} = \rho(x) \lim_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_2}{y} + \lambda(x), \ \forall x \in I, \tag{4}$$

где $\theta^{(j)}(x)(\theta^{(j)}_{k_1}(x),\ \theta^{(j)}_{k_2}(x))$ аффикс точки пересечения характеристики BC_j (кривой $x + [2k_j/(m+2)] \mid y \mid^{(m+2)/2} = 1$, лежащей внутри области Ω_j) с характеристикой, выходящей из точки $M(x_0, 0) \in I$; $c = const$; $\mu_1,\ \mu_2 = const$; $\delta_j(x),\ \rho(x),\ \lambda(x)$ заданные функции из класса $C^2(\overline{I}) \cap C^3(I)$, причем

$$\tau(1) = \tau'(1) = \tau''(1) = 0, \tag{5}$$

$\rho(x) - c \neq 0,\ k_1 > k_2 > 1,\ \delta^{(n)}_j(1) = 0,\ \lambda^{(n)}(1) = 0,\ n = 0, 1, 2.$

Теорема. Задача Г при выполнении условий

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1, \tag{6}$$

где $\lambda_k = \frac{b_k \mu_k}{b_1\mu_1 + b_2\mu_2 - 1} > 0,\ k = 1, 2$ однозначно разрешима.

Корректность задачи Г доказывается методом работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Узб.мат. журнал, 2010, є4, С.118-126.

ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Элмурадова Х. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
helmuradova@mail.ru

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка возникают, например [1], при определении фильтрационных параметров грунтов по некоторой информации о решении уравнения фильтрации. В данной работе рассмотрена прямая и обратная задача для псевдопараболического уравнения:

$$U_t(x,t) - U_{xxt}(x,t) - U_{xx}(x,t) = \int_0^t K(t-\tau)[U_{xxt}(x,\tau) + U_{xx}(x,\tau)]d\tau, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = \{(x,t) |\ x \in R,\ t \in (0,T]\}$$

Задача Коши. Найти функцию $U(x,t)$ принадлежащую $C_b^{(2,1)}(Q_T)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1) и начальное условие

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{2}$$

Обратная задача. Найти ядро $K(t)$, $t \in [0,T]$, если решения задача Коши (1), (2) задано для фиксированного $x_0 \in R$:

$$U(x_0, T) = f(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

Лемма. *Пусть* $U_0(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $K(t) \in C^1[0,T]$. *Тогда система уравнений* $(1) - (2)$ *эквивалентна следующей задаче:*

$$U_t - U_{xxt} - U_{xx} = r(0)U(x,t) - U_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t-\tau)U(x,\tau)d\tau \tag{4}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x) \tag{5}$$

где

$$r(t) = K(t) + \int_0^t K(t-\tau)r(\tau)d\tau \tag{6}$$

Теорема. *Пусть выполнены условие леммы и условие согласования* $U_0(x_0) = f(0)$*. Тогда существует единственное решение обратной задачи* $(3) - (6)$*.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Аблабеков. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Saarbrücken 2013.

IV SHO‘BA: HISOBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

СЕКЦИЯ № 4: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

SECTION No. 4: COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELLING

EXTREMAL FUNCTION FOR ERROR FUNCTIONAL OF OPTIMAL INTERPOLATION FORMULA IN $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ SPACE

Babaev S. S.[1,2], Olimov N. N. [2], Mahmudov M.M[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
bssamandar@gmail.com
[2] Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
b_samandar@mail.ru

We consider the following interpolation formula

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \cdot \varphi(x_\beta). \quad (1)$$

Here C_β and x_β $(\in [0,1])$ are *the coefficients* and *the nodes* of the interpolation formula (1), respectively[1-3].

We suppose that functions φ belong to the Hilbert space

$$W_{2,\sigma}^{(2,1)} = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi' \text{ is abs. cont. and } \varphi'' \in L_2(0,1)\},$$

equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \left\{ \int_0^1 (\varphi''(x) + \sigma\varphi'(x))^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

were $\sigma \in \mathbb{R}$ and $\sigma \neq 0$. The inner product of functions φ and ψ in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ is defined as

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \int_0^1 (\varphi''(x) + \sigma\varphi'(x))(\psi''(x) + \sigma\psi'(x))dx.$$

The error of the interpolation formula (1) is the following difference

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta),$$

which is the value of a functional ℓ at a function φ. The functional ℓ is defined as

$$\ell(z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x - x_\beta) \quad (3)$$

and it is called *the error functional.* Here δ is the Dirac delta-function.

According to the Riesz theorem any linear continuous functional ℓ in a Hilbert space is represented in the form of a inner product. Therefore, in our case, for any function φ from $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ space, we have

$$(\ell, \varphi) = \langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} \quad (4)$$

and

$$\|\ell\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}}.$$

Here, ψ_ℓ is the extremal function for the functional ℓ.

It should be noted that according to the Cauchy-Schwarz inequality the absolute value of the error of the formula (1) is estimated by the norm of the error functional as follows

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)*}} \cdot \|\varphi\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}}.$$

It should be noted that the function ψ_ℓ satisfying the equality in the last inequality is called *the extremal function* for the functional ℓ [4].

Using the integration by parts for the inner product $\langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}}$ we have

$$\langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \int_0^1 (\varphi''(x) + \sigma\varphi'(x))(\psi_\ell''(x) + \sigma\psi_\ell'(x))dx = \varphi'(x)(\psi_\ell''(x)$$

$$+\sigma\psi_\ell'(x))\Big|_0^1 - \varphi(x)(\psi_\ell'''(x) - \sigma^2\psi_\ell'(x))\Big|_0^1 + \int_0^1 (\psi_\ell^{IV}(x) - \sigma^2\psi_\ell''(x))\varphi(x)dx.$$

Hence for ψ_ℓ we come to the following differential equation

$$\psi_\ell^{IV}(x) - \sigma^2\psi_\ell''(x) = -\ell(x) \quad (5)$$

with the boundary conditions

$$(\psi_\ell''(x) + \sigma\psi_\ell'(x))\Big|_0^1 = 0, \quad \left(-\psi_\ell'''(x) + \sigma^2\psi_\ell'(x)\right)\Big|_0^1 = 0. \quad (6)$$

Theorem 1. *The solution of the boundary value problem (5)-(6) has the following form*

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_2(x) + \lambda_1 e^{-\sigma x} + \lambda_2,$$

where $G_2(x)$ is a fundamental solution of the operator $\frac{d^4}{dx^4} - \sigma^2\frac{d^2}{dx^2}$ and it has the form

$$G_(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)}{4\sigma^3}\left(-2\sigma x + e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}\right).$$

Furthermore, ψ_ℓ is the extremal function for the error functional ℓ.

References

1. Babaev S.S., Hayotov A.R. Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$. Calcolo (2019) 56:23, https://doi.org/10.1007/s10092-019-0320-9.
2. Babaev S.S, Davronov J.R., Mamatova N.H. On an optimal interpolation formula in the space $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$. Bulletin of the Institute of Mathematics, (2020), No.4, pp.1-12.
3. Hayotov A.R., Babaev S. S. Calculation of the coefficients of optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Uzbek Mathematical Journal, 2014, no.3, pp.126-133. (in Russian)
4. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHM USING OPTIMAL INTERPOLATION FORMULA IN $W_2^{(1,0)}$ SPACE

Babaev S.S.[1,2], Polvonov S.Z. [2], Murodova G.B.[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
bssamandar@gmail.com;
[2] Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
b_samandar@mail.ru

We apply interpolation to the convolution $\left(\mathcal{F}_D^{-1}A\right) * (\mathcal{R}_D f)$ where A is the low-pass filter. Denoting this interpolated function by $\mathcal{I}$, we then approximate the value $f(x_m, y_n)$ at each point in the image grid by

$$\begin{aligned} f(x_m, y_n) &\approx \frac{1}{2}\mathcal{B}_D\mathcal{I}(x_m, y_n) \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{I}\left(x_m cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) + y_n sin\left(\frac{k\pi}{N}\right), \frac{k\pi}{N}\right) \end{aligned}$$

As a test case, we will use the radially symmetric phantom shown on the left in Fig.1.

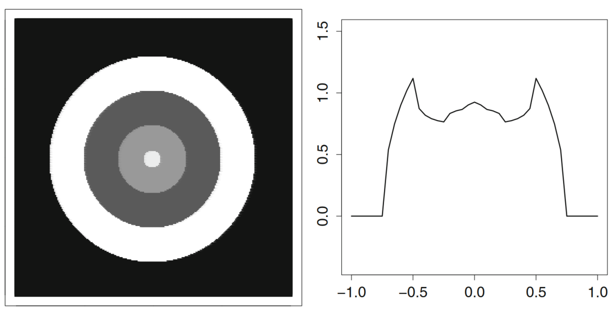


Fig.1. A radially symmetric attenuation function and its Radon transform.

- We use Python to compute the (discrete) Radon transform of this phantom;

- The next step is to choose a low-pass filter A and compute its discrete inverse Fourier transform, $\mathcal{F}_D^{-1}A$. When we interpret our low-pass filter as a $2L$-periodic discrete function that vanishes outside the interval $[-L, L]$, the effective sample spacing for $\mathcal{F}_D^{-1}A$ is given by $1/(2L)$. We then compute the discrete convolution $\left(\mathcal{F}_D^{-1}A\right) * (\mathcal{R}_D f)$. The two discrete functions must have the same sample spacing, so we want to have $1/(2L) = \tau$. In practice, the value of τ is determined by the scanner, and,therefore, we set $L = 1/(2\tau)$ for the low-pass filter.

For our test case, we use the Shepp-Logan filter and compute a separate discrete convolution for each angle.

- Next, we select a method of interpolation. We will evaluate the discrete back projection only at a finite set of points $\{(x_m, y_n)\}$ that define the grid in which the final image is to be presented. We need interpolation in order to assign values to $\left(\mathcal{F}_D^{-1}A\right) * (\mathcal{R}_D f)$ at the points
$$\{(x_m cos(k\pi/N) + y_n sin(k\pi/N), k\pi/N)\}.$$

  We could execute an optimal interpolation formula
$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(x) \cdot \varphi(x_\beta),$$
  with equal spaced nodes in $W_2^{(1,0)}$ space [1-3]. Coefficients of the optimal interpolation formula have the following form
$$\begin{aligned} \mathring{C}_\beta(z) = \quad & \tfrac{1}{2(1-e^{2h})}\Bigg[\operatorname{sgn}(z - h\beta - h) \cdot (e^{h\beta+2h-z} - e^{z-h\beta}) \\ & \quad + \operatorname{sgn}(z - h\beta + h) \cdot (e^{h\beta-z} - e^{z-h\beta+2h}) \\ & \quad + (1 + e^{2h}) \cdot \operatorname{sgn}(z - h\beta) \cdot (e^{z-h\beta} - e^{h\beta-z})\Bigg], \\ & \beta = 0, 1, ..., N. \end{aligned}$$

  In this case, for each angle in the scan, a separate spline is computed to fit the data given by the corresponding row of the matrix of filtered X-ray data. Then, for each point (x_m, y_n) in the image grid, we interpolate values at the desired points.

- Now that we have carried out the interpolation, we finish by applying the discrete back projection. For each point in the image grid, we compute the average, over all angles in the scan, of the corresponding interpolated values of the filtered X-ray data.

References

1. **Babaev S.S., Hayotov A.R.** Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$. *Calcolo* (2019) 56:23, https://doi.org/10.1007/s10092-019-0320-9.
2. **Babaev S.S, Davronov J.R., Mamatova N.H.** On an optimal interpolation formula in the space $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, (2020), No.4, pp.1-12.
3. **Hayotov A.R., Babaev S.S.** Calculation of the coefficients of optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. *Uzbek Mathematical Journal*, 2014, no.3, pp.126-133. (in Russian)

EXTREMAL FUNCTION OF THE OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN THE SPACE $\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}$ OF PERIODIC FUNCTIONS

Hayotov A.R.[1,2], Khayriev U.N.[1]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan.

hayotov@mail.ru; khayrievu@gmail.com.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(hk). \tag{1}$$

Here C_k are the coefficients of formula (1), $h=\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1)$.
We denote by $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1)$ the subspace of $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ [1,3] consisting of real-valued, 1-periodic functions. Notice that every element of the space $\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}$ satisfies the following condition of 1-periodicity [2]

$$\varphi(x+\beta)=\varphi(x) \text{ for } x \in \mathbb{R} \text{ and } \beta \in \mathbb{Z}.$$

This space is equipped by the norm

$$\|\varphi\|_{\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}} = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The error of the quadrature formula (1) is the following difference

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \varphi(z)dz - \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(hk),$$

where

$$(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(z)\varphi(z)dz,$$

and the corresponding error functional is

$$\ell(z) = \left(\varepsilon_{(0,1]}(z) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(z-hk) \right) * \phi_0(z). \tag{2}$$

Here $\varepsilon_{(0,1]}(z)$ is the indicator of the interval $(0,1]$, δ is the Dirac's delta-function, $\varphi \in \widetilde{W_2}^{(m,m-1)}$, $\phi_0(z) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(z-\beta)$.

The problem of constructing optimal quadrature formulas in the space $\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}$ is the calculation of the following quantity:

$$\left\| \mathring{\ell} \right\|_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)*}} = \inf_{C_k} \sup_{\|\varphi\|_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}}=1} |(\ell,\varphi)|.$$

The error of the quadrature formula (1) is estimated by the norm of the error functional. According to the Riesz theorem any liner continuous functional ℓ in a Hilbert space is represented in the form of an inner product. Therefore, in our case, for any function φ from $\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}$ space, we have

$$(\ell,\varphi)=\langle\psi_\ell,\varphi\rangle_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}} \tag{3}$$

and

$$\|\ell\|_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)*}}=\|\psi_\ell\|_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}}. \tag{4}$$

Hence for calculation of the norm of the error functional we need to calculate the extremal function ψ_ℓ. Then using (3) and (4), we derive

$$(\ell,\psi_\ell)=\|\ell\|^2_{\widetilde{W_2}^{(m,m-1)*}}.$$

In the present work we obtain the extremal function and we have the following result.

Theorem 1. *The extremal function ψ_ℓ of the error functional (2) of the optimal quadrature formula (1) has the form:*

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+p,$$

where $p=\text{const}$ *and*

$$G_m(x)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi i\beta)^{(2m)}-(2\pi i\beta)^{(2m-2)}}.$$

REFERENCES

1. Babaev S.S., Hayotov A.R. Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$. //Calcolo, 2019, v. 56, no. 3, pp. 1–25.
2. Hayotov A.R., Khayriev U.N, Makhkamova D. Optimal quadrature formula for approximate calculation of integrals with exponential weight and its application. //Bulletin of the Institute of Mathematics, no 2, vol 4, 2021, pp. 99–108.
3. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}$ space.//Calcolo 2014, 51:211-243. doi:10.1007/s10092-013-0076-6.

ГОСТ Р 34.12-2015 (KUZNECHIK) SHIFRLASH ALGORITMINI TAHLILI

Berdimurodov M.A

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, Uzbekistan,
mansur_alisherovich@mail.ru

Kriptografik algoritmlardagi har bir akslantirishning matematik modelini qurish, bu akslantirishlarning kriptotahlilchi tomonidan kriptobardoshligini nazariy baholash uchun dolzarb hisoblanadi. Biz bu tezisda ГОСТ Р 34.12-2015 (Kuznechik) kriptografik algoritmining har bir akslantirishini matematik modelini tuzdik. Hosil bo‘lgan bul funksiyalar yordamida akslantirishlarning ta’sir bitlarni, algebraik chiziqsizligini aniq baholash mumkin bo‘ladi. [2]

Kuznechik (eng. Kuznyechik yoki rus. Кузнечик) - simmetrik blokli shifrlash algoritmi bo‘lib, blok o‘lchami 128 bit va kalit uzunligi 256 bit SP-tarmog‘iga asoslangan. Nomi КУЗНЕЧИК = КУЗнецов, НЕЧаев И Компания. Shifrlash algoritmida kalit aralashtirish (Xor), S - chiziqsiz akslantirish, L - chiziqli akslantirish kabi amallar bor. [3]

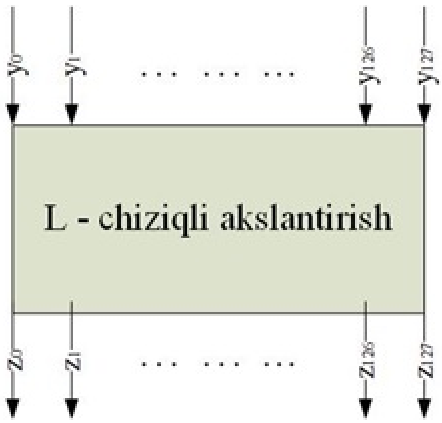
Kalitni xor qo‘shish. Kalitni xor qo‘shish $X(K_i, M)$ - raund kalitini qo‘shish akslantirishi bo‘lib, chiquvchi baytlar quyidagicha (1) formula bilan aniqlangan.

$$\begin{cases} X(K_i, M) = K_i \oplus M, i = \overline{1,10} \\ x_j = k_j \oplus m_j, j = \overline{0,127} \end{cases}$$

*S***-chiziqsiz akslantirish.** $S(X(K_i, M))(i = \overline{1,10})$ -bu chiquvchi baytlarni matematik murakkab bo‘lgan biektiv akslantirish asosida akslantirish hisoblanadi. ГОСТ Р 34.12-2015 da oldindan aniqlangan statik jadval asosida almashtirish amalga oshiriladi. [1]

S-chiziqsiz akslantirishda $\overline{abcdefgh}$ kiruvchi, $\overline{y_0y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7}$ chiquvchi bayt kabi belgilashlar kiritamiz. Bu chiziqsiz akslantirishdagi y_i $(i = \overline{0,7})$ chiquvchi bitlarni 6 o‘zgaruvchili (a, b, c, d, e, f, g, h) 8 ta funksiya shakldа ifodalash mumkin.

L **- chiziqli akslantirish.** L-chiziqli akslantirish $L(S(X(K_i, M)))$ - bu $GF(2^8)[x]/x^8 + x^7 + x^6 + x + 1$ maydonda ko‘phadlar ustida amal bo‘lib, undagi akslantirish chiquvchi bitlari formula bilan aniqlanadi.



$$\begin{cases} z_0 = f_0(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_1 = f_1(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_2 = f_2(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_3 = f_3(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_4 = f_4(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_5 = f_5(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_6 = f_6(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_7 = f_7(y_0, y_1, \ldots, y_{127}) \\ z_{8+j} = y_j, \quad j = \overline{0,119} \end{cases}$$

ГОСТ Р 34.12-2015 (Kuznechik) kriptografik algoritmi 10 raund va har bir raundda yuqorida aytib o‘tilgan 3 ta akslantirish mavjud. Bu akslantirishlarda kalitni xor qo‘shish amalidan chiquvchi bitlar S-chiziqsiz akslantirishga kiruvchi bitlar, S-chiziqsiz akslantirishdan chiquvchi bitlar L-chiziqli akslantirishga kiruvchi bit hisoblanadi. Mos ravishda raundga kiruvchi bit undan oldingi raunddan chiquvchi bit hisoblanadi.

Xulosa

Har bir akslantirishning matematik modelini qurish, bu akslantirishlarning kriptobardoshligini, regulyarligini hamda kriptotahlilda kerak bo'ladigan boshqa parametrlarini baholashda dolzarb hisoblanadi. Biz bu tezisda ГОСТ Р 34.12-2015 (Kuznechik) kripto-grafik algoritmining har bir akslantirishini matematik modelini tuzdik. Hosil bo'lgan bul funksiyalar yordamida akslantirishlarning algebraik chiziqsizligini aniq baholash mumkin bo'ladi. Masalan S - chiziqsiz akslantirishda eng yuqori chiziqsizlik 7 ga teng ekan. Algebraik kriptotahlilda kriptografik algoritmni bul funksiya shaklda yozish, shu funksiya asosida bul tenglamalar sistemasiga olib kelib buni yechish orqali yoki yechishni nazariy baholash orqali kriptografik algoritmni kriptobardoshligini baholash mumkin bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Кабулов В.К., Кабулов А.В., Норматов И.Х. Алгоритмизация в теории управляющих систем. Ташкент.: Навруз, 2017.
2. Кабулов В.К., Кабулов А.В., Норматов И.Х. Алгоритмические и логические методы в теории управляющих систем. Ташкент.: Навруз, 2019.
3. https://en.wikipedia.org

SOBOLEV FAZOSIDA VAZNLI OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR VA KOMPYUTER TOMOGRAFIYASIDA TASVIRLARNI QAYTA TIKLASH

Bozarov B.I.[1,2], Nuraliyev F.A.[2,3]
[1]Farg'ona politexnika instituti, Farg'ona, O'zbekiston
[2]V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O'zbekiston b.bozarov@farpi.uz;
[3]Toshkent davlat transport unversiteti, Toshkent, O'zbekiston
nuraliyev@mail.ru

Bizga ma'lumki, kompyuter tomografiyasida tasvirlarni qayta tiklash va tahlil qilishda odatda

$$\int_0^1 e^{2\pi\omega ix}\varphi(x)dx \tag{1}$$

aniq integralni hisoblash talab qilinadi. Bunday aniq integralni yoki uning taqribiy qiymatini hisoblash uchun $\omega \in \mathbb{R}$ bo'lganda [1] da $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida optimal kvadratur formulalar qurilgan va ular Kompyuter Tomografiyasida (KT) tasvirlarni qayta tiklash uchun tatbiq qilingan.

Bu ishda (1) ni taqribiy integrallash uchun

$$e^{2\pi\omega ix} = \cos(2\pi\omega x) + i\sin(2\pi\omega x)$$

Eyler formulasi orqali uni ikkita integrallarga ajratib, ularni taqribiy hisoblash uchun quyidagi ko'rinishdagi optimal kvadratur formulalarni qaraymiz

$$\int\limits_0^1 \sin(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_s[\beta]\varphi[\beta] \tag{2}$$

va

$$\int_{0}^{1} \cos(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_c[\beta]\varphi[\beta]. \quad (3)$$

Yuqoridagi optimal kvadratur formulalarning koeffisiyentlari uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli [2,3].

Teorema 1. *Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida (2) - ko'rinishidagi Sard ma'nosida optimal kvadratur formulalarning $\omega \in \mathbb{R}$ va $\omega h \notin \mathbb{Z}$ bo'lganda koeffisiyentlari quyidagicha*

$$C[0] = h\left[\frac{1}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega}\frac{\cos(\pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{m_{s,k}q_k - n_{s,k}q_k^N}{q_k - 1}\right],$$

$$C[\beta] = h\left[K_{m,\omega}\sin(2\pi\omega h\beta) + \sum_{k=1}^{m-1}\left(m_{s,k}q_k^{\beta} + n_{s,k}q_k^{N-\beta}\right)\right], \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C[N] = h\left[-\frac{\cos(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} + K_{m,\omega}\frac{\cos(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{-m_{s,k}q_k^N + n_{s,k}q_k}{q_k - 1}\right],$$

bu yerda $[\beta] = h\beta$, q_k lar $(2m-2)$ - darajali Eyler - Frobenius ko'phadi $E_{2m-2}(x)$ ning $|q_k| < 1$ shartni qanoatlantiruvchi ildizlari, $K_{m,\omega}$, $m_{s,k}$ va $n_{s,k}$ ma'lum qiymatlar.

Teorema 2. *Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida (3) - ko'rinishidagi Sard ma'nosida optimal kvadratur formulalarning $\omega \in \mathbb{R}$ va $\omega h \notin \mathbb{Z}$ bo'lganda koeffisiyentlari quyidagicha*

$$C[0] = h\left(\frac{K_{m,\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{m_{c,k}q_k - n_{c,k}q_k^N}{q_k - 1}\right),$$

$$C[\beta] = h\left(K_{m,\omega}\cos(2\pi\omega h\beta) + \sum_{k=1}^{m-1}\left(m_{c,k}q_k^{\beta} + n_{c,k}q_k^{N-\beta}\right)\right), \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C[N] = h\left(-\frac{\sin(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega}\frac{\sin(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{-m_{c,k}q_k^N + n_{c,k}q_k}{q_k - 1}\right),$$

bu yerda $[\beta] = h\beta$, q_k lar $(2m-2)$ - darajali Eyler - Frobenius ko'phadi $E_{2m-2}(x)$ ning $|q_k| < 1$ shartni qanoatlantiruvchi ildizlari, $K_{m,\omega}$, $m_{c,k}$ va $n_{c,k}$ ma'lum qiymatlar.

ADABIYOTLAR

1. Hayotov A.R., Soomin Jeon, Chang-Ock Lee. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space // Journal of Computational and Applied Mathematics. 372. July 2020. 112713.
2. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space.AIP Conference Proceedings 2365, 020022 (2021);
https://doi.org/10.1063/5.0056954
3. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formula with cosine weight function. Problems of Computational and Applied Mathematics 2021, No 4, pp. 106-118

BITTA SINGULYAR KOEFFITSIENTGA EGA BO'LGAN GIPERBOLIK TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN BOSHLANG'ICH MASALANI TO'RLAR USULIDA YECHISH

Fozilova M.R.[1]
Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston,
e-mail: fozilova-m.@mail.ru;

Ushbu $AB = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$, $AC = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1/2,\ \ x + y = 0\}$, $BC = \{(x,y):\ 1/2 \le x \le 1,\ \ x - y = 1\}$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan Ω sohada

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad 0 < \beta < 1/2, \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz.

Ω sohada (1) tenglama giperbolik tipga tegishli bo'lib, AB kesma buzilish chizig'i yoki singulyarlik chizig'i hisoblanadi.

Ω sohada (1) tenglama uchun quyidagi ko'rinishi o'zgartirilgan Koshi masalasini qaraymiz va to'rlar usuli yordamida yechimni topamiz.

Ko'rinishi o'zgartirilgan Koshi masalasi. Shunday $u(x,y)$ funksiya topilsinki, u Ω sohada (1) tenglamani va quyidagi

$$\left.\begin{array}{r} u(x,0) = \tau(x) \\ \lim\limits_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \nu(x) \end{array}\right\} \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin.

Bu masalaning yechimini to'rlar usuli yoki chekli ayirmalar usuli yordamida yechishni ko'rib chiqamiz.

Izlanayotgan $u = u(x,y)$ funksiyaning to'rning tugunlaridagi qiymatini $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ (bu yerda $h > 0,\ l < 0-$qadam, $i = 1, 2, ...;\ k = 1, 2, ...$) orqali belgilaymiz [1,2]. Har bir $(x_0 + ih,\ y_0 + kl)$ ichki nuqtalardagi xususiy hosilalarni ayirma- lar nisbati bilan quyidagicha almashtiramiz:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}.$$

(1) tenglamada hosilalar uchun simmetrik formulalardan foydalanib, ayirmali tenglamani topamiz:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} - \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} - \frac{2\beta}{kl} \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} = 0 \tag{2}$$

bu erda $x = ih,\ \ y = kl$.

(2) da $\alpha = l/h$ belgilash kiritib, uni yozamiz:

$$\left(1 + \frac{\beta}{k}\right) u_{i,k+1} = 2u_{ik} - \left(1 - \frac{\beta}{k}\right) u_{i,k-1} + \alpha^2 \left(u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}\right). \tag{3}$$

(3) tenglamaning $\alpha \leq 1$ bo‘lganda turg‘un ekanligi isbotlangan.

(3) tenglama $\alpha = 1$ bo‘lganda eng sodda ko‘rinishni oladi:

$$\left(1+\frac{\beta}{k}\right)u_{i,k+1} = u_{i+1,k} + u_{i-1,k} - \left(1-\frac{\beta}{k}\right)u_{i,k-1}. \tag{4}$$

(4) tenglamadan ($0 \leq x \leq 1$, $-1/2 < y \leq T$, $T-$eng kichik son) topilgan taqribiy yechimning xatoligi quyidagicha baholanadi:

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{h^2}{12}\left[(M_4 h + 2M_3)\,T + T^2 M_4\right], \tag{5}$$

bu yerda $\tilde{u}-$ aniq yechim,

$$M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right|\right\}, \qquad (k = 3, 4).$$

Bu sxema oshkor sxemadir, chunki (3) tenglama $u\,(x, y)$ funksiyaning y_{k+1} qatlamdagi qiymatini topishga imkon beradi, agar oldingi ikki qatlamdagi qiymatlar ma’lum bo‘lsa.

Demak, (1), (2) ko‘rinishi o‘zgartirilgan masalaning taqribiy echimini topish uchun yechimning ikki boshlang‘ich qatlamdagi qiymatini bilish zarur. Bularni boshlang‘ich shartlardan quyidagi usuldan topish mumkin.

(2) boshlang‘ich shartlarda $(-y)^{2\beta} u_y\,(x, y)\Big|_{y=0}$ hosilani quyidagi ayirmalar nisbati bilan almashtiramiz:

$$\frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \nu\,(x_i) = \nu_i.$$

$u\,(x, y)$ funksiyaning $j = 0$, $j = 1$ qatlamdagi qiymatlarini topish uchun

$$u_{i0} = \tau_i, \qquad u_{i1} = \tau_i + l\nu_i$$

ga ega bo‘lamiz.

Bu holda u_{i1} qiymatlarining xatoligini baholash quyidagicha bo‘ladi:

$$|\tilde{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{\alpha h}{2} M_2,$$

bu yerda

$$M_2 = \max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right\}.$$

ADABIYOTLAR

1. Isroilov M. Hisoblash metodlari. -Toshkent: O’qituvchi. 1988.-324 b.

2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численний метод анализа.-М.: Наука. 1967.-368 с.

GILBERT FAZOSIDA OPTIMAL AYIRMALI FORMULA QURISH

Hayotov A. R.[1,2], Karimov R. S.[1]

[1]O‘zFA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston

[2]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston

hayotov@mail.ru; roziq.s.karimov@gmail.com

Quyidagi [0,1] kesmada $y(0) = y_0$ boshlang‘ich shart bilan berilgan differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish talab qilinsin [1]

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Ushbu [0,1] kesmani uzunligi $h = \frac{1}{N}$ ga teng bo‘lgan N ta bo‘lakka bo‘lamiz va qidirilayotgan $y(x)$ funksiyaning y_n taqribiy qiymatlarini $x_n = nh$, $n = 0, 1, ..., N$ tugun nuqtalarda hisoblaymiz. Bunday usullarning klassik namunasi sifatida Eyler usulini olishimiz mumkin.

Biz (1)-tenglamani taqribiy yechish uchun quyidagi ko‘rinishdagi ayirmali formulani qaraymiz [2]

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi\,(h\beta) \cong h \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,1} \varphi'\,(h\beta), \tag{2}$$

bunda $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, C_β va $C_{\beta,1}$ lar (2)-formulaning koeffitsiyentlari, φ funksiyalar $W_2^{(2,1)}(0,1)$ Gilbert fazosiga tegishli bo‘lib, u fazo quyidagicha aniqlanadi (masalan, [3] va [4] ishlarga qarang.)

$$W_2^{(2,1)}(0,1) = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} | \varphi' - \text{ abs. uzluksiz, } \varphi'' \in L_2(0,1)\}.$$

$W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoning φ va ψ funksiyalari uchun skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritilgan

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(2,1)}} = \int_0^1 \Big[(\varphi''(x) + \varphi'(x))(\psi''(x) + \psi'(x))\Big] dx. \tag{3}$$

Shuningdek, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda (3)-skalyar ko‘paytmaga mos norma quyidagicha aniqlanadi

$$\|\varphi | W_2^{(2,1)}\| = \Big\{ \int_0^1 \Big[(\varphi''(x) + \varphi'(x))^2\Big] dx \Big\}^{1/2}. \tag{4}$$

(2)-formulada keltirilgan yig‘indilar orasidagi quyidagi ayirmaga

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi\,(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,1} \varphi'\,(h\beta)$$

(2)-ayirmali formulaning xatoligi deyiladi [5], hamda unga

$$\ell(x) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,1} \delta'(x - h\beta) \tag{5}$$

ko‘rinishdagi xatolik funksionali mos keladi. Bu yerda $\delta(x)$ Dirakning delta-funksiyasi. Yuqorida (ℓ, φ) bu ℓ xatolik funksionalning φ funksiyadagi qiymati bo‘lib

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx$$

ko‘rinishida aniqlanadi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, $\ell(x)$ xatolik funksionali $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida aniqlanganligi uchun u $(\ell,1)=0$ va $(\ell,e^{-x})=0$ shartlarni qanoatlantiradi. Oxirgi ikki tengliklar quriladigan ayirmali formula o'zgarmas songa va e^{-x} ga aniq bo'lishini bildiradi:

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan, (2)-ayirmali formula xatoligining absolyut qiymati uchun quyidagi bahoga ega bo'lamiz

$$|(\ell,\varphi)| \leq \|\varphi|W_2^{(2,1)}\| \cdot \|\ell|W_2^{(2,1)*}\|.$$

Demak, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda (2)-ayirmali formulaning absolyut xatoligi $W_2^{(2,1)*}(0,1)$ qo'shma fazodagi ℓ xatolik funksionali normasi yordamida yuqoridan baholanadi. Ushbu ishning asosiy natojasi shu yuqori baho uchun quyidagi olingan ifodadir.

1-Teorema. *(2)-ayirmali formulaning (5)-xatolik funksionalining normasi uchun*

$$\|\ell|W_2^{(2,1)*}\|^2 = \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} C_\gamma C_\beta G_2(h\gamma-h\beta) - 2h\sum_{\gamma=0}^{k} C_{\gamma,1}\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta G_2'(h\gamma-h\beta) -$$

$$-h^2\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} C_{\gamma,1}C_{\beta,1}G_2''(h\gamma-h\beta)$$

ifoda o'rinli, bunda $G_2(x) = \frac{sign(x)}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x\right)$, $G_2'(x) = \frac{sign(x)}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)$ *va* $G_2''(x) = \frac{sign(x)}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$.

ADABIYOTLAR

1. **Babuska I., Vitasek E., Prager M.** Numerical processes for solution of differential equations. // Mir, Moscow, 1969, 369 p.
2. **Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N.** On a construction method of optimal difference formulas. // AIP Conference Proceedings, 2365, 020032, 2021.
3. **Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.** Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space. // Calcolo, Springer, 2014, V.51, pp. 211-243.
4. **Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.** Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}$ space. // BIT Numer Math, Springer, 2013, V.53, pp. 545-563.
5. **Hayotov A.R., Karimov R.S.** $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda optimal ayirmali formula. // Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari xalqaro miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman tezislar to'plami., Buxoro, 2021, 206-208.

BIR O'LCHOVLI GIPERBOLIK TENGLAMANI CHEKLI ELEMENTLAR USULI BILAN YECHISH

Imomova Sh. M.[1], Xamidov M. O.[1]

[1]Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

shafoati@mail.ru;

Quyidagi masalani qaraymiz [1,2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\left(x,t\right)u\left(x,t\right) = f\left(x,t\right) \quad (1)$$

tenglamaning

$$\begin{aligned} &u(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<l \\ &u(0,t)=u(l,t), \quad 0<t<T \end{aligned} \quad (2)$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin , bu yerda $t \in (0,T)$, $l=1$,
$\Omega = \{(x,t) : t \in (0,T)\,, x \in (0,1)\}$,
$a = const > 0$, $b(x,t) > 0$ chegaralangan funksiya,
$f(x,t) \in H = L_2(\Omega)$, $u_0(x \in L_2(0,1)$.
$a = \frac{1}{4}$, $b=1$, $f(x,t) = \cos 2 \cdot \pi(x-t) + \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \sin 2 \cdot \pi\,(x-t)$, $u(x,0) = \cos 2 \cdot \pi\,(x-t)$,
$l = 1$ deb olamiz.

Ushbu masala yechimi uchun Bubnov-Galerkin algoritmini bayon etamiz. $[0,1]$ kesmada $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ to'rni kiritamiz. Bu yerda $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = \underset{i}{max}\, h_i$, $h \le c_1 \cdot \underset{i}{\min} h_i, \underset{i}{max}\,|h_i - h_{i-1}| \le c_2 \cdot h^2$ belgilashlar va tengsizliklardan foydalanamiz. To'rning har bir tugun nuqtasiga $\varphi_i\,(x)$ bazis funksiyani mos qo'yamiz. Bazis funksiya bo'lakli-chiziqli funksiyadan iborat bo'lsin:

$$\varphi_i\,(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i)\,; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_{\mathrm{i}}, x_{i+1})\,; \quad i = 1, ..., N-1, \\ 0, \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1})\,; \end{cases}$$

$$\varphi_N\,(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N)\,; \\ \frac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1)\,; \\ 0, \quad x \notin (x_0, x_1) \bigcup (x_{N-1}, x_N)\,; \end{cases}$$

va $i = 0$, $i = N$ uchun davriylik shartiga ko'ra $\varphi_0 = \varphi_N$ o'rinli bo'ladi.
$\{\varphi_i\,(x)\}$ $(1 \le i \le N)$ funksiyalar bazis sifatida qabul qilinadi va $u_h(x,t)$ taqribiy yechim
$u_h\,(x,t) = \sum_{i=1}^{N} a_i\,(t)\,\varphi_i\,(x)\,,$ $\qquad a_0(t) = a_N(t)$
ko'rinishda izlanadi, bu yerda

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \varphi_j\right)(t) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial u_h}{\partial x}, \varphi_j\right)(t) + (u_h, \varphi_j)\,(t) = \underset{1 \le j \le N}{(f, \varphi_j)\,(t)} \quad (3)$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasi va $(u_h, \varphi_i)\,(0) = (u(0), \varphi_i)$,
$1 \le i \le N$ boshlang'ich shartlardan aniqlanadi.
$u_h\,(x,t)$ taqribiy yechim ifodasini (3) tenglikka qo'yib

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t}\,[a_i\,(t)]\,(\varphi_i, \varphi_j) + \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i\,(t) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \varphi_j\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\,(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j)\,(t)\,, \quad 1 \le j \le N$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Turg'unlik.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \frac{da_i(t)}{dt}\,(\varphi_i, \varphi_j) + \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i\,(t) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \varphi_j\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i\,(t) \cdot (\varphi_i, \varphi_j) \\ = (f, \varphi_j)\,(t) \\ \sum_{i=1}^{N} a_i\,(0) \cdot (\varphi_i, \varphi_j) = (u_0, \varphi_j)\,, \quad j = 1, N; \quad i = 1, N \quad (4) \end{cases}$$

Quyidagi $\psi^{\pm 1}-$ siljish operatorini kiritamiz:

$$\psi^{\pm 1} u_h\,(t, x_n) = u_h\,(t, x_n \pm h)$$

va L_x^n-interpolyatsiya, $\xi-$ayirmali hosila

$$L_x^n = (\varphi_{i-1}, \varphi_i) \cdot \psi + (\varphi_i, \varphi_i) + (\varphi_{i+1}, \varphi_i) \cdot \psi^{-1},$$

$$\xi = \left(\frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x}, \varphi_i\right) \cdot \psi + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \varphi_i\right) + \left(\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}, \varphi_i\right) \cdot \psi^{-1}$$

U holda (4) sistema

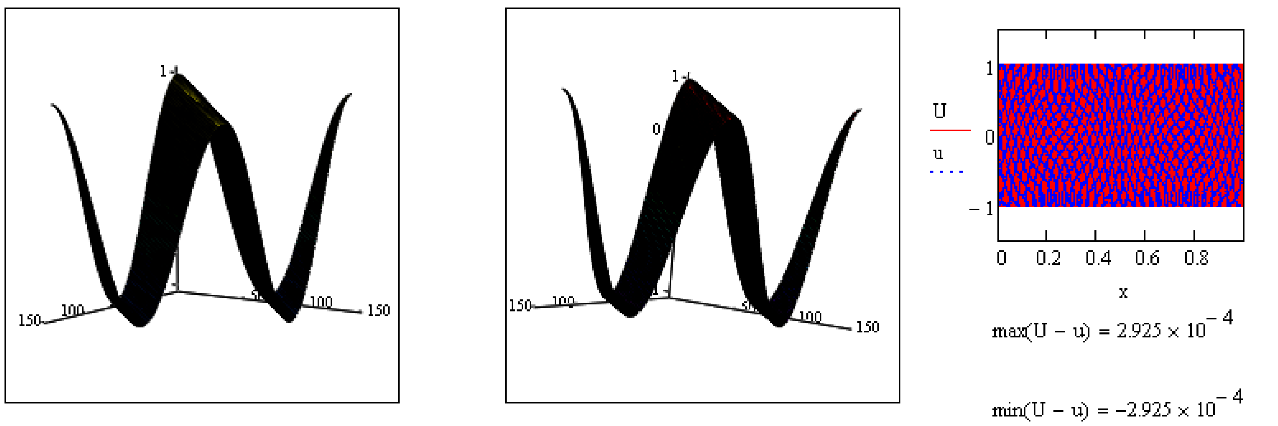
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(L_x u_h\right) + \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot u_h + L_x u_h = \left(f, \varphi_j\right), \\ L_x u_h\left(0, x_i\right) = \left(u_0, \varphi_j\right) \end{cases} \qquad (5)$$

ko‘rinishda yoziladi.
Ishda (5) masala uchun integral tengsizligi haqidagi lemmaga asosan

$$I(t) \le I(0) \cdot e^{\frac{M}{2}t} + \frac{N}{M}\left(e^{\frac{M}{2}t} - 1\right) (6)$$

energetik baho olingan. Bu yerda $I(t) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (\tilde{u})^2$, $M = 2\,|b|$,$N = 2\max\limits_{t}\left(h \sum_{i=1}^{N-1} f\right)^{1/2}$.
Masalani sonli yechimini topish uchun Mathcad tizimida dastur tuzildi va quyidagi natijaga erishildi:

n = 150



U Тақрибий ечим   u Аниқ ечим

Adabiyotlar

1. Деклу Ж. Метод конечных элементов . М.: Мир 1976.
2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука 1981.

KLASSIK CHEGARAVIY MASALALARNI STOXASTIK USULDA YECHISH

Nafasov A. Y.
Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti, Toshkent, O’zbekiston,
nafasov.azam0080@mail.ru;

Laplas tenglamasi uchun Dirixle chegaraviy masalasini yechish

G sohada aniqlangan G^0 chegara bilan chegaralangan quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamani qaraymiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y). \qquad 1$$

Bu yerda $u = u(x,\ y)$ - izlanayotgan funksiya. (1) tenglama $F\,(x, y) = 0$ bo'lganda *Laplas tenglamasi* deyiladi. Faraz qilamiz G^0 chegarada bir nechta $g(x, y)$ shartlar qo'yilgan bo'lsin. (1) tenglamaning $u(x,\ y)$ yechimini topish chegarada $g(x, y)$ bilan ustma – ust tushadi :

$$u = u\,(x,\ y) \quad G_0 = g \qquad 2$$

(2) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi (1) tenglamani yechimini izlash masalasi birgalikda *Dirixle masalasi* deyiladi. Bu nomalum funksiyaning soha ichidagi nuqtada qiymatini toppish masalasini qaraymiz. Bunday tenglamani yaqinlashtirib yechish uchun tekislikda h qadam bilan yetarlicha kichkina kvadrat tur tanlaymiz.
Bu to'rning tugun nuqtalari koordinatalari $x_i = i * h$, $y_j = j * h$ bo'lsin. $u(x_i,\ y_j)$ va $F(x_i,\ y_j)$ larning qiymatini qisqalik uchun u_{ij} va F_{ij} ko'rinishida belgilaymiz. $(i,\ j)$ tugunlar ichki deyiladi, agar unga qo'shni bo'lgan 4 ta $(i-1,\ j)$, $(i+1,\ j)$, $(i,\ j-1)$, $(i,\ j+1)$ tugunlar bilan $G + G^0$ qarashli bo'lsa.
(1) tenglamani ichki $(x_i,\ y_j)$ tugunlar bo'yicha quydagi chekli ayirmali tenglamaga o'tkazamiz.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

Bu tenglikni quydagicha yozish mumkin:

$$u_{i,j} = (1/4)(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \qquad 3$$

Buni quydagicha yozish mumkin:

$$u_{i,j} = 1/4u_{i+1,j} + 1/4u_{i-1,j} + 1/4u_{i,j+1} + 1/4u_{i,j-1}$$

Bunda $u\,(x, y) = M(x_T, y_T)$, bu erda M –matematik kutilish belgisi. Yechim toppish uchun maxsus tasoddifiy jarayon quramiz. Masalan har bir tugun nuqtandagi zarrachani $\frac{1}{4}$ ehtimollik bilan 4 tarafga surish mumkin. Buning uchun EHM da (0; 1) oraliqda tasodifiy miqdor olamiz (RND) va (0; 1) oraliqni 4 ta teng bo'lakka ajratamiz. Tasodifiy miqdorni (0; 1) oraliqqa tashlaymiz. Agar tasodifiy miqdor (0; 1/4) oraliqqa tushsa, tugun nuqta o'ng tomonga ko'chadi; agar tasodifiy miqdor (1/4; 1/2) oraliqqa tushsa, tugun nuqta chap tomonga ko'chadi; agar tasodifiy miqdor (1/2; 3/4) oraliqqa tushsa, tugun nuqta tepaga o'tadi; agar tasodifiy miqdor (3/4; 1) oraliqqa tushsa, tugun nuqta pastga o'tadi. Ushbu jarayon zarrach chegaraga chiqqanch davom etadi. Bu tajribani n marta o'tkazib, n ta tasofiy miqdor olish mumkin va tugun nuqtani tasodifiy harakatlantirib qaysidir holatlarda chegaraga chiqishini ko'zatish mumkin. Bizga chegaraviy shartlar oldinda berilgan. Zarrachni chegaraga chiqqandagi qiymatini har safar hisoblab qo'yamiz. O'tkazilgan n ta tajriba orqali funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymatlarini hisoblash mumkin. Ya'ni

$$\varphi\,(x_0,\ \ y_0) = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ \dots\ + \varphi_n}{n}$$

Bu yerda $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ \dots\ + \varphi_n$ lar funksiyaning chegaradagi qiymatlari.
Misol. $0 \le x \le 1$, $\quad 0 \le y \le 1$ birlik kvadratda $\quad (x,\ 0) = x^2$, $\quad (0,\ y) = -y^2$, $\quad (x,\ 1) = x^2 - 1$, $\quad (1,\ \ y) = 1 - y^2$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplas

tenglamasi berilgan bo'lsin. $u\,(2,\ 1)$ ni qiymati hisoblansin. $h = 1/4$ qadam bilan tur qurib masalani yechamiz. Bu misolga programma tuzib natija olinganda taqribiy yechim $u\,(2,\ 1) \approx 2,87$ ko'rish mumkin. Qaralgan masalani aniq yechimi $u\,(x, y) = x^2 - y^2$ va $u\,(2,\ 1) = 3$ ga teng. Xatolik 0,13 ga teng. Bunda xatolikni tajribalar sonini oshirib yanada kamaytirish mumkin. Xuddi shunday usulda Puasson va Gelmgols chegaraviy masalalarini ham yechishimiz mumkin.

Puasson chegaraviy masalasi.

Yuqoridagi (3) xususiy hosilali differensial tenglamada $F\,(x, y) = -g(x, y)$ bo'lganda Puasson tenglamasi deyiladi. Ya'ni
$\Delta u = -g$, bu yerda $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
D sohada aniqlangan G chegarada bir nechta $\varphi(x, y)$ shartlar qo'yilganda tenglamani yaqinlashtirib yechish uchun yuqoridagidek yetarlicha kichik kvadrat tur quramiz va tugun nuqtalarini belgilaymiz.
$\Delta u = -g$ tenglamani ichki $(x_i,\ y_j)$ tugunlar bo'yicha ayirmali tenglamaga o'tkazamiz.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -g_{ij}$$

Bu tenglikni quydagicha yozish mumkin:

$$u_{i,j} = (1/4)(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 g_{ij})$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}u_{i+1,j} + \frac{1}{4}u_{i-1,j} + \frac{1}{4}u_{i,j+1} + \frac{1}{4}u_{i,j-1} + \frac{h^2 g_{ij}}{4}$$

Bunda ham yuqoridagidek tasodifiy miqdorlarni ishlatib, tugun nuqtalarni tasodifiy harakatini quramiz va chegaradagi natijalarini yig'ib, har safar $\frac{h^2 g_{ij}}{4}$ ni qo'shib boramiz.

Tajribalar soni n- ni kattalashtirsak taqribiy yechim aniq yechimga shuncha yaqin bo'ladi. Puasson va Gelmgols masalalariga algoritmlar tuzib EHM da hisoblangan va etarlicha aniq yechimga yaqin natijalar olingan.

ADABIYOTLAR

1. С. М. Ермаков Метод Монте-Карло в вычислительной математики смежные вопросы.Ч М.: Бином, 2009.
2. A. Rasulov, G. Raimova, Monte Carlo solution of the Neumann problem for the nonlinear Helmholtz equation, Mathematics and Computers in Simulation, vol. 117 (2015), p. 1-9

$\frac{d^4}{dx^4} + 1$ DIFFERENSIAL OPERATORNING $D_2[\beta]$ DISKRET ANALOGI

Shadimetov X. M.[1,2], Davronov J. R.[2]
[1]Toshkent Davlat Transport universiteti, Toshkent, O'zbekiston,
kholmatshadimetov@mail.ru; [2]O'zFA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti,
Toshkent, O'zbekiston
javlondavronov77@gmail.com;

$L_2^{(2,0)}(0, 1)$ Gilbert fazosida optimal kvadratur formula qurish hamda uning xatoligini baholash uchun $\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorning $D_2[\beta]$ diskret analogiga asoslangan Sobolevning metodidan foydalanamiz [1,2,3]. Buning uchun, quyidagi

$$D_2[\beta] * G_2[\beta] = \delta[\beta] \tag{1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $D_2[\beta]$ diskret operatorni quramiz.
Bu yerda

$$G_2(x) = -\frac{\mathrm{sign}(x)}{4}\left[\sum_{k=1}^{2} e^{x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}}\cdot\cos\left(x\cdot\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)+\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)\right],$$

$\delta[\beta]$ bu diskret delta-funksiya, ya'ni $\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$

$D_2[\beta]$ diskret operator uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema. $\frac{d^4}{dx^4}+1$ *differensial operatorning* (1) *tenglikni qanoatlantiruvchi* $D_2[\beta]$ *diskret analogi quyidagi ko'rinishda,*

$$D_2[\beta] = \frac{\sqrt{2}}{K}\cdot\begin{cases} M_1 - K_1 + \frac{A_1}{\lambda_1}, & \beta = 0, \\ 1 + A_1, & |\beta| = 1, \\ A_1\cdot\lambda_1^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \end{cases}$$

bu yerda $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ *va*

$$\begin{aligned} K &= \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}h)\cdot\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{2}}{2}h) - \mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}h)\cdot\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}h), \\ K_1 &= \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2}h) - \sin(\sqrt{2}h)}{K}, \; M_1 = -4\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}h)\cdot\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{2}}{2}h), \\ M_2 &= 2\left(\cos(\sqrt{2}h) + \mathrm{ch}(\sqrt{2}h) + 1\right), \\ A_4(\lambda) &= \lambda^4 + M_1\cdot\lambda^3 + M_2\lambda^2 + M_1\lambda + 1, \\ \lambda_1 &= \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4}}{2}, \; A_1 = \frac{A_4(\lambda_1)}{\lambda_1^2 - 1}. \end{aligned}$$

ADABIYOTLAR

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974,- 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.
3. Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. -Ташкент: Издательство "Fan va texnologiya", 2019. 224 с.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ДИФФУЗИОННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗ РЕЧНОЙ ЭКОЛОГИИ

Асракулова Д. С.[1], Боборахимова М. И.[2]
[1]Институт математики Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
donoasrqulova@gmail.com;
kamina9313@mail.ru;

Организмы, живущие в речных системах, подвержены неправильным течениям в нижнем направлении. Сегодня одна из наиболее актуальных проблем - как управлять направлением потока, не нанося ущерба экологии потока, как спасти живущие в потоке организмы от смыва и потери. В настоящее время ведущие ученые-биологи, экологи и математики мира проводят различные исследования по этому вопросу. В исследованиях [1], [2] модели уравнений реакции-диффузии, основанных на теории метрических графов, были использованы для изучения топологической структуры речных сетей, проблемы выживания и исчезновения видов.

$$u_t - u_{xx} - uu_x = u(1-u), \quad (t,x) \in D_1, \tag{$n1$}$$

$$v_t - v_{xx} - vv_x = v(1-v), \quad (t,x) \in D_2, \tag{$n2$}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -l \le x \le 0, \tag{$n3$}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{$n4$}$$

$$u(t,-l) = v(t,l), u_x(t,-l) = v_x(t,l), \quad 0 \le t \le T, \tag{$n5$}$$

$$u(t,0) = v(t,0), u_x(t,0) = v_x(t,0) \quad 0 \le t \le T, \tag{$n6$}$$

заданные функции удовлетворяют условиям: начальные функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ удовлетворяют условиям периодичности (n5) и $u_0(x) \in C^{2+\alpha}[-l,0]$, $v_0(x) \in C^{2+\alpha}[0,l]$ $0 \le u_0(c) \le 1$, $0 \le v_0(x) \le 1$,$u_0(x) \ne 0$,$v_0(x) \ne 0$. Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала устанавливаются двусторонние оценки для $u(t,x), v(t,x)$, и затем оценки для старших производных $\mid u,v \mid_{1+\alpha}$,$\mid u,v \mid_{2+\alpha}$. Далее доказаны теоремы единственности и существование. В отношении функциональных пространств и обозначением норм в них будем следовать обозначениям норм [3].

Лемма. Пусть функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ являются ращением задачи (n1)-(n6) . Тогда

$$0 \le u(t,x) \le M_1 = 1, \quad (t,x) \in D_1, \tag{$n7$}$$

$$0 \le v(t,x) \le M_2 = 1, \quad (t,x) \in D_2, \tag{$n8$}$$

Доказательство: Так как начальные функции тождественны не равны нулю, то в силу условии (n5) и (n6) с учетом теоремы о знаке производной в граничной точке экстремума и усиленного принципа экстремума получим положительность искомых функции. Теперь $u(t,x)$ и $v(t,x)$ оценим сверху. Пусть в области $D_1 \cap t \le t_0$ в точке $P(t_0,x_0), u(P) = 1$. Значение первая точка по t, где принимается это значение. Тогда $u(P)$ будет максимумом в рассматриваемой области. Тогда в $D_1 \cap t \le t_0$ получается противоречие утверждению принципа максимума. Аналогичном утверждается отсутствие экстремума и в области D_2. Отсутствие экстремальных значений на боковых границах и на линии перехода получается в силу условии (n5),(n6). Таким образом, положительный максимум достигается только в начальный момент. Следовательно, справедливы неравенства (n7),(n8).

В следующих результатах мы установим априорные оценки высокого порядка функций $u(t,x), v(t,x)$ а также докажем теоремы существования, единственности для (n1)-(n6) задач.

ЛИТЕРАТУРА

1.Yihong Du,Bendong Lou, Rui Peng, Maolin Zhou., "The Fisher -KPP over simple graphs:varied persistence states in river networks"
arXiv:1809.06961v1[math.AP] 18 sep 2018.
2. Yu Jin, Rui Peng,Junping Shi, "Population dynamics in river networks"
arXiv:1904.07395v1 [math.AP] 16 Apr 2019.
3. Kruzhkov S. N, "Nonlinear parabolic equations with two independent variables,"Tr. Mosk. Mat. Obshch., 1967, 16,-pp. 329-346. 4. Takhirov J.O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J.Pure Appl.Math., 2019. 50(1), -pp. 95-112.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИРУСА

Арипов М. М.[1], Сайфуллаева М. З.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
mirsaidaripov@mail.ru;
Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан
maftuha87@mail.ru

В настоящей работе рассматривается популяционная модель типа реакция-диффузия с двойной нелинейностью в не дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^n \nabla(u^{m-1}\nabla u) + bu(1-u^{n-1})\,,\ \ (t>0,\ x\in R^N),\ \ u(0,x)=u_0(x),\ \ x\in R^N \tag{1}$$

Здесь $b>0, m\geq 1, n>1$. Эта задача в работе [1] предложена как математическая модель процесса распространение вируса и получены свойства решений этой задачи. В работе [2] автор рассматривает задачу Коши для вырожденного параболического уравнения не в дивергентной форме, представляющей диффузионную аппроксимацию модели распространения эпидемии в замкнутой популяции без ремиссии. Он доказывает существование и единственность слабого решения, определенного подходящим образом, и некоторые качественные свойства. Нами доказана, что решение этой задачи обладают свойствами конечной скорости распространение вируса и пространственной локализации распространение вируса.
В самом деле замена

$$u(t,x) = exp(-bt)w(\tau(t),x)$$

в уравнение (1) приведет его к виду

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = w^n \nabla(w^{m-1}\nabla w) - b\ exp((b(n+m)\tau(t)w^n)$$

где $\tau(t) = \frac{1}{b(n+1)}(1-exp\,(-b(n+m)t)) < \frac{1}{b(n+m)}$.

Так как $exp(b(n+m)t) = (b(n+m)\tau(t)-1)^{-1}$

Тогда переходя к переменной $\tau(t)$ легко видеть, что последнее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = w^n \nabla(w^{m-1}\nabla w) + \frac{1}{b(n+m)\tau(t)-1}w^n$$

Перейдем к автомодельному уравнению полагая

$$w(\tau(t),x) = f(\xi),\ \ \xi = |x|/[b(n+m)\tau(t)-1]^{1/2}$$

Тогда получим следующее автомодельное уравнение

$$L(f) \equiv f^n \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi}(\xi^{1-N} f^{m-1} \frac{df}{d\xi}) + \frac{\xi}{2} \frac{df}{d\xi} + f^n = 0$$

Рассмотрим функцию

$$\overline{f}(\xi) = (a - (m+n-1)\frac{\xi^2}{4})_+^{1/(m+n-1)}, \ a > 0$$

Где использовано обозначение $(m)_+ = max(0, m)$. Легко подсчитать, что

$$L(\overline{f}(\xi)) = -(N/2)\overline{f} + \overline{f}^n \leq 0$$

Так как

$$\overline{f}^n \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi}(\xi^{1-N} \overline{f}^{m-1} \frac{d\overline{f}}{d\xi}) + \frac{\xi}{2} \frac{d\overline{f}}{d\xi} = (-N/2)\overline{f}$$

Поэтому функция $u_+(t,x) = exp(-bt)\overline{f}(\xi)$ обладает свойством $u_+(t,x) \equiv 0$ при $\mid x \mid \geq 2(a/(n-1))^{1/2}\tau(t) < \infty, n > 1$. Поскольку $max\ \tau(t) = \frac{1}{b(n+m)}$, то решение задачи (1) обладает свойством пространственной локализации. Вирусы сосредоточены в области $\mid x \mid \leq [b(n+m)\tau(t) - 1]^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ughi M. A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic // Annali di Matematica pura ed applicata. 1986. pp.385 - 400
2. Тютюнов Ю.В. Механистическая модель эффекта Олли и интерференции в популяции хищников // Биофизика. 2013. Т. 58, С. 349-356.

ЭЛЕМЕНТ РИССА ОДНОЙ ИНТЕРПОЛ§ЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Болтаев А. К.[1,2], Сапарбаев З. С.[2]
[1] Институт математики имена В.И. Романовского, АН РУз
[2] Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
aziz_boltayev@mail.ru; saparbayevzafar41@gmail.com

Рассмотрим следующую интерполяционную формулу:

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(x)\varphi(x_\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta(x)$ – коэффициенты $x_\beta(\in [0,1])$ – узлы формулы (1), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(2,0)}$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\left\|\varphi(x)|W_2^{(2,0)}(0,1)\right\| = \left[\int\limits_0^1 \left(\varphi^{(2)}(x) + \varphi(x)\right)^2 dx\right]^{1/2}, \tag{3}$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi)=\varphi(z)-P_\varphi(z)=\varphi(z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-x_\beta)\right)\varphi(x)dx. \qquad (4)$$

Задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(2,0)}$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{W_2^{(2,0)*}}=\inf_{C_\beta(z),x_\beta}\sup_{\|\varphi\|\neq 0}\frac{|(\ell,\varphi)|}{\left\|\ell\right\|_{W_2^{(2,0)*}}}. \qquad (5)$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $W_2^{(2,0)*}$, где $W_2^{(2,0)*}$ - сопряженное пространство к пространству $W_2^{(2,0)}$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\|\ell\|_{W_2^{(2,0)*}}$ функционала погрешности ℓ в пространстве $W_2^{(2,0)*}$, а потом минимизировать его по коэффициентам $C_\beta(z)$ и узлам x_β.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л.Соболевым [1-3].

Функция ψ, для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi)=\|\ell\|\cdot\|\psi\|, \qquad (6)$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ.

Имеет место

Теорема 1. *Экстремальная функция ψ функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) и имеет вид:*

$$\psi(x)=(G_2*\ell)(x)+d_1\sin(x)+d_2\cos(x),$$

где d_1 и d_2 – произвольные действительные числа,

$$G_2(x)=\frac{1}{4}\,\mathrm{sign}(x)\left(\sin(x)-x\cdot\cos(x)\right),$$

Кроме того, функционал погрешности (2), как показано в [4], удовлетворяет следующим условиям

$$(\ell,\sin(x))=0,\quad (\ell,\cos(x))=0. \qquad (7)$$

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение (ℓ,ψ) с учетом условий ортогональности (7). Таким образом,

$$\|\ell\|^2_{W_2^{(2,0)*}}=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\beta(z)C_\gamma(z)\,G_2(x_\beta-x_\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)G_2(z-x_\beta). \qquad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974,- 808 с.
2. **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** Кубатурные формулы. - Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.
3. **Шадиметов Х.М.** Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. -Ташкент: Издательство Fan va texnologiya 2019. - 224 с.
4. **Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A.** The extremal function of interpolation formulas in $W_2^{(2,0)}$ space. Вестник КРАУНЦ, Физ-мат, науки, 2021, Т36, №3, -С. 109 - 118.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛ§ЦИОННЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ С.Л.СОБОЛЕВА $L_2^m(S)$ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ В n- МЕРНОЙ ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ

Жалолов О.И.[1,a]**, Хаятов Х.У.**[1,b]**, Мухсинова М.Ш.**[1]

[1] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

o_jalolov@mail.ru;

wera00@mail.ru;

В работе [1] С.Л.Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$решена задача 1, т.е. вычислена нормы функционала погрешности интерполяционной формулы.
Допустим, что в $n+1$ произвольно расположенных точках $\{\theta_i\}\left(i=\overline{0,N}\right)$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, дани значения $f(\theta_0)$,$f(\theta_1)$,...,$f(\theta_N)$ функции $f(\theta)$.

Требуется построит интерполяционную формулу типа Эрмита $P_f(\theta)$, т.е.

$$f(\theta) \cong P_f(\theta) = \sum_{\lambda=0}^{N} \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\, C_\lambda^{(\alpha)}(\theta) f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}), \tag{1}$$

совпадающую функцией $f(\theta)$ в узлах интерполирования:

$$f(\theta_i) = P_f(\theta_i), i = 0, 1, ...N, \tag{2}$$

здесь точки $\theta^{(\lambda)} \in S$ и параметры $c_\lambda(\theta)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), $S - n$- мерная единичная сфера.

Важной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(\theta) \cong P_f(\theta)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал определенный как

$$\begin{aligned} < \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) >&= \int_S \ell_N^{(\alpha)}(\theta) f(\theta) d\theta \\ &= f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda^{(\alpha)}(z) f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}), \end{aligned}$$

где ясно, что $P_f(z)=\sum\limits_{\lambda=0}^{N}\sum\limits_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\,C_\lambda^{(\alpha)}(z)f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})$

интерполяционная формула типа Эрмита и

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\delta^{(\alpha)}(\theta-z)-\sum_{\lambda=0}^{N}\sum_{|\alpha|\le m}C_\lambda^{(\alpha)}(z)\delta^{(\alpha)}(\theta-\theta^{(\lambda)}) \qquad (3)$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda^{(\alpha)}(z)$- коэффициенты, а $\theta^{(\lambda)}$ узлы формулы $P_f(z),\theta^{(\lambda)}\in S$, $\delta(\theta)$- дельта- функция Дирака и $f(\theta)\in L_2^m(S)$.

Определение. Пространство $L_2^m(S)$ - определяется как пространство функций заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщёнными производными порядка m, норма которых определяется равенством [2,3]

$$\left\|f(\theta)/L_2^m(S)\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}^2k^m(k+n-2)^m\,,$$

и предположим, что $2m>n$.

Теорема 1. Норма функционала погрешности ℓ_N интерполяционной формулы типа Эрмита (1) над пространством $L_2^{m^*}(S)$ равна

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}\Big/L_2^{m^*}(S)\right\|=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum\limits_{|\alpha|\le m}\left(Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(z)-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(\alpha)}(z)\,Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta)\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{1/2},$$

где $Y_{k,l}(\theta)$- сферические гармоники порядка k вида ℓ и $\sigma(n,k)$- число линейно независимых сферических гармоник т.е. $\sigma(n,k)=\frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2)$.

Теорема 2. Существует некоторая функция$u(\theta)\in L_2^m(S)$

$$u^{(\alpha)}(\theta)=\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}b_{k,\ell}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta)\,,$$

где

$$b_{k,\ell}=\frac{\sum\limits_{|\alpha|\le m}\left[Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(z)-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(\alpha)}(z)\,Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]}{k^m(n+k-2)^m},$$

и называется экстремальная функция для нормы функционала погрешности (3) интерполяционной формулы (1).

Литература

1. Соболев С.Л Об интерполировании функций n переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,- с. 778-781.
2. Салихов Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985.-104с.
3. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. -808с.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИчЕСКИХ ФУНКЦИЙ С.Л.СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$.

Жалолов Ф.И.[1]**, Каримова С.Х.**[1]

[1] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
o_jalolov@mail.ru;

В работе [1] рассматривается вопрос о существовании наилучших кубатурных формул общего вида.

Многомерные кубатурные формулы отличаются от одномерных двумя особенностями:

1. Бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования;

2. Быстро растет число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{T_n} p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

где T_n -n мерный тор, c_λ - коэффициенты (веса), а $x^\lambda = \left(x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, ..., x_n^{(\lambda)}\right)$ - узлы кубатурной формулы, $p(x)$ весовая функция и

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

$\ell_N(x)$ - называется функционалом погрешности кубатурной формулы (1).

Определение. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ определяется как пространство функций, определенных на торе T_n, имеющих все обобщённые производные порядка m и суммируемые с квадратом (см.[2]). Норма определяется формулой

$$\left\| f(x) \Big/ \tilde{W}_2^{(m)}(T_n) \right\| = \left(\int_{T_n} f(x)\,dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \cdot \left|\hat{f}_k\right|^2, \tag{3}$$

где f_k - коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2), кубатурной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ равен:

$$\left\| \ell(x) \Big/ \tilde{W}_2^{(m)^*} \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i\left(k, x^{(\lambda)}\right)} \right|^2}{|k|^{2m}},$$

где $(k,x) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j x_j$, $|k| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j^2\right)$ и $\hat{P}_k = \int_{T_n} p(x)\, e^{2\pi i (k,x)} dx$.

Введём обозначения $D^N(x) = \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right)$, тогда для функционала погрешности кубатурной формулы (4) имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Функционал погрешности весовой кубатурной формулы (1) при

$\ell(x) = p(x)\varepsilon_{T_n}(x) - \prod\limits_{i=1}^{n} D^{N_i}(x_i)$, $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_n = N$ и $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ имеет наименьшую норму над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ тогда, когда узлы являются образом решетки на торе T_n и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = .. = c_N = \overset{0}{c}$,
которое выражаются формулой

$$\overset{0}{A} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \frac{1}{N^{\frac{2m}{n}}} \sum\limits_{k\neq 0} \frac{\hat{P}_k}{|k|^{2m}}}{N\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{\frac{2m}{n}}} \sum\limits_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^{2m}}\right)}.$$

При этом

$$\left\| \overset{0}{\ell}(x) \Big/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_n) \right\|^2 = \frac{A}{N^{\frac{2m}{n}}} + \frac{B}{N^{\frac{4m}{n}}},$$

где

$$\left\| \overset{0}{\ell}(x) \Big/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_n) \right\| = \inf_{c_\lambda, x^{(\lambda)}} \left\| \ell(x) \Big/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_n) \right\|^2,$$

$$A = \frac{1}{D(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left(\hat{P}_k - P_0\right)^2}{|k|^{2m}},$$

$$B = \frac{1}{D(2\pi)^{4m}} \left[\sum_{k'\neq 0} \frac{1}{|k'|^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{|k|^{2m}} - \left(\sum_{k\neq 0} \frac{\hat{P}_k}{|k|^{2m}} \right)^2 \right]$$

$$D = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \frac{1}{N^{\frac{2m}{n}}} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^{2m}}.$$

Литература

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. Наука, 1967г.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. Наука, 1974г.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Жалолов О.И., Файзиева Ш.Д.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

[1]o_jalolov@mail.ru;

Если нам известны не только значения функции $f(x)$ в некоторых точках области Ω, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции [1].

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} f(x)dx \approx \sum_{|\alpha|\leq t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$, где K_n- n- мерный единичный куб, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ и $0 \le t \le m$.
Обобщённая функция

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = p(x)\,\varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right) \qquad (2),$$

называется функционалом погрешности кубатурной формулы (1)
$\varepsilon_{K_n}(x)$ - характеристическая функция области K_n, $C_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы (1) и $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Определение 1. Пространство $L_2^{(m)}(K_n)$ определяется как пространство функций, заданных на n- мерном единичном кубе K_n и имеющих все обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме [2]:

$$\left\| f \Big/ L_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}\left[D^\alpha f\right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$.
Справедливы следующие

Лемма. Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняются условия

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(x_1)\cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(x_2)\cdot ... \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(x_n)$$

и,

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} \Big/ L_2^{(m_i)^*}(0,1) \right\| \le c_i \frac{1}{N_i^{m_i}} \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \quad \text{т.е.}$$

то

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \Big/ L_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le c\cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} N_i^{m_i}},$$

Теорема. Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2) при $N_1 = N_2 = ... = N_n$, $\prod\limits_{i=1}^{n} N_i = N$ и $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ является оптимальной по порядку сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$, т.е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \Big/ L_2^{(m)^*}(K_n) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}}\right).$$

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ $\overline{\nu}_m(x)$ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Жалолов Ик.И.[1]**, Ярашов И.Б.**[2]

[1] Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
ikromjalolov@mail.ru;

[2] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
o_jalolov@mail.ru

В настоящей работе находим преобразование Фурье $F\left[\overline{\nu}_m(x)\right]$ боронообразной функции $\overline{\nu}_m(x)$, где $\overline{\nu}_m(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\nu_m(hk)\delta(x-hk)$ и дискретной функции $D_m[\beta]$, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

Определение. Пространство $H_2^{\mu}(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме[1]

$$\| f|\, W_2^m(R)\| = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|F^{-1}\left[(1+y^2)^{m/2}\cdot F\left[f(x)\right](y)\right]\right|^2 dx\right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Справедлива следующие

Теорема1. Преобразование Фурье функции $\overline{\nu}_m(x)$ для определении дискретного аналога дифференциального оператора

$$\left[1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m, \tag{2}$$

удовлетворяющий равенству $D_m[\beta]*\nu_m[\beta]=\delta[\beta]$, имеет вид

$$F\left[\bar{\nu}_m(x)\right](p)=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}\left[(m-1)!\right]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi h}+\lambda\left(e^{4\pi h}+1\right)-e^{2\pi h}}\right]+$$

$$\tfrac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\tfrac{(2m-k-2)!(4\pi h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\tfrac{e^{2\pi h}}{e^{2\pi h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\tfrac{\lambda}{e^{2\pi h}-\lambda}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\tfrac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k+\tfrac{\lambda e^{2\pi h}}{\lambda e^{2\pi h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\tfrac{1}{\lambda e^{2\pi h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\,\tfrac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k\ \right],$$

где

$$\nu_m(x)=\frac{\pi\exp(-2\pi\,|x|)}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k \quad (\text{см. [2] }).$$

Теорема 2. Дискретный аналог дифференциального оператора (2) удовлетворяющий равенству

$$D_m[\beta]\cdot\nu_m[\beta]=\delta[\beta],$$

имеет следующий вид

$$F\left[\overline{D}_m(\beta)\right] = \frac{2^{2m-2}((m-1)!)^2}{\pi(2m-2)!}\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)\lambda_{1,k}^{|\beta|}}{\lambda_{1,k}^2 L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)}, & \text{если } |\beta| \geq 2 \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k} L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)}, & \text{если } |\beta| = 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k}^2 L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)} - \frac{2mch(2\pi h)c_{2m-2}+c_{2m-3}}{}, & \text{если } |\beta| = 0 \end{cases}$$

где

$$T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(2\pi h) + 1,$$

$L_{2m-2}(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{2m-2} c_n\lambda^n, c_n = c_{2m-2-n}$ и $\lambda_{1,k}$- корны многочлена Эйлера.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. – 808 с.
2. Валевич Л.Р. и Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОГО ИСТОЧНИКА С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ

Жумаев Жура.,Тошева М.М.
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
jumayev_jura1956@mail.ru

Всестороннее исследование процессов тепловой конвекции является весьма актуальной проблемой гидромеханики и теплообмена, поскольку они часто встречаются во многих задачах практики. Исследованию таких механизмов посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных авторов. Например, в работах [1,2] рассматривается стационарный, ламинарный перенос в слое, примыкающем погруженный в покоящийся окружающий газ в вертикальной поверхности. Уравнения написаны в несжимаемой постановке. Вышеприведенный анализ показывает, что процессы тепловой конвекции нуждается в дальнейшем исследовании. В частности, многие процессы происходит в вертикально расположенных источниках в сильно изменяющимся температурном режиме и нуждается в учете сжимаемости среди при моделировании. В настоящей работе численно исследуется стационарный, ламинарный перенос в слое, примыкающем погруженный в покоящийся окружающий газ в вертикальной поверхности с учетом сжимаемости среды. При этом предполагается, что температура окружающего воздуха постоянно и равно t_1 температура на поверхности стержня так же поддерживается постоянной температурой равной $t_0, (t_0 > t_\infty)$ Схематическая картина течения показан в [2].

При проведении вычислительных экспериментов предполагалось, что теплофизические свойства материала стенок и газа не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Рассматриваемый физический процесс математически моделируется на основе уравнении приближении пограничного слоя следующей системой дифференциального уравнения [9-10]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}(\rho\upsilon) = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\rho\beta(T-T_1)}{Fr}$$

$$\rho\upsilon\frac{\partial E}{\partial x}+\rho\upsilon\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{1}{Pr},\frac{\partial}{\partial y}(\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial y})$$

В этих уравнениях неизвестными является: υ,ν продольные и поперечные составляющие скорости; ρ- плотности, T - абсолютная температура, E - полная энергия, а также динамический коэффициент вязкости μ, Fr - гидродинамическое число Фруда, Pr-Число Прандтля - критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах, учитывающий влияние физических свойств теплоносителя на теплоотдачу[2]. Для замыкания системы дифференциальных уравнений (1) привлекается алгебраические уравнения полной энергии, состояния идеального газа, для коэффициента вязкости формула Саттерлэнда.

Граничные условия

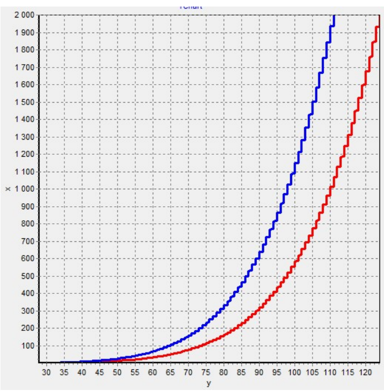
В системе координат по оси расположен неограниченный стержен источник тепла, который имеет фиксированное значение. При тепло и массопереносе вблизи стержня возникает динамические и тепловые пограничные слои. Толшина пограничного слоя раширяется по мере продвижения на верх. Исходя из перечисленных выше, сформулируем граничные условия:

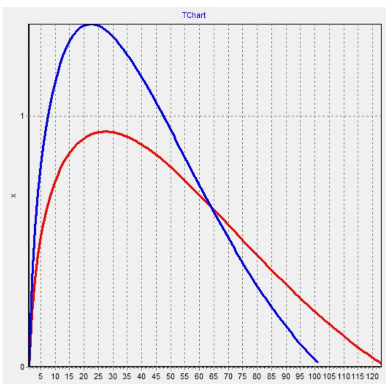
$$x=0:=\begin{cases}u=0,H=H_0,\nu=0,y=0\\u=0,H=H_1,\nu=0,y>0\end{cases}$$

$$x=0:=\begin{cases}u=0,H=H_0,\nu=0,y=0\\u\to 0,H\to H_1,\nu\to 0,y\to y_\infty\end{cases}$$

Выше изложенная задача решена численно с применением двухслойной, четырехточечной неявной конечно - разностной схемы и методом прогонки с итерацией [3]

При этом на основе составленного алгоритма составлен программа на языке DELPHI. Во время работы программы результаты выражались в виде графиков, для этого воспользовались компонентом Chart. На рис. 1. приведены ширина зоны смещения теплового пограничного слоя, а на рис.2. приведены изменение продольной скорости в сечении $\bar{x}=4$, в зависимости от учета и без учета сжимаемости среды. Из рисунков следует, что учет сжимаемости среды приводит к сужению ширины зоны смещения, увеличению продольной скорости чем без учета сжимаемости среды.





Синий - с учетом сжимаемости среды, красный-без учета сжимаемости среды. Таким образом, математический модель описывает физики процесса, в частности, при учете сжимаемости с повышением температуры уменьшается плотность среды(воздуха в нашем случае), что приводить сужению ширины зоны смешения, тем самым увеличению продольной скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rodriguez I., Castro J., Perez-Segarra C.D., Oliva A. Unsteady numerical simulation of the cooling process of vertical storage tanks under laminar natural convection // Inter. J. of Thermal Sci. 2009. Vol. 48,No. 4. P. 708-721.

2. Б. Гебхард, И. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Самакия. Свободно конвективные течения, тепло - массообмен. В 2 - х книгах. Книга 1. М.: Мир. 1991 - 678 с.

3.Вабищевич П.Н. Численные методы. Вычислительный практикум/-М: Ленанд, 2016.-320 с.

4. Хомоненко А.Д. Самоучитель Delphi.-СПб.; БХВ-Петербург, 2008.-576 с.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В УПРУГО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Жураев Г. У.[1], Мусурмонов Х. О.[2], Мусурмонова М. О.[3]

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан, gjuraev@mail.ru;

[2]ООО кЛУКОЙЛ Узбекистан Оперейтинг Компани, Карши, Узбекистан, musurmonov.kh@gmail.com;

[3]Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан, mmo_ 2704@mail.ru

В работе рассматривается задача о нестационарных поперечных волнах сдвига в упруго-пористой среде, ограниченной двумя концентрическими сферическими поверхностями. Задачи, относящиеся к проблемам моделирования процессов распространения и дифракции нестационарных волн в сплошных средах, а также взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой, являются актуальными и представляют большой практический и теоретический интерес. Актуальность проблем динамики деформируемых тел обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, а также проблемы геофизики, сейсмологии, газоразведки, нефтеразведки, добывающей промышленности, строительства гражданских и промышленных сооружений.

Пусть линейно упруго-пористая однородная изотропная среда ограничена двумя концентричными сферическими поверхностями, радиусы которых равны соответственно R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$. К ее внутренней поверхности приложены осесимметричные кинематические или силовые нагрузки. Движение сред рассматривается в сферической системе координат $(r,\, \theta,\, \vartheta)$ с началом в центре концентрических сфер. В начальный момент времени $\tau = 0$ упруго-пористая среда находится в невозмущенном состоянии.

С уччтом осевой симметрии задачи движение среды относительно потенциала ψ описывается волновым уравнением

$$\gamma_3^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2\theta}, \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right), \tag{1}$$

где γ_3- безразмерная скорость распространения волны в среде.

Начальные условия Ц однородные

$$\psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{2}$$

К внутренней поверхности приложена заданная осесимметричная касательная поверхностная нагрузка $q(\tau, \theta)$

$$\sigma_{r\vartheta}|_{r=R_1} = q(\tau, \theta) \tag{3}$$

или задано касательное перемещение $V(\tau, \theta)$:

$$u_\vartheta|_{r=R_1} = V(\tau, \theta). \tag{4}$$

Внешняя поверхность среды свободна от давления или на поверхности перемещение равно нулю.

Для решения начально-краевой задачи применялось интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени и метод неполного разделения переменных. В пространстве изображений задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которую запишем в виде системы матричных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \mathbf{MA}y^2 + \mathbf{F}_1\mathbf{B} - \mathbf{F}_2\mathbf{B}y^2 = \mathbf{k}y \\ \mathbf{NA}x^2 + \mathbf{T}_1\mathbf{B} - \mathbf{T}_2\mathbf{B}x^2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$x = e^{-R_2\eta s}, y = e^{-R_1\eta s}.$$

где $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{T}_m$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$- бесконечные диагональные матрицы соответственно с элементами $F_{mn}(s)$, $T_{mn}(s)$ $(m = 1, 2)$, $M_n(s)$, $N_n(s)$; $\mathbf{k}(s)$ - бесконечный вектор-столбц с элементами $k_n(s)$; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - бесконечные вектор-столбцы соответственно с элементами $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$.

Отметим, что элементы всех указанных матриц и векторов являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа s.

Решение системы уравнений (5) представим следующими бесконечными рядами

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} = \sum_{ij=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{ij}(s) \\ \mathbf{b}_{ij}(s) \end{pmatrix} x^i y^{-j-1}, \tag{6}$$

$$\mathbf{a}_{ij}(s) = \left\| a_{ij}^{(1)}(s),\, a_{ij}^{(2)}(s), ... \right\|^T,$$

$$\mathbf{b}_{ij}(s) = \left\| b_{ij}^{(1)}(s),\, b_{ij}^{(2)}(s), ... \right\|^T.$$

Подставляя бесконечные ряды (6) в систему (5) и приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях переменных x и y, получим следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $a_{ij}^{(n)}(s)$, $b_{ij}^{(n)}(s)$, $(n = 1, 2, ...)$ и начальные условия к ним.

Рекуррентные соотношения позволяют определить все элементы соответствующих столбцов $\mathbf{a}_{ij}(s)$, $\mathbf{b}_{ij}(s)$ в виде рациональных функций параметра преобразования Лапласа s, что позволяет вычислить их оригиналы, а, следовательно, и оригиналы коэффициентов рядов для перемещения и напряжения среды с использованием теории вычетов [1]. Получены формулы для компонент вектора перемещения и тензора напряжений в среде. Переход к оригиналам осуществляется с помощью теории вычетов. Проведены численные эксперименты. Полученные результаты работы могут быть использованы в области геофизики, сейсмологии и проектных организаций при строительстве сооружений, а также при проектировании подземных резервуаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. Ц М.: Наука. Гл. ред. физ.Цмат. лит, 1990. Ц 264 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распространение нестационарных волн сдвига от сферического включения в упругом полупространстве // Известия РАН, МТТ.- 2004.- є 6., С. 62-68.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОД РАСЧЁТА ДЕФОРМАЦИЙ РАВНИННЫХ РЕК

Ибрагимов И. А. О.[1], Ходжиев С. О.[2], Иномов Д. И. О.[1], Эшонов Б. Б. О.[1]
[1]Бухарский филиал Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Бухара, Узбекистан
ilxom.1985@mail.ru;
[2]Бухарский государственный Университет, Бухара, Узбекистан

В настоящие время интенсивное развитие гидротехнического строительства ни только нашей стране по всему миру вызвало необходимость уччта воздействия различных сооружений на русловые процессы, особенно на равнинных реках. Разработке этих проблем посвящены исследования последнего периода, позволившие разработать методы расчета русловых деформаций при возведении гидротехнических сооружении различных типов. Сложность изучения динамики русловых потоков и русловые процессы сопряжено размываемыми грунтами. Как известно русловой процесс является сложным многофакторным явлением, что любой участок реки получает заданный ему природными условиям сток наносов, которые поток должен транспортировать вниз по течению. Такое течении от рельефа, геологии водного и ледового режимов, стока взвешенных наносов, режима их поступления, крупности наносов о черед размер поступлении наносов, их состав зависят от множественных природных факторов: выпадающих атмосферных осадков, уклонов поверхности водосбора, грунтов и их проницаемости растительности и.т.п. Все это делает русловой процесс сложным многофакторным явлением, которое может изучаться только на основе обоснованного многофакторного подхода, могут дать полезных результатов. Необходимо отметить, что решение проблемы расччтов и прогнозов руслового процесса требует создание гидравлической теории и уччтом морфологический аспекты проблемы. Обычно, динамика русловых потоков и русловых процессы изучаются на натурах или лабораторных условиях на основе модели рек (или в части реки). Естественно, создании модели требуют огромного количество материальных расходы и человеческое времени. Иногда наименшое изменение в параметрах потока требуются переделки экспериментальной установки. В таких случаях самым удобным экономичным и эффективным методом исследования речного русла является с помощью математического моделирование данного процесса. Которые позволяет в широком диапазоне изменения параметров речного русла, русла, как геометрические размеры, рельеф им бьефы, наносы и др. не требуютей никаких проблем изменения в математических моделях, кроме того этот способ исследования позволяет разносторонно прогнозировать речного русло [3]. Математическая модель русловых потоков основывается на динамику жидкостей (многофазных сред). Режим течения воды в реках, как правило, турбулентный, поэтому динамика русловых потоков основывается прежде всего на законах турбулентного движения жидкости. Математическая модель русловых потоков основаны в основном на фундаментальных физических законах: сохранения вещества (массы) и сохранении энергии, а такие движения. В данной работе приводится основные уравнения и способ расчета деформаций некоторых русловых деформации [1]. Основная система уравнений динамики русловых потоков содержит следующие составлявшие: уравнение движение воды, уравнения неразрывности и уравнение деформаций [1, 4].

$$I = \frac{v^2}{C^2 H} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\alpha_k v^2}{2g}) + \frac{\alpha'}{g}\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + (1-\epsilon)\frac{\partial y_d}{\partial t} = 0.$$

Данная система уравнений незамкнута, так как содержит шесть неизвестных функций продольной координаты (x) и времени (t): $y_d, H, B, v, C,$ и Q_s. [5] Система уравнение или математическая модель деформации русловых рек нестационарная, и требует для решение граничных и начальных условия по неизвестным определяются конкретными условиями задачи [2]. Кроме того, для замыкания системы уравнений требуются ряд соотношений (уравнении) эти соотношений т.е. связь между неизвестным системы могут быт получены экспериментально или полуэмпирическим путем.

Заключение: Система уравнений ряд обоснованным допущениями, начальными и граничными условиями решена для конкретной задачи конечно-разностным методом. Результаты получены по продольной направлении реки и по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Б. Барышников, И.В. Попов. Динамика русловых потоков и русловые процессы. Ленинград гидрометеоиздат 1988. с.455.
2. А.А. Самарский. Теория разности схем. -3-е изд. -М.: Наука. 1989. с.616.
3. Исмагилов Х.А. Селевые потоки, русловые процессы, противоселевые и против паводковые мероприятия в Средней Азии. Ташкент, 2006. p. 262.
4. Исмагилов Х.А., Ибрагимов И.А. Движение паводковых вод в руслах в условиях зарегулированного стока воды. Журнал "Проблемы механики 1, Ташкент, 2014. с.69-71.
5. Исмагилов Х.А., Ибрагимов И.А. Рекомендации по гидравлическому расчету и креплению берегов русла р. Амударьи в условиях зарегулированного стока воды. Журнал "Проблемы механики Ташкент, 2014. с.66-69.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Карчевский А. Л.
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
karchevs@math.nsc.ru

Рассматриваемая в представленной работе задача имеет отношение к изучению поведения плотности теплового потока вблизи контактной линии “твердое тело - газ - жидкость”. Эти исследования на данный момент являются весьма актуальными для создания новых типов испарителей, использующихся для охлаждения приборов, работающих как на Земле, так и в космосе. Для изучения плотности теплового потока был использован метод тонкой нагретой фольги.

Математически, чтобы определить плотность теплового потока в интересующей нас области, задача сводится в стационарном случае к решению задачи Коши для эллиптического уравнения, в нестационарном случае - к решению уравнения теплопроводности с данными на времениподобной границе. В обоих случаях обрабатывались данные, полученные в ходе реальных лабораторных экспериментов.

К ПОСТРОЕНИЮ И РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Каюмов Ш., Арзикулов Г. П., Марданов А. П., Хаитов Т. О.

Ташкентский государственный технический университет имени И.А.Каримова
kayumovmatemic@gmail.com, arzikulov79@mai.ru, apardayevich@mail.ru,
tojiboy.xaitov.77@gmail.ru

Известно, что задача фильтрации флюидов имеющие нелинейные свойства многослойных средах представляет научный интерес в практическом плане. Слоистые среды по своей сути является сложными структурами, где трудно определить границы слоев. Обычно при исследование подземной среды считают, что слоистые среды имеют кровля и подошвы. Исходя из характеристик среды можно их считать гидродинамически связанными или несвязанными пластами. Исследование таких пластов посвящены работы [1-2]. Если физические и химика - технологическое параметры среды отличный от ранее существовавших моделей, а также структурные свойства флюида иначе, то обычно такие флюиды называют структурированными. Для них характерны существование трех зоны фильтрации (зона ползучести, зона аномальности и зона сильных подвижностей). Изучение структурированных флюидов в слоистых средах почти отсутствует, имеется частичные работы [3-5], предполагающие существовании различных типов флюидов в слоях среды.

Пусть область Ω состоит из трех областей D_1, D_2 и D_3, при этом верхнее D_3 и нижнее D_1 хорошо проницаемые (горизонтальные характеристики преобладает над вертикальными), а средний D_2 плохо проницаемы и в нем вертикальные характеристики преобладает над горизонтальными.

Процесс фильтрации флюидов в таких средах математически сформулируется так: необходимо найти непрерывные функции $u_i(x,y)$, $(i = \overline{1,2})$, $v(x,y,z)$ а также $R_j(x,y,t)$, $(j = \overline{1,2})$ из следующей системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi(|\nabla u|,\beta)\frac{\partial u_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi(|\nabla u|,\beta)\frac{\partial u_i}{\partial y}) - A\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=h_i}$$
$$= \overline{M}\frac{\partial u_i}{\partial t},\ t>0,\ (x,y)\in(D_1,D_3) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(k(x,y,z)\frac{\Delta v}{\beta+\Delta v}\frac{\partial v}{\partial z}) = M\frac{\partial v}{\partial t},\ \ t>0,\ \ z\in(h_1;h_2). \quad (2)$$

С начальными

$$u_i(x,y,0) = u_{i_0}(x,y),\ \ v(x,y,z,0) = v_0(x,y,z),\ \ R_1(x,y,0)$$
$$= R_2(x,y,0) = R_0(x,y), \quad (3)$$

и граничными

$$\Phi_1\left(|\nabla u|,\beta_1\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=R_1-0}=\Phi_2\left(|\nabla u|,\beta_2\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=R_1+0},$$
$$\left.U_i\right|_{x=R_1-0}=\left.U_i\right|_{x=R_1+0},\quad(4)$$

$$\Phi_2\left(|\nabla u|,\beta_2\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=R_2-0}=\Phi_3\left(|\nabla u|,\beta_3\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=R_2+0},$$
$$\left.U_i\right|_{x=R_2-0}=\left.U_i\right|_{x=R_2+0}\quad(5)$$

а также краевыми условиями

$$\tilde{a}_1\Phi_1\left(|\nabla u|,\beta_1\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma_0}+a_2\left.U_i\right|_{(x,y)\in\Gamma_0}=\varphi_1(t),\ t>0,$$

$$\tilde{b}_1\Phi_3\left(|\nabla u|,\beta_3\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma}=0,\ t>0.\qquad(6)$$

$$c_i\left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{(x,y)\in H}=0.\qquad(7)$$

Здесь функции $\Phi_j(j=\overline{1,3})$, $k(x,y,z)$ выражает нелинейности процесса фильтрации и берется как в [4,5],
$\left\{\Phi,\overline{M}\right\}=\left\{\Phi_1,\overline{M}_1;\Phi_2,\overline{M}_2\ ;\ \Phi_3,\overline{M}_3\right\}$ при $x\in(0,R_1(t))$; $x\in(R_1(t),R_2(t))$; $x\in(R_2(t),L_1)$ соответственно, при этом $y\in(0;L_2)$, $z\in(0;H)$, $a_1+a_2\neq 0$, c_i – параметр среды. Нелинейная задача (1)-(7) решается методом итерации и методом прямых по t, а также методом переменных направлений с дальнейшем применением потокового варианта разностной прогонки [6,7]. Построенные вычислительные алгоритмы апробирован на тестовых данных, и по ним можно сделать вывод о применимости данного способа моделирование для определение технологических параметров месторождений аналогичного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М. "Недра". 1972.
2. Мухидинов Н. М. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Издательство кФань, Ташкент, 1978. 117 с.
3. Каюмов Ш., Исканаджиев И. Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах. Тезисы докладов Всероссийский конференции "Проблемы механики сплошных сред и физика взрыва." Новосибирск. 2007 г. с. 98-99.
4. Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Математическая моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции к Актуальные проблемы прикладной математика, информатики и механикинь. Воронеж 2020. с. 934-942.
5. Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids. E3S. 264. 01030(2021) https://doi. Org/10.1051/t3s conf/2021 26401030.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М. Наука. 1989. 484 с.

7. Каюмов Ш. Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ, 2017 г. 274 с.

НАДЕЖНАНАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ХАЙДАРОВ Ш. А.[1], ЭЛИБОЕВ Н. Р.[2], АБДИЖАЛИЛОВ Ж. Ш.[3]

[1]Каршинского ирженерно-экономического института 375-atmmk@mail.ru

[2]Ташкентского химико-технологического института nurali_e@mail.ru

[3]Ташкентский государственный технический университет

Предлагается дискретная математическая модель надежности стареющей технической системы, состояние которой со временем ухудшается, что приводит к увеличению вероятность ее отказа. В целях обеспечения необходимой работоспособности системы проводятся профилактические ремонты разной глубины в случайные моменты времени. Поэтому важным является определение такого правила выбора периодов времени таких ремонтов, которое обеспечивает оптимальный уровень работоспособности системы. В статье описывается математическая модель, описывающая взаимосвязи параметров надежности технической системы и случайных моментов времени проведения профилактических работ, которые определяют конечное число состояний системы. На основе анализа этой модели определяется правило выбора периодов времени таких ремонтов, обеспечивающих оптимальный уровень работоспособности системы.

1. Общая постановка задачи, актуальность и цель исследования. Известно, что все технические системы в процессе эксплуатации ухудшают свои характеристики, что увеличивает вероятность их отказа. Она может быть уменьшена и доведена до оптимального уровня с помощью проведения профилактических ремонтов. Обычно такие ремонты определяются регламентом в заранее определенные моменты времени. Однако, в силу различных причин, их реализация происходит в случайные моменты времени. Это обуславливает актуальность построения математической модели, описывающей взаимосвязи параметров надежности функционирования рассматриваемой технической системы, случайных моментов времени проведения профилактических работ и вероятностей отказа в состояниях во время ремонта. Вероятность отказа является наиболее важным параметром такой модели, так как она приводит к длительному простаиванию системы и значительным затратам на ее восстановление.

Последовательность моментов проведения ремонтов переходов системы из очередного состояния в последующее в данной постановке рассматривается как процесс управления этой системой.

Цель исследования - построение математической модели надежности и работоспособности управляемой технической системы с конечным числом состояни, в которых система будет находиться в период очередного прафилактического обслуживания. Рассматривается наиболее перспективный подход к моделированию надежности технических систем, предполагающий введение и определение промежуточных состояний, определяющих уровень работоспособности и вероятность отказа. Такой подход позволяет учесть индивидуальные особенности системы, например, скорость износа, что в свою очередь предоставляет возможность более адекватно принимать решения по определению графика ее профилактического обслуживания. Существующие методы моделирования техничекских систем [1] для выбора оптимальных решений по определению графика профилактических ремонотовпользуются статистическими данными, полученными по большой группе однотипных систем. Основной величиной при этом является "наработка на отказ". Однако индивидуальные особенности конкретной системы в этом случае не учитываются. Целью моделирования является поддержание оптимальной работоспособности отдельной системы с учетом ее состояния на неограниченном интервале времени. В основу моделирования положен марковский случайный процесс.

В предлагаемой работе развивается подход к моделированию надежности технических систем, рассмотренный в [2].

2. Математическая модель надежности. Пусть стохастическая система S контролируется через случайный период времени $\xi = min(\xi, \tau)$, где ξ - случайное время до отказа, зависящее от наблюденного состояния в последний момент контроля; τ - плановый случайный период контроля, имеющий распределение Эрланга k-го порядка. В каждый момент контроля система может находиться в одном из состояний конечного множества $E = \{x_1, ..., x_N, \}$ Будем считать, что наилучшим состоянием, в котором вероятность отказа минимальна, является x_1 а наихудшим -состояние x_N. Состоянию x_1 соответствует новая система, а состоянию x_n - максимально изношенная. Все остальные состояния - промежуточные, вероятность отказа в которых упорядочена по его возрастанию от минимального к максимальному. Нам будет удобно расширить множество состояний, снабдив каждый элемент $x_1 \in E$ вторым индексом s, $s = 1, ..., k+1$. При этом $s = 1, ..., k$ указывает на фазу эрланговского распределения [2] периода т, а $s = k+1$ указывает на состояние планового контроля. Обозначим $E'' = \{x_{is}\}, i = 1, ..., N, s = 1, ..., k+1$. Таким образом, полное множество состояний $E = E'' \bigcup \{x_{ij}\}$.

Пусть в плановый момент контроля система находится в состоянии $x_{jk+1}, j = 1, ..., N$, в котором применяется одно из возможных профилактических ремонтов. Положим, что множество допустимых профилактических ремонтов, которое назовем множеством управлений и обозначим $Y = \{y_1, ...y_m\}$, конечно. Элемент этого множества, управление y_i, определяет глубину обновления системы. Оно определяет интенсивностиμ_{js} перехода системы из состояния x_{jk+1} в состояние x_{s1}, $s = 1, , j$ Будем считать, что чем глубже управление обеспечивает обновление системы, тем больше интенсивность перехода в состояние с меньшим номером s. Однако будем учитывать, что чем глубже обновление системы, тем больше стоит это управление.

Естественно считать, что отказ системы возможен в любом состоянии x_{js}, $j = 1, ..., N, s = 1, ..., k$, причем интенсивность отказа v_j не зависит от фазы s. Считаем формально, что отказ системы приводит к переходу ее в состояние x_0. В состоянии x_0 система восстанавливается в одно из состояний x_{j1}, с интенсивностью $\Phi_j, j = 1, ..., N$.

Обозначим интенсивность перехода между фазами через γ.

Основная задача моделирования будет состоять в выборе оптимальной стратегии управления, т. е. в выборе вида профилактического ремонта для каждого состояния в каждый момент контроля.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний предложенной модели имеет следующий вид [4]:

$$\frac{d}{dt}P_{11}(t) = -(v_1 + \lambda_1 + \gamma)P_{11}(t) + \Phi P_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \mu_{11} P_{ik}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{s1}(t)=-(v_s+\lambda_s+\gamma)P_{s1}(t)+\Phi_sP_0(t)+$$

$$+\sum_{i=s}^{N}\mu_{is}P_{ik+1}(t)+\lambda_{s-1}P_{s-11}(t),\ s=2,...,N-1,$$

$$\frac{d}{dt}P_{N1}(t)=-(v_N+\gamma)P_{N1}(t)+\Phi_NP_0(t)+$$

$$+\mu_{NN}P_{NK+1}(t)+\lambda_{N+1}P_{N-11}(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_{1s}(t)=-(v_1+\lambda_1+\gamma)P_{1s}(t)+\gamma\Phi_{1s-t},s=2,...,k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{qs}(t)=-(v_q+\lambda_q+\gamma)P_{qs}(t)+\gamma\Phi_{qs-1}+v_{q-1}P_{q-1s}(t),\quad q=2,...,N-1,\quad s=2,...,k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{Ns}(t)=-(v_q+\gamma)P_{Ns}(t)+\gamma\Phi_{Ns-1}+v_{N-1}P_{N-1s}(t),\ s=2,...,k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{qk+1}(t)=\sum_{i=1}^{N}\mu_{qi}P_{qk+1}(t)+\gamma P_{qk}(t),\ q=1,...,N,$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t)=-\sum_{i=1}^{N}\Phi_iP_0(t)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}v_i\gamma P_{ij}(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k+1}P_{ij}(t)=0$$

Заметим, что одно из уравнений системы, кроме условия нормировки, может быть опущено при ее решении.

усть в начальный момент времени система находится в состоянии x_{11}. Тогда начальное распределение вероятностей имеет следующий вид:

$P_{11}(0)=1,P_0(0)=0,P_j(0)=0$ для всех i,j, кроме $i=j=1$.

Рассмотрим случай, когда существует стационарный режим функционирования системы [4]. При этом существуют пределы вероятностей состояний $P_{1j}(t),P_0(t)$ при $t\to\infty$ и, следовательно, в этом режиме все производные этих вероятностей равны 0. Тогда приведенная система дифференциальных уравнений перейдет в неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Такая система может быть решена, например, с помощью компьютерной программы MAPLE.

Выводы

Предложен новый подход к моделированию стареющих технических систем, вероятность возможного отказа которых возрастает со временем. Он состоит в том, что для описания эволюции процесса старения технической системы вводится последовательность состояний, которые она проходит по очереди. При этом такой показатель системы как интенсивность отказа монотонно возрастает. Показано, что при определенных условиях эволюция системы может быть описана марковским процессом и, следовательно, модель может быть основана на системе уравнений Колмогорова. Целью моделирования явилось нахождение такой стратегии профилактических обновлений системы, которая бы оптимизировала ее работоспособность и надежность. Практическое значение полученных результатов состоит в том, что решение этой актуальной задачи легко может быть получено с помощью математических вычислительных программ, например MAPLE. Следует учесть, что в модели принят случайный период контроля. Последнее расширяет круг систем, которые адекватно могут быть описаны предложенной моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Радио и связь, 1983. 376 с.
2. Бекмуратов Т.Ф. Расулова С.С. Икрамов С.А. Хайдаров Ш.А. Анализ и оценка надежности восстанавливаемых вычислительных комплексов на базе мини-ЭВМ // Известия АН УзССР.-СТР. Вып.3. 1990, С.3-9.
3. БоровковА.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с.
4. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 288 с.
5. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1984. 208 с.
6 .Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
7. Дьяконов В. П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5, М.: СОЛОН, 1998. 400 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ВНЕШНИХ СИЛ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Хайиткулов Б. Х.[1], Латипов Н. К.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

[1]b.hayitqulov@mail.ru, [2]nusratulla@mail.ru

Пусть $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ 0 \le t \le T\}$ – параллелепипед. Требуется определить функцию $f(x, y, t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу [1-3]

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условия:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \quad a < x < b,\ c < y < d,\ 0 < t \le T, \\
u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d, \\
u(a, y, t) = \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \le y \le d,\ 0 < t \le T, \\
u(x, c, t) = \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \le x \le b,\ 0 < t \le T,
\end{array}$$

$$m(x, y, t) \le u(x, y, t) \le M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D,$$

где $u = u(x, y, t)$ – неизвестная функция; χ – фазовая скорость; $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_3(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные функции. Функции $m(x, y, t)$ и $M(x, y, t)$ – минимальное и максимальное значения, заданные в области D. Внешней силы описывается квадратично интегрируемой функций $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

В такой математической постановке эта задача на равномерной сетке решается методом конечных разностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. є. 5(29). С. 141–146.
2. Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне // Математическое моделирование и численные методы. 2020. є. 3. С. 85–98. DOI: 10.18698/2309-3684-2020-8598.
3. Хайиткулов Б.Х. Консервативные схемы для нестационарной задачи выбора оптимального размещения источников тепла в параллелепипеде // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2021. Том 36. Вып. 2. С. 39–46. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-39-46.

СРАВНЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ.

Маликов З. М.[1], Наврузов Д. П.[1], Мирзоев А. А.[1], Каримов Р. С.[2]
[1]ИМиСС им М.Т. Уразбоева АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
malikov.z@mail.ru, Navruzov.d@mail.ru, mirzoev.aa@mail.ru

[2]Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
roziq.s.karimov@gmail.com

Введение. К проблеме моделирования турбулентного переноса тепла посвящены множества научных работ. Потому, что данная проблема имеет большое научное и практическое значения. По этой причине возникает интерес использования турбулентных моделей. Для этого предположим, что давление является постоянным. Данное допущение является общеизвестным и сильно облегчает расчетную процедуру [1-4].

Математическая модель 1.Математический модифицированный модель Чена имеет следующий вид [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - \overline{uv}\right), \\ \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u_j k)}{\partial x_j} = P - \rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \rho L_k, \\ \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j} = f_1 C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\rho\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon})\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) - \rho L_\varepsilon. \quad (1) \end{cases}$$

2. Теперь рассмотрим математическую модель турбулентности на основе динамики двух жидкостей. Система уравнений для турбулентного потока имеет следующий вид [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial \tau} + \overline{V_j}\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{p}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v\left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i}\right) - v_j v_i\right], \\ \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + \overline{V_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -v_j\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{F_{fi}}{\rho} + \frac{F_{\perp i}}{\rho}, \\ \frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau} + \overline{V_i}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial(k\partial \overline{T}/\partial x_j - v_j t)}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + \overline{V_i}\frac{\partial t}{\partial x_j} = -v_j\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}k_j\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - K_t t, \\ v_{ij} = 3v + 2\left|\frac{v_i v_j}{def(\overline{T})}\right| for i \neq j, v_{ii} = 3v + \frac{1}{divv}\left|\frac{v_k v_k}{def(\overline{V})}\right|\frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ k_j = 3k + 2\frac{|tv_j|}{|grad\overline{T}|}, \\ F_f = -\rho K_f v, F_\perp = \rho C_s rot\overline{V} \times v. \quad (2) \end{cases}$$

Для расччта уравнение (1) и (2) сложных фигур мы изменяем систему координаты. Запишем систему (1) и (2) в переменных Мизеса [3] (z,r)на -(?,), где ?=z/L. В новых переменных, производные определяются по известной формуле:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases}$$

Результаты расчетов.

Приведем некоторые конкретные примеры, иллюстрирующие кратко описанные выше свойства модель Чена, и двух жидкостный модель турбулентности. На рис.1 показано сравнение результатов двух турбулентных моделей с опытными данными из [5]. Показан профиль избыточной температуры на автомодельном участке течения

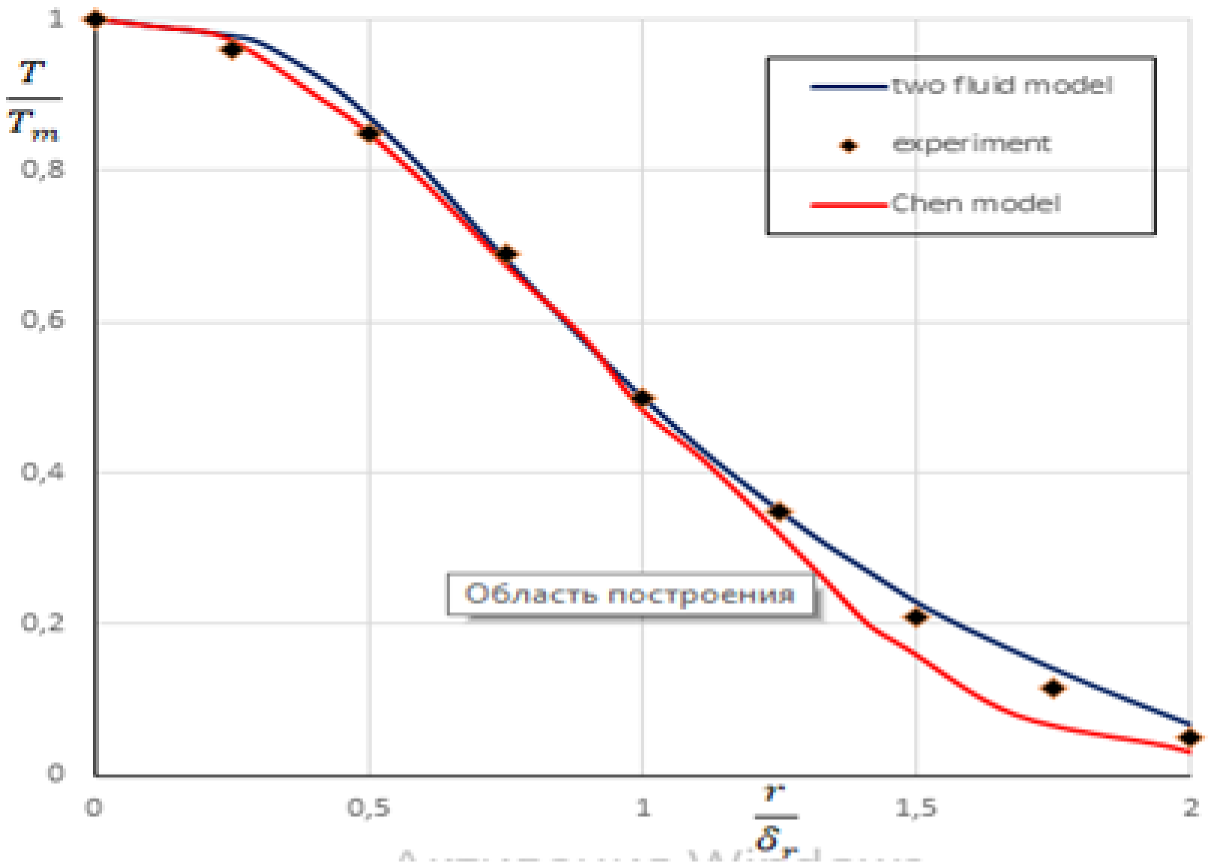


Рис 1.Профиль избыточной температуры на автомодельном участке.

Заключение. Проведено сравнительное тестирование модель Чена и двух жидкостного модели. Проведено сравнение результатов расччта с результатами экспериментов из [5]. Получено, что двух-жидкостной модель турбулентности дает очень близкие расчетные результаты для струйных течений. Двух жидкостный модель турбулентности универсальная модель турбулентности, которое позволяет находить решения задач. В целом наблюдается удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malikov Z.M. Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids.Applied Mathematical Modelling 91 (2021) pp.186Ц213.
2. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P. YCalculation of boundary layer development using the turbulent energy equationY, J. Fluid Mech., 1967.
3. Mises R., Zs. angew. Math.u. Mech., 7, 425(1927).
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа Ц М.: Наука. 1987.Ц 840с.
5. Chen CJ, Rodi W (1980) Vertical turbulent buoyant jets: a review of experimental data. Pergamon, Oxford.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ

Маматова Н.Х.[1], Бахронова Н.[2]

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
[1]nilufar.mamatova.76@mail.ru;

Приведем определение пространства Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ периодических функций [1],[2].

$L_2^{(m)}(0,\,1)$ это гильбертово пространство функций m-ое обобщенное производное которых интегрирумы с квадратом и каждый элемент пространства $L_2^{(m)}(0,\,1)$ является классом функций отличающихся друг от друга на постоянный член. Норма функций в пространстве $L_2^{(m)}(0,\,1)$ определяется формулой

$$\left\|\varphi\left|L_2^{(m)}(0,1)\right|\right\| = \left(\int\limits_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Здесь мы рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.1. Найти норму функционала погрешности l интерполяцион-ной формулы

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x)\cdot\varphi(x_k).$$

в пространстве $L_2^{(m)^*}(0,1)$.

Для получения явного вида нормы функционала погрешности l в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ используется понятие ее экстремальной функции, которое введено С.Л. Соболевым [1], [2]. Функция $u(x)$ из $L_2^{(m)}(0,1)$ называется экстремальной функцией для функционала погрешности l, если выполняется равенство

$$(l,u) = \left\|l\left|L_2^{(m)^*}(0,1)\right|\right\| \cdot \left\|u\left|L_2^{(m)}(0,1)\right|\right\|.$$

Напомним, что пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым и скалярное произведение в этом пространстве дается формулой

$$\langle\varphi,\psi\rangle_m = \int\limits_0^1 \varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx.$$

По теореме Рисса любой линейно непрерывный функционал l в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(l, \varphi) = \langle \psi_l, \varphi \rangle_m$$

для любой функции из $L_2^{(m)}(0,1)$. Здесь ψ_l — функция из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$, определяется единственным образом по функционалу l и является его экстремальной функцией. Интегрируя по частям выражения в правой части равенства (1.6) и используя периодичность функций $\varphi(x)$ и $\psi_l(x)$, получаем равенство

$$(l, \varphi) = (-1)^m \int\limits_0^1 \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \psi_l(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

Таким образом, экстремальная функция $\psi_l(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \psi_l(x) = (-1)^m l(x)$$

с граничными условиями $\psi_l^{(\alpha)}(0) = \psi_l^{(\alpha)}(1),\ \alpha = \overline{0, 2m-1}$

Теорема. Явное выражение для экстремальной функции $\psi_l(x)$ функционала погрешности (1.3) определяется формулой

$$\psi_l(x) = (-1)^m \left[B_{2m}(x-z) - \sum_{k=1}^{n} C_k(z) \cdot B_{2m}(x - x_k) + d_0 \right],$$

где $B_{2m}(x) = \sum\limits_{\beta \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \beta x)}{(2\pi i \beta)^{2m}}$ является полиномом Бернулли, d_0 — константа. Далее, вычисляя (l, ψ_l) получим квадрат нормы функционала погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. // - М.: Наука, 1974. - 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. // - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ УСТОЙЧИВОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА

Меражова Ш.Б.[1], Тураева Н.А.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
[1]shsharipova@mail.ru;

Аналитическое решение неклассических уравнений математической физики - очень сложный процесс, поэтому для краевых задач в этих уравнениях строятся устойчивые разностные схемы, что позволяет решать ряд краевых задач для уравнений смешанного типа. Разбирая разностные схемы для уравнений с частными производными, мы всегда проводим исследование, разбивая его на два этапа [1].

I этап состоит в проверке аппроксимации.

II этап состоит в проверке так называемой устойчивости.
Если разностные уравнения аппроксимируют дифференциальные уравнения и если имеет место устойчивость разностных уравнений, то легко доказывается близость точного и приближенного решений.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, \ -T < t < T\}$ мы рассматриваем следующее уравнение:

$$Lu \equiv K(t)u_{tt} - h(x)u_{xx} + a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

$K(t)$, $h(x)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ - заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям:
1) $K(t) \in C^2([-T,T])$, при $t \neq 0, tK(t) > 0$ и $K(0) = 0$.
2) $h(x) \in C^2([0,l])$, если $x \in (0,l)$ и $h(0) = h(l) = 0$.
3) $a(x,t), b(x,t) \in C^1(D)$, $c(x,t) \in C(\overline{D})$.
4) $\beta(x) = a(x,0) - K(0) > 0$, $x \in [0,l]$.

Краевая задача: Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющая в области D уравнение (1), а при $t = -T$ условию

$$u(x,-T) = 0, \ x \in [0,l]. \tag{2}$$

Применим метод конечно-разностных схем к краевой задаче (1)-(2). В области $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, -T \leq t \leq T\}$ строим разностную сетку с шагами $\Delta t = \Delta$, $\Delta x = \Delta_x$, $(T = m\Delta, \ l = n\Delta_x)$.

Через u_i^k обозначим приближенное решение краевой задачи в точке (t^k, x_i). Введем операторы $\varphi, \psi, \tau, \overline{\tau}, \xi, \overline{\xi}$ сдвига и разностные, следующим образом:

$$\varphi u_i^k = u_i^{k+1} = u^{k+1} = \widehat{u}, \ \varphi^{-1}u_i^k = u_i^{k-1} = u^{k-1} = \breve{u}, \ \psi^{\pm}u_i^k = u_{i\pm1}^k = u_{i\pm1},$$

$$\tau = \varphi - 1, \ \overline{\tau} = 1 - \varphi^{-1}, \ \xi = \psi - 1, \ \overline{\xi} = 1 - \psi^{-1}, \ r = \frac{\Delta}{\Delta_x}.$$

В этом случае аппроксимируем краевую задачу (1) - (2) следующей конечно-разностной схемой, устойчивость которой было доказано в [2]:

$$\begin{cases} L^{-}u \equiv \left[K^k \frac{\tau\overline{\tau}}{\Delta^2} - h_i \frac{\xi\overline{\xi}}{\Delta_x^2} + a_i^k \frac{\overline{\tau}}{\Delta} + b_i^k \frac{\overline{\xi}}{\Delta_x} + +c_i^k\right] u = f_i^k, \ k = \overline{-m+1,0}; \ i = \overline{0,n}, \\ L^{+}u \equiv \left[K^k \frac{\overline{\tau}\tau}{\Delta^2} - h_i \frac{\xi\overline{\xi}}{\Delta_x^2} + a_i^k \frac{\overline{\tau}}{\Delta} + b_i^k \frac{\overline{\xi}}{\Delta_x} + +c_i^k\right] u = f_i^k, \ k = \overline{1,m}; \ i = \overline{0,n}, \\ u_i^{-m} = 0, \ i = \overline{0,n} \end{cases} \tag{3}$$

Для исследования аппроксимации воспользовались формулой Тейлора. Определили что, (3) конечно-разностная схема аппроксимирует (1)-(2) задачу первым порядком относительно Δ, Δ_x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Уравнения математической физики. М: Наука, 1971г., с.416.
2. Меражова Ш.Б. Устойчивость разностной модели первой краевой задачи для уравнения смешанного типа. Узб. Матем. Журнал, (1) 2012г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Султанов М. А.[1], Мисилов В. Е.[2,3]

[1]Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан
murat.sultanov@ayu.edu.kz;

[2]Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

[3]Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
v.e.misilov@urfu.ru;

В работе рассматривается параболическое уравнение в частных производных с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} = a(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + c(x)U(x,t) + d(x,t),$$

где $U(x,t)$ — искомая функция, $a(x), b(x), c(x), d(x,t)$ — известные функции или константы, $0 < \alpha < 1$ — параметр дробной степени производной по времени.

Задача рассматривается на пространственном отрезке $0 \leq x \leq \gamma$, временном промежутке $t > 0$, начальные и граничные условия определяются в виде

$$U(0,t) = g_0(t), \quad U(\ell,t) = g_1(t), \quad U(x,0) = f(x),$$

где $g_0(t), g_1(t), f(x)$ — известные функции.

Дробная производная Капуто в данном случае задается следующей формулой [1]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int\limits_0^\infty \frac{\partial u(x-s)}{\partial t}(t-s)^{-\alpha} ds.$$

После дискретизации пространства и времени на равномерной сетке и аппроксимации уравнения с использованием неявной конечно-разностной схемы (первого порядка точности по времени и второго — по пространству), задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей большого размера. Для ее решения в данной работе используется модифицированный метод ускоренной верхней релаксации [2,3].

Алгоритм реализован в виде параллельной программы для многоядерных процессоров. Проведены численные эксперименты по оценке эффективности распараллеливания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан (проект №AP09258836).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang Y. A Finite Difference Method For Fractional Partial Differential Equation // Applied Mathematics And Computation. 2009. V. 215. P. 524–529.

2. Hadjidimos A. Accelerated OverRelaxation Method // Mathematics of Computation. 1978. V.32. P. 149–157.

3. Sunarto, A., Agarwal, P., Sulaiman, J. et al. Iterative method for solving one-dimensional fractional mathematical physics model via quarter-sweep and PAOR // Advances in Difference Equations. 2021. V. 147.

О ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Утебаев Д[1], Нуруллаев Ж. А.[2]

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан

[1]dutebaev_56@mail.ru

[2]njusipbay@mail.ru

Во многих областях техники и технологии встречаются задачи, математические модели которых приводят к решению уравнений в частных производных соболевского типа высокого порядка. Например, такие задачи встречаются при решении задач геофизики, океанологии, физики атмосферы, физики магнитоупорядоченных структур, физики плазмы, физики полупроводников, в задачах связанных с распространением волн в средах с сильной дисперсией и многие другие [1].

В работе рассматривается уравнение спиновых волн в магнетиках [1]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_1^2\right)\Delta_3 u+\omega_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\omega_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=f(x,t),(x,t)\in Q_T \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,t)=u_0(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=u_1(x,t),t=0,x\in\overline{\Omega} \tag{2}$$

и некоторыми локальными и нелокальными краевыми условиями. Здесь $u=u(x,t)$, $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma,\Omega=\{0<x_k<l_k,k=1,2,3\},Q_T=\{(x,t):x\in\Omega,t\in(0,T]\}$.

На первом этапе уравнение (1) аппроксимируется только по пространственным переменным, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов. Далее для дискретизации полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется следующая схема метода конечных элементов четвертого порядков точности, полученной с помощью кубического эрмитового сплайна [2]:

$$D_\gamma \dot{y}_t+Ay^{(0.5)}=\varphi_1,\ D_\alpha y_t-D_\beta\dot{y}^{(0.5)}=\varphi_2,\ y^0=u_0,\ \dot{y}^0=u_1. \tag{3}$$

Здесь $y=y^n=y(t_n)$, $\quad \hat{y}=y^{n+1}$, $\quad \dot{y}=\dot{y}^n=dy(t_n)/dt$, $n=0,1,\dots,$ $y^n\dot{y}^n\in H_h$,
$D_\lambda=D-\lambda\tau^2A$, $\quad \lambda=\alpha,\beta,\gamma$, $\quad \varphi_k=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi$, $\quad k=1,2,$ $\xi=(t-t_n)/\tau$,
$y_t=(\hat{y}-y)/\tau$, $\qquad \dot{y}_t=(\hat{\dot{y}}-\dot{y})/\tau$, $\quad y^{(0.5)}=(\hat{y}+y)/2$, $\dot{y}^{(0.5)}=(\hat{\dot{y}}+\dot{y})/2$, $\quad \vartheta_1(\xi)=1$,
$\vartheta_2(\xi)=s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi)+s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi)$, $\qquad \vartheta_2^{(1)}(\xi)=\tau\left(\xi-\frac{1}{2}\right)$,
$\vartheta_2^{(2)}(\xi)=\tau\left(\xi^3-\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi\right)$, $s_1=180\beta-40\alpha, s_2=1680\beta-280\alpha, H_h$ - конечномерное пространство для любого момента времени t; операторы D, A действуют из H_h в H_h.

Параметры схемы дали возможность получить схемы повышенного порядка точности и экономичный алгоритм численной реализаций. Например, параметры α, β, γ подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации, если $\alpha+\gamma=\beta+1/6$ и шестого порядка аппроксимации, если $\beta-6\alpha\gamma+1/40=0$. Доказана теорема о сходимости и точности схемы. В частности, получена оценка $\|u(x,t)-y(x,t)\|\le M(h^\sigma+\tau^4)$. При аппроксимации пространственных переменных методом конечных разностей при достаточной гладкости решения исходной задачи получена оценка с $\sigma=4$. А при аппроксимации пространственных переменных методом конечных элементов получена оценка с $\sigma=3$.

Таким образом, разработаны и исследованы численные методы повышенной точности решения задачи для уравнения спиновых волн в магнетиках типа легкая плоскость (1). Разработаны алгоритмы реализации методов, проведено тестирование его на точном решении в виде ряда Фурье и даны результаты сравнения их решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 736 С.
2. Москальков М.Н., Утебаев Д. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. - Ташкент, "Фан ва технология 2012. - 160 с.

V SHO‘BA: EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

СЕКЦИЯ № 5: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

SECTION No. 5: THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

PANJARADAGI BIR ZARRACHALI SISTEMA ENERGIYASINING O’RTA QIYMATI VA DISPERSIYASI

Abdullayev J.I.[1], **Toshturdiyev A.M.**[2], **Mamatmurodov X.**[3]

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston

[1]*jabdullaev@mail.ru*, [2]*atoshturdiyev@mail.ru*

[3]*xmamatmurodov@mail.ru*

Kvant nazariyasi klassik mexanikadan farqli ravishda, bo‘lajak voqealarni aniq aytib bera olmay, balki ularning amalga oshish ehtimolligini ko‘rsatadi. Ammo bitta zarracha bilan qayta-qayta tajriba o‘tkazish real bo‘lmagan masaladir, chunki mikroobyekt ustida o‘tkazilgan har bir o‘lchov uning holatini o‘zgartiradi. Shunga ko‘ra, ko‘p marta bir xil tajribalar o‘tkazish uchun bir xil holatdagi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va bir xil holat funksiyasi bilan tavsiflangan ikki yoki undan ortiq miqdordagi aynan o‘xshash zarrachalar bo‘lishi kerak [1],[2]. Kvant mexanikasidagi sistemaning holatlari Ω kompleks separabel Hilbert fazosining (birlik) vektorlari bilan ifodalanadi. Bunda ikkita vektor ayni bitta holatni faqat va faqat nolmas kompleks ko‘paytuvchiga farq qilgandagina (ψ va φ vektorlar uchun $\psi = c\varphi, |c| = 1$) ifodalaydi. Har bir kuzatiluvchan miqdorga Ω da chiziqli o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni bir qiymatli mos qo‘yish mumkin [3].

Har qanday kvantomexanik sistemada eng muhim fizik miqdorlardan biri bu energiya hisoblanadi. Bizga ikki o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^2$ da erkin harakatlanayotgan kvant tipidagi zarrachaga mos sistema berilgan bo‘lsin. Zarracha energiyasining qiymati tasodifiy miqdor bo‘lib, bu tasodifiy miqdorni h orqali, unga mos o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni esa H bilan belgilaymiz. Bir zarrachali sistemaga mos energiya operatori $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ Hilbert fazosida [4] quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2,$$

bu yerda m zarrachaning massasi, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$, va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ bo‘lib, $I - \ell_2(\mathbb{Z}^2)$ dagi birlik operator, Δ esa panjaradagi standart Laplas operatori, ya‘ni

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2} (\hat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e_j}) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e_j}) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

bu yerda $\mathbf{e_1} = (1,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1)$ lar $\mathbb{Z}^2$ panjaradagi birlik vektorlar.

Energiya operatorining koordinat tasviridan impuls tasviriga o‘tish Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi:

$$F : \ell_2(Z^2) \to L_2(\mathbb{T}^2), \ \ \mathbb{T} = [-\pi, \pi], \ \ (F\hat{f})(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in Z^2} \hat{f}(\mathbf{n}) e^{i(n_1p_1 + n_2p_2)}.$$

H energiya operatorining impuls tasviri Hilbert fazosi $L_2(\mathbb{T}^2)$ da quyidagi formula yordamida aniqlanadi [4]:

$$(Hf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{m}(2 - \cos p_1 - \cos p_2) f(\mathbf{p}), \ \ f \in L_2(\mathbb{T}^2).$$

Ma‘lumki [5], $\varphi_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi}$, $\varphi_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} e^{in(p_1+p_2)}$, $n \in \mathbb{Z}$ vektorlar $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazoda ortonormal sistema tashkil qiladi.

φ_n holatlarning dastlabki $2n + 1$ tasining yig‘indisidan tashkil topgan quyidagi holatlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$S_n(\mathbf{p}) = \frac{\varphi_{-n}(\mathbf{p}) + \cdots + \varphi_0(\mathbf{p}) + \cdots + \varphi_n(\mathbf{p})}{\sqrt{2n+1}}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Istalgan $n \in \mathbb{Z}_+$ butun son uchun $\|S_n\| = 1$ tenglikni bevosita tekshirib ko‘rish mumkin.

a kuzatiluvchan miqdorning ψ holatdagi o‘rta qiymati $\bar{a}_\psi$ va dispersiyasi $D(a_\psi)$ uchun quyidagi tengliklar o‘rinli ([3] ga qarang)

$$\bar{a}_\psi = (A\psi, \psi), \qquad D(a_\psi) = \|A\psi - \bar{a}_\psi \psi\|^2. \tag{2}$$

Yuqorida keltirilgan (2) formulalardan foydalanib zarracha energiyasi h ga mos tasodifiy miqdorning S_n holatdagi o‘rta qiymati $\overline{h}_{S_n}$ uchun quyidagi tasdiqni isbotlash mumkin.

1-teorema. *Zarracha energiyasi h ning (1) ko‘rinishda aniqlangan S_n holatdagi o‘rta qiymati o‘zgarmas bo‘lib barcha $n \in \mathbb{Z}_+$ larda bir xil, yani*

$$\overline{h}_{S_n} = \frac{2}{m}$$

ga teng.

Bizga ehtimollar nazariyasi kursidan ma‘lumki tasodifiy miqdorning dispersiyasi, shu tasodifiy miqdor qiymatlarining o‘rta qiymat atrofidagi tarqoqligini ifodalovchi sonli kattalik hisoblanadi. Quyidagi tasdiqda zarracha energiyasi h ning S_n holatdagi dispersiyasi $D(h_{S_n})$ ning qiymati topilgan.

2-teorema. *Zarracha energiyasi h ning S_n, $n \in \mathbb{N}$ holatdagi dispersiyasi*

$$D(h_{S_n}) = \frac{1}{m^2}\Big(1 + \frac{2n}{2n+1}\Big)$$

ga teng.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *M.M. Musaxanov, A.S. Rahmatov.* Kvant mexanikasi. "TAFAKKUR BO'STONI" Toshkent 2011. 352.
2. *Л.Д, Ландау, Е.М.Лифшиц.* Квант механикаси. Тошкент."Укитувчи".2-китоб. 1977. 288.
3. *Ф.А. Березин, М.А. Шубин.* Уравнение Шредингера. Изд. Московского университета. 1983. 394.
4. *Абдуллаев Ж.И.* Связанные состояния системы двуч фермионов на одномерной решетке. Теоретическая физика. Россия, Москва. Т.147, N 1,2006, 36-47.
5. *Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I.* Funksional analiz va integral tenglamalar. Darslik. Toshkent. LIGHT-GROUP. 2015. 460.

ON ASSYMPTOTICS OF A PROBABILITY OF THE EVENT: EACH CELL CONTAINS EVEN NUMBER OF PARTICLES

Abdushukurov F.A.
Yeoju Technical Institute In Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
fayz.abdushukurov@mail.ru

Let n, N be integer numbers. A homogeneous allocation scheme of n distinguishable particles by N different cells is named the random variables $\eta_1, \dots, \eta_N$, with the joint distribution defined by formula

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_N!}\left(\frac{1}{N}\right)^n,$$

where $k_1, k_2, \dots k_N$ are nonnegative integer number such that $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n$. Many papers deal with limit theorems for allocation scheme of distinguishable particles by different cells (see [1]) and its references).

Denote by $P(n, N)$ the probability of the event: in allocation scheme of $2n$ distinguishable particles by N different cells each cell contains even number of particles.

Observe that

$$P(n, N) = \sum_{k_i \in \mathbf{N},\ 1 \le i \le N,\ k_1+k_2+\cdots+k_N=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\cdots(2k_N)!}\frac{1}{N^{2n}}$$

$$= \sum_{k_i \in \mathbf{N},\ 1 \le i \le N,\ k_1+k_2+\cdots+k_N=n} \frac{\frac{\alpha^{2k_1}}{(2k_1)!}\frac{\alpha^{2k_2}}{(2k_2)!}\cdots\frac{\alpha^{2k_N}}{(2k_N)!}}{\frac{(\alpha N)^{2n}}{(2n)!}} =$$

$$= \left(\frac{ch(\alpha)}{e^{\alpha}}\right)^N \sum_{k_i \in \mathbf{N},\ 1 \le i \le N,\ k_1+k_2+\cdots+k_N=2n} \frac{\frac{\alpha^{2k_1}}{ch(\alpha)(2k_1)!}\frac{\alpha^{2k_2}}{ch(\alpha)(2k_2)!}\cdots\frac{\alpha^{2k_N}}{ch(\alpha)(2k_N)!}}{e^{-\alpha N}\frac{(\alpha N)^{2n}}{(2n)!}}.$$

Therefore, using Stirling formula for estimation of $(2n)!$, for $\alpha = \frac{2n}{N}$ we obtain

$$P(n, N) = (1 + o(1))\sqrt{4\pi n}\left(\frac{1 + e^{-2\alpha}}{2}\right)^N \mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_N = 2n),$$

where $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_N$ are independent random variables with the distribution

$$\mathbf{P}(\xi_i = 2k) = \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!ch(\alpha)},\ \ k = 0, 1, 2 \dots,$$

or

$$P(n,N) = (1+o(1))\sqrt{4\pi n}\left(\frac{1+e^{-2\sqrt{\alpha_1}}}{2}\right)^N \mathbf{P}(\xi_1' + \cdots + \xi_N' = n),$$

where $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_N'$ are independent random variables with the distribution

$$\mathbf{P}(\xi_i' = k) = \frac{\alpha_1^k}{(2k)!ch(\sqrt{\alpha_1})}, \quad k = 0, 1, 2\ldots, \quad \alpha_1 = \alpha^2.$$

Using various local limit theorems for an estimation of $\mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_N = 2n)$ or $\mathbf{P}(\xi_1' + \cdots + \xi_N' = n)$ we obtain various limit theorems for $P(n,N)$.

Observe that the expectation and the variance of ξ_i are

$$e(\alpha) = \alpha th(\alpha), \quad \sigma^2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{ch^2(\alpha)} + \alpha th(\alpha).$$

Using Poisson limit theorem for an estimation of the probability $\mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_N = 2n)$ we obtain the following theorem.

Theorem 1 *Let $n, N \to \infty$ such that the family of the numbers*

$$N\frac{\alpha^2}{2} = \lambda$$

is bounded. Then we have

$$P(n,N) = (1+o(1))\sqrt{4\pi n}e^{-4n}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

In the next theorem for an estimation of the probability $\mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_N = 2n)$ we use the local limit theorem from [2].

Theorem 2 *Let $0 < \alpha' < \alpha'' < \infty$. Let $n, N \to \infty$ such that $\alpha' < \alpha < \alpha''$. Then we have*

$$P(n,N) = (1+o(1))\sqrt{\frac{1}{\frac{\alpha}{ch^2(\alpha)} + th(\alpha)}}\left(\frac{1+e^{-2\alpha}}{2}\right)^N e^{-NC(\alpha)},$$

where

$$C(\alpha) = \frac{\alpha e^{-2\alpha}}{2(\alpha + sh(\alpha)ch(\alpha))}$$

In the next theorem for an estimation of the probability $\mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_N = 2n)$ we use the local limit theorems from [3].

REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevast'ynov B. P., Chistiakov V. P. Random allocation. – Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston& Sons, Washington, DC, 1978.
2. Timashev A. N. Asimptotic expansions in probabilistic combinatorics. M.: TVP. 2011.
3. Kolchin A. V., Kolchin V.F. On transition of distributsion of sums of independent identically distributed random variables from one lattice to another in the generalised allocathion scheme. Discret Math. Appl., 16 No. 6, 527-540 (2006); translation from Discret. Mat., 18, No. 4, 113-127 (2006).

SUG'URTA KOMPANIYASINING SUG'URTA MUKOFOT PULINI TO'LAY OLMASLIK RISKI VA UNING ERKIN ZAHIRALARI

Arabboyev A. B.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti,Toshkent, O'zbekiston
azimjonarabboyev1777@gmail.com

Faraz qilamiz, U-sug'urta portfelining boshlang'ich qiymati, X_i-mijozlarning bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan sug'urta badallarining miqdori $(i = 1, 2, ..., N)$ bo'lsin.

$$E(X_1) = m, \quad E(X_1^2) = \alpha_2$$

Bu yerda N-matematik kutilmasi n bilan Puasson taqsimlangan tasodifiy miqdor. Shuningdek, P-yil boshida qabul qilingan umumiy sug'urta mukofatini va

$$C = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

sug'urta badalining jami miqdori bo'lsin.

Yuqoridagi belgilashlardan quyidagi kelib chiqadi:

$$E(C) = nm$$

Puasson taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi tengligidan foydalanib, quyidagi natijani olamiz:

$$D(C) = E(N)D(X_i) + D(N)[E(X_i)]^2 = nE(X_i^2) = n\alpha_2$$

Ushbu portfelning mukofat riski matematik kutilma $E(C) = nm$ ga teng va mukofat riski uchun quyidagicha ifodani olish mumkin:

$$P = (1 + \lambda)nm$$

Bu yerda $\lambda > 0$ zaruriy xavfsiz yuklama. Amaliyotda, bu aksiyadorlarning qaytib kelishini ta'minlaydigan, odatda sof sug'urta puli miqdorining foizi sifatida ifodalanadigan va yutuqli aksiyalar uchun mo'ljallangan qiymatdir. Shunday qilib, sug'urta badalining sotiladigan narxi quyidagicha:

$$U + (1 + \lambda)nm$$

va sug'urtalovchi yil oxirida bankrotlik holatiga tushishi mumkin, agar quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$U + (1 + \lambda)nm - C \leq 0$$

Boshqa tamondan, bu eng katta zahira jamg'arilishiga mutonasib emas. Asosiy muammo bu-to'lov qobiliyatsizligi ehtimolligini minimallashtirish, ya'ni

$$P\{U + (1 + \lambda)nm - C < 0\} \leq \epsilon$$

Bu yerda, ϵ-to'lov qobiliyatsizligi uchun mumkin bo'lgan eng katta ehtimollik. Ushbu tengsizlikni quyidagicha o'zgartirishimiz mumkin:

$$P\{C > U + (1 + \lambda)nm\} \leq \epsilon$$

Endi quyidagi standart ko'rinishga keltiramiz:

$$P\left\{\frac{C-nm}{\sqrt{n\alpha_2}} > \frac{U+\lambda nm}{\sqrt{n\alpha_2}}\right\} \leq \epsilon.$$

Agar sug'urta portfeli yetarlicha katta bo'lsa, C ning taqsimoti Normal taqsimot qonuniga yaqinlashadi,ya'ni

$$P\left(\frac{C-nm}{\sqrt{n\alpha_2}}\right) \approx 1-\Phi(\dots)$$

bu yerda

$$x_\epsilon = \frac{U+\lambda nm}{\sqrt{n\alpha_2}}$$

yordamida belgilab, $\Phi(x_\epsilon) = 1-\epsilon$ ekanligini ta'minlaymiz. Endi quyidagini yozib olamiz:

$$U \geq x_\epsilon\sqrt{n\alpha_2} - \lambda nm$$

Agar biz sug'urta badali miqdori uchun Normalning quvvatini o'zgartirishdan foydalanib, Kornish-Fisher tarqalishining birinchi qoidasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Z_\epsilon = x_\epsilon + \frac{\gamma(x_\epsilon^2-1)}{6}$$

bu yerda, γ-yuqorida ko'rilgan taqsimotning assimetriya koeffitsiyenti. Bundan erkin zahiralar uchun quyidagiga egamiz:

$$U = \left(x_\epsilon + \frac{\gamma(x_\epsilon^2-1)}{6}\sqrt{n\alpha_2} - \lambda nm\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Raeve E., Pavlov V. Some Approaches for Modeling Claims Process in General Insurance, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, 2015, pp. 233-238.

2. Fisher R.A., Cornish E.A. The Percentile Points of Distribution Having Knon Cumulants, USA, 1960.

3. Hart D., Buchanan R., Howe B. Actuarial Practice in General Insurance, Institute of Actuaries of Australia, Sydney, 1996.

BIR JINSLI BO'LMAGAN IMMIGRATSIYALI KRITIK TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONI UCHUN LIMIT TEOREMA

Azimov J. B.[1], Toshmatov M.[2]

[1]Toshkent davlat transport universiteti, Toshkent, O'zbekiston,
azimovjb@mail.ru
[2]O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston,

Holatga bogliq bo'lgan immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonini ko'rib chiqamiz. Aytaylik, μ_n Galton-Vatson jarayonining n- vaqt momentidagi zarralar soni bo'lsin ($n = 1, 2, ..., \mu_0 = 1$). Ma'lumki, Galton-Vatson jarayonini

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \qquad p_j = P\{\mu_1 = j\}, \quad j = 0, 1, ..., \quad |x| \leq 1$$

hosil qilish funksiyasi yordamida aniqlash mumkin.

Agar biror musbat butun m soni uchun $\mu_n = k, \quad 0 \leq k \leq m$ bo'lsa, u holda n - vaqt momentida populyatsiyaga ξ_n sondagi zarralar kelib qo'shiladi, qo'shilgan zarralar sonininig evolyutsiyasi keyinchalik $F(x)$ hosil qilish funksiyali odatdagi Galton-Vatson jarayoni qonuniga bo'ysunadi. Endi avlodlar soni cheksiz ko'payganda, immigratsiya intensivligi kamayadi va nolga intiladi deb taxmin qilamiz. Shunday qilib, immigratsiya quyidagi

$$g_{k,n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{kj}(n)x^j, \quad |x| \leq 1, \quad k = 0, 1, ..., m,$$

$$q_{kj} \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_{kj}(n) = 1 \quad n = 0, 1, 2, ...$$

hosil qilish funksiyasi orqali aniqlanadi.

Faraz qilaylik Z_n yuqorida keltirilgan bir nechta holatlarga bog'liq, bir jinsli bo'lmagan immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning n -vaqt momentidagi zarralar soni bo'lsin. $\{Z_n, \quad n \geqslant 0\}$ jarayon $m = 0$ va immigratsiya bir jinsli bo'lgan holda Foster [1], Peyks [2] va Sato [3] tomonidan o'rganilgan, ixtiyoriy m uchun bunday jarayon [4], [5] ishlarda qaralgan. Immigratsiya bir jinsli bo'lmagan va $m = 0$ bo'lgan holda esa $\{Z_n, \quad n \geqslant 0\}$ jarayon Mitov, Vatutin, Yanev [6] ishida o'rganilgan. Ushbu ishda keltirilgan natija $m > 0$ bo'lgan hol uchun [6] ishdagi ba'zi natijalarni umumlashtiradi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_{ij} = P\left(Z_{n+1} = j/Z_n = i\right)$$

$$P_{0j}(n) = P\left(Z_n = j/Z_0 = 0\right)$$

$$A_n = EZ_n = \Phi_n'(1), \quad B_n = \Phi_n''(1)$$

$$\alpha_n = \max_{0 \leq k \leq m} g_{k,n}'(1), \quad \beta_n = \max_{0 \leq k \leq m} g_{k,n}''(1).$$

Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$F'(1) = 1, \quad 0 < F''(1) = 2b < \infty,$$

$$\sup_n \alpha_n < \infty, \quad \sup_n \beta_n < \infty,$$

$$0 < \alpha_n \longrightarrow 0, \quad \beta_n \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Shu bilan birga α_n ning nolga yaqinlashish tezligi $\alpha_n \sim n^{-1}L(n), \quad n \longrightarrow \infty$ bo'lsin, bu yerda $L(n)$ cheksizlikda sekin o'zgaruvchi funksiya.

Ma'lumki [7], ushbu

$$L^*(n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{L(k)}{k}, \quad n \longrightarrow \infty$$

funksiya ham cheksizlikda sekin o'zgaruvchi funksiya bo'ladi.

Teorema. Agar $\beta_n = o(\alpha_n \ln n)$ va $L^*(n) \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty$ bo'lsa, u holda $n \longrightarrow \infty$ da

$$A_n \sim L^*(n), \quad B_n \sim 2bnL^*(n)$$

ADABIYOTLAR

1. Foster G. A limit theorem for a branching processes with state-dependent immigration // Ann.Math.Stat. 42, 5(1971), 1173-1176.
2. Pakes A. A brandung processes with state-dependent immigration component // Adv. Appl. Prob. 3, 2(1971), 301-314.
3. Sato M. On a Galton-Watson processes with state-dependent immigration. Sci. Repts Nigata Univ. 12(1975), 43-45.
4. Митов К., Ватутин В.А., Янев Н. Критические процессы Гальтона-Ватсона с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса // Сердика Българско мат. списание. Т.10, 1984, с.412-424.
5. Форманов Ш.К., Азимов Ж.Б. О предельных поведениях ветвящихся процессов Фостера-Пэйкса (случай бесконечной дисперсии) // Узб. матем. журн., 1998, є 4, 59-63.
6. Азимов Ж.Б. О предельных законах распределения для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией, зависящей от состояния // Узб. матем. журн., 1998, є 6, с.15-20.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2, М.: Мир, 1967.

OPSION NARXI BAHOSINING BINOMIAL MODELINI MODELLASHTIRISH

Bozorboyeva H. Sh.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston, bozorboyevahilola22@gmail.com;

Butun dunyoda muddatli opsion shartnomalari bozori-moliyaviy bozorning muhim qismidir. Rivojlangan mamlakatlarda muddatli bozor aylanmasi bazaviy aktivlar bozoridagi savdo hajmidan o'n barobar ko'pdir. Opsion shartnomalari bozori sarmoyani samarali boshqarish uchun keng imkoniyatlar yaratganligi uchun eng kam xarajat evaziga ko'plab investorlar orasida mashhurlikka erishdi. Opsion moliyaviy bozorlardagi eng muhim hosilaviy vosita sanaladi.

Opsion (nemischa "option"so'zidan kelib chiqqan) ikki shaxs o'rtasida tuzilgan shartnoma bo'lib, muayyan vaqt ichida ma'lum bir narxda muayyan aktivni sotib olish huquqini yoki muayyan vaqt ichida ma'lum bir narxda ma'lum bir aktivni sotish huquqini beradi. Opsionni sotib olgan shaxs xaridor, uni sotgan shaxs esa opsion sotuvchisi deyiladi.

Opsion tushunchasi birinchi marta qishloq xo'jaligi mahsulotlari savdosida paydo bo'ldi. 1973-yilda Chikago fond birjasida qimmatli qog'ozlar uchun birinchi standart opsionlar paydo bo'ldi. Undan oldin, individual opsion shartnomalari nostandart xususiyatlarga ega bo'lib, muayyan mijozning ehtiyojlariga moslashtirilar edi.80-yillarning oxirida Amsterdam, London, Singapur va Sidney birjalarida, keyinchalik esa Fransiya, Yaponiya, Belgiya, Shvetsiya va yangi Zelandiyadagi birjalarda opsionlar paydo bo'ldi. Opsionlar operatsiyalar fond portfelini sug'urtalash (portfel-qimmatli qog'ozlar to'plami) yoki kurslardagi farq bo'yicha foyda olish uchun, ya'ni spekulyativ maqsadlar uchun amalga oshiriladi. Opsionning o'ziga xos xususiyati shundaki, uning egasi qimmatli qog'ozning o'zini harid qilmaydi, balki uni sotib olish yoki sotish huquqiga ega bo'ladi. Bunda u o'zining harid qilish yoki sotish huquqidan foydalanishi yoki undan voz kechishi ham mumkin. Opsion sotib oluvchi opsioni (opsion-koll, call-opsion) va sotuv opsioni (opsion-put, put-option) turlariga bo'linadi. Opsion-callda egasi sotib olish huquqiga, opsion-putda egasi sotish huquqiga ega bo'ladi.

Opsionlarni baholash va opsionning muqobil qiymatini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo'lib, bunda Blek-Shouls modeli eng birinchilardan ishlab chiqilgan va asosiy model hisoblanadi. Bundan tashqari binomial model ham opsion narxining qiymatini baholashda ishlatiladi.

Ushbu modellar yordamida biz opsionning narxini osongina hisoblashimiz mumkin. Blek-Shouls modeli yordamida opsion qiymatini Excel va Maple dasturlari yordamida ham hisoblashimiz va sonli natijalarni olishimiz mumkin. Maple dasturi boshqa dasturlarga nisbatan hisob-kitoblarni yanada tez va oson bajarishga imkon beradi. Shuning uchun, opsion narxi baholarini Blek-Shouls modeli yordamida hisoblaganda Maple dasturidan foydalanish yuqori natijalarni olishga yordam beradi.

ADABIYOTLAR

1. *М.Т.Бакоев, А.К.Мухамедов.* Молиявий математика.Укув кулланма. ЖИДУ. 2013. 194б.

2. *Дж. К. Халл.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты - Издательский дом Вильямс, Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2008.

3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики, том 1 "Факты и модели"и том 2 "Теория изд-во ФАЗИС, М.,1998.

4. *Меньшиков И.С.* Финансовый анализ ценных бумаг. Курс лекции - М., Финансы и статистика, 1998, 360 с.

INTEGRAL INTENSEVLIKLAR NISBATI FUNKSIYASINI NOPARAMETRIK BAHOLASH

Bozorov S. B.

Guliston davlat universiteti, Guliston,O'zbekiston.

suxrobbek_8912@mail.ru

Faraz qilaylik, $X_1,\ X_2,$ ... va $Y_1,\ Y_2,$ ... ikki o'zaro bog'liq emas va har biri bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari berilgan bo'lib, ular mos ravishda bir xil F va G taqsimot funksiyalariga ega bo'lsin. Biz amaliyotda ko'p uchrab turadigan holat, ya'ni bizni qiziqtiruvchi X_j tasodifiy miqdorlar o'ng tomondan ularga xalaqit beruvchi Y_j tasodifiy miqdorlar orqali senzurlanishini ko'raylik. Bunda kuzatiladigan statistik tanlanma faqatgina X_j lardan emas, balki juftliklardan iborat bo'lgan hajmi n ga teng bo'lgan quyidagi tanlanmadan iborat bo'ladi: $C^{(n)} = \{(Z_j, \delta_j)\,, 1 \le j \le n\}$, bu yerda
$Z_j = \min(X_j, Y_j)$ va $\delta_j = I(X_j \le Y_j) = I(Z_j = X_j)$-indikator funksiyasi. Demak, $C^{(n)}$ tanlanmada faqat $\delta_j = 1$ (ya'ni $X_j \le Y_j$ yoki $Z_j = X_j$) bo'lganidagina X_j lar kuzatiladi va bunday X_j larning umumiy soni $\nu_n = \delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n$ - tasodifiy miqdorga tengdir. Demak, $C^{(n)}$ tanlanma X_j larga nisbatan to'liq bo'lmagan, ya'ni senzurlangan tanlanma bo'ladi. Tadqiqotchini X_j va Y_j larning bir-biriga nisbatan qanday intensivlikda ya'ni zichlikda ekanini solishtirish dolzarb masaladir. Bu masalani tadqiq qilish maqsadida X_j va Y_j larning F va G taqsimotlariga mos kelgan $\Lambda_F(t)$ va $\Lambda_G(t)$- integral intensevlik funksiyalarini kiritamiz: $\Lambda_F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{1-F(u)} dF(u), \Lambda_G(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{1-G(u)} dG(u),\ t \in (-\infty; +\infty)$.
Dastlab bularning nisbati bovҐЧlgan $r(t) = \Lambda_G(t)/\Lambda_F(t) \ge 0$ funksiyasini kiritamiz. Ammo manfiy bo'lmagan $r(t)$ funksiya yuqoridan chegaralanmaganligi uchun, $[1, 2]$ maqolalarda kiritilgan va [3] da batafsil tadqiq etilgan $R(t) = \Lambda_F(t)/\Lambda_H(t)$ funksiyani qaraymiz.

Bu yerda $\Lambda_H(t) = \Lambda_F(t) + \Lambda_G(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{1-H(u)} dH(u)$, $t \in (-\infty;+\infty)$. $C^{(n)}$ tanlanmadagi $Z_j = \min(X_j, Y_j)$ tasodifiy miqdorlarning $H(t) = P(Z_j < t) = 1 - P(Z_j \geq t) = 1 - P(X_j \geq t) P(Y_j \geq t) = 1 - (1 - F(t))(1 - G(t))$ taqsimotiga mos kelgan integral intensevlik funksiyasidir. Ravshanki: $R(t) = \frac{\Lambda_F(t)}{\Lambda_H(t)} = \frac{\Lambda_F(t)}{\Lambda_F(t)+\Lambda_G(t)}$ funksiya normallangandir: $R(t) \in [0;1]$, $t \in (-\infty;+\infty)$. $C^{(n)}$ tanlanmadagi Z_j va δ_j tasodifiy miqdorlarning bog'liqligini ifodalovchi δ_j ning Z_j ga nisbatan regressiyasini aniqlovchi $P(t) = P(\delta_j = 1/Z_j = t) = M[\delta_j / Z_j = t]$ funksiyani kiritamiz. Hisoblab ko'rish mumkinki, $\Lambda_F(t)$ funksiyani $P(t)$ va $\Lambda_H(t)$ lar orqali quyidagicha ifodalab olish mumkin: $\Lambda_F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} P(u) d\Lambda_H(u)$ va demak,

$$R(t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} P(u) d\Lambda_H(u)}{\Lambda_H(t)}, \ t \in (-\infty;+\infty).$$

Bu yerdan $R(t)$ ning oxirgi ifodasini e'tiborga olgan xolda $C^{(n)}$ tanlanma bo'yicha qurilgan quyidagi noparametrik bahosi xossalari keltirilgan:

$$R_n(t) = \frac{\Lambda_F^{(n)}(t)}{\Lambda_H^{(n)}(t)}, \ \ t \in (-\infty;+\infty),$$

bu yerda
$\Lambda_F^{(n)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} P_n(u) d\Lambda_H^{(n)}(u)$ statistika $\Lambda_F(t)$ ning bahosi;
$\Lambda_H^{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{I(Z_j < t)}{1 - H_n(Z_j) + \frac{1}{n}}$ statistika $\Lambda_H(t)$ ning bahosi;
$H_n(t) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} I(Z_j < t)$ statistika $H(t)$ ning bahosi va

$$P_n(t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} k\left(\frac{t-Z_j}{h(n)}\right) \delta_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} k\left(\frac{t-Z_j}{h(n)}\right)}$$

statistika esa $P(t)$ uchun Nadaraya-Watsonning yadroviy- silliqlangan regressiya bahosini aniqlaydi. Bu yerda $k(t)$ biror tanlangan zichlik funksiyasi va $\{h(n), n \geq 1\}$ manfiy bo'lmagan va $n \to \infty$ da nolga intiluvchi sonlar ketma-ketligidir. $R_n(t)$ bahoning $R(t)$ ga tekis kuchli asosli baho ekanligini ko'rsatish uchun quyidagi shartlarni kiritamiz:
(C1) (F, G) $\in K = \{(F, G) : N_F \cap N_G \neq \varnothing, \ P(X_j \leq Y_j) \in (0;1)\}$,
$N_F = \{t : \ 0 < F(t) < 1\}, \ N_G = \{t : \ 0 < G(t) < 1\}$;
$(C2)$ α, β va γ sonlar shunday tanlanadiki, $\alpha > \tau_H = \sup\{t : H(t) = 0\}$,
$\beta < T_H = \inf\{t : H(t) = 1\}$, $[\alpha, \beta] \neq \varnothing$, $\gamma \in (0,1)$ va $\min\{H(\alpha), 1 - H(\beta)\} \geq \gamma$;
$(C3)$ $P(0 < \nu_n < n) = P\left(0 < \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j < n\right) = 1$, $n \geq 1$;
$(C4)$ $k(t)$ zichlik funksiya simmitrik, uzluksiz ikki marta differensiallanuvchi, chegarangan variatsiyaga ega va $t \in [-1;1]$ da aniqlangan;

$(C5)$ $t \in [\alpha, \beta]$ nuqtada uzluksiz to'rt marta differensiallanuvchi $q(t) = H'(t)$ zichlik funksiya mavjud bo'lib, $\sup\limits_{\alpha \le t \le \beta} q(t) > 0$;
$(C6)$ $P(t)$ funksiya $t \in [\alpha, \beta]$ nuqtada uzluksiz to'rt marta differensiallanuvchi;
$(C7)$ $n \to \infty$ da biror $\varepsilon > 0$ uchun $n^{1-\varepsilon} \cdot h(n) \to \infty$, biror $\lambda > 0$ uchun $\sum_{n=1}^{\infty} h^{\lambda}(n) < \infty$ va $h^2(n) = o\left((nh(n))^{-1/2}\left(\log \frac{1}{h(n)}\right)^{1/2}\right)$. Endi $R_n(t)$ bahoning $R(t)$ uchun tekis kuchli asosliligi haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.
Teorema. $(C1) - (C7)$ shartlar bajarilgan bo'lsin. U holda $n \to \infty$ da

$$P\left(\sup_{\alpha \le t \le \beta} |R_n(t) - R(t)| = O\left\{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} + \left[h^2(n) + \left(\frac{\log n}{nh(n)}\right)^{1/2}\right] \log n\right\}\right) = 1.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdushukurov.A.A. Nonparametric estimation of the distribution based on relative risk function.//Commun. Statist. :Th. and Meth. 1998.v.27.N.8.p. 1991-2012.
2. Abdushukurov.A.A. On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples. // Theory Probab. Appl. 1999.v.43.N1.p.3-11.
3.Абдушукуров.А.А. Статистика неполных наблюдений. Ташкент. 2009. Университет. 269 стр
4.Abdushukurov A.A. , Bozorov S.B. , Nurmukhamedova N.S. Noparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative - Risk Function // ISSN 1995-0802, Lobachevskii journal of mathematics, 2021, Vol. 42, No. 2, 257-268. Pleiades Publishing, Ltd., 2021.

HAYOT SUG'URTASIDA TA'RIF STAVKALARINI HISOBLASH USULLARI

Egamova Sh. U.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston,
egamovashohsanam1993@gmail.com;

Hayot sug'urtasining belgilangan muddatgacha yashash turi - sug'urta hodisasi mijozining belgilangan muddatgacha yashashidir, ya'ni jismoniy shaxs belgilangan sug'urta summasiga va belgilangan muddatgacha sug'urtalanadi.

Bu sug'urta turida sug'urta hodisasi ro'y berishi uchun sug'urtaga olingan shaxs ko'rsatilgan muddat oxirigacha yashagan bo'lishi kerak, shunda u shartnomada ko'rsatilgan sug'urta summasini oladi. Agar sug'urtaga olingan shaxs (yoki benifitsar) shartnomada belgilangan davr ichida vafot etsa, u holda summa to'lanmaydi va badal qaytarilmaydi. Shartnoma sharti shunday.

Endi sug'urta shartnomasini tuzish vaqtidagi sug'urta to'lovining hozirgi qiymatini aniqlaymiz. Aytaylik, x yoshdagi, l_x sondagi sug'urtalanuvchilar guruhi sug'urtalovchi bilan n yil muddatga yashash sug'urta shartnomasini tuzdi. Muddat oxirigacha yashab qolgan sug'urtalanuvchilar S miqdordagi sug'urta summasini olsin. Ravshanki, sug'urtalovchi muddat oxirida $x + n$ yoshgacha yashab qolgan l_{x+n} ta sondagi sug'urtalanuvchilarning har biriga S summadan to'lasa, jami $l_{x+n} \cdot S$ miqdorda sug'urta summasini to'laydi. Bu summaning shartnoma tuzish vaqtidagi hozirgi qiymati $v^n \cdot l_{x+n} \cdot S$ ga teng bo'ladi, bu yerda $v = \frac{1}{1+i}$- diskont koeffitsienti, i foiz stavkasi yoki yillik daromad normasi. U holda har bir sug'urtalanuvchiga

$$P = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S = v^n \cdot \ {}_np_x \cdot S$$

(1) miqdordan to'g'ri keladi. Bu har bir sug'urtalanuvchi shartnoma tuzayotgan vaqtda to'lashi kerak bo'lgan sug'urta badalining qiymati bo'ladi. (1) formulaning o'ng tomonidagi miqdor sug'urta summasi S ning aktuar joriy narxi yoki S ning kutilayotgan joriy narxi deyiladi.

Moliyaviy hisoblardan ma'lumki, n yildan keyin olinadigan S summaning joriy (hozirgi) qiymati $v^n \cdot S$ ga teng. Agar mijoz $v^n \cdot S$ mablag'ni bankka 10 foiz daromad bilan n yilga qo'yganida muddat oxirida S qiymatni olgan bo'lar edi. Lekin, (1) formuladan ko'rinib turibdiki, mijoz tomonidan to'lanadigan sug'urta badalining qiymati P joriy qiymat $v^n \cdot S$ dan ${}_n p_x$ marta kam ($0 < {}_n p_x < 1$), ya'ni sug'urta kompaniyasining mijozi S ning joriy qiymati $v^n \cdot S$ dan ${}_n p_x$ marta kam mablag' to'lab, shu S summani muddat oxirida oladi, qachonki u n muddatgacha yashasa. Demak, kam mablag' to'lab o'sha summani olishning riski bor ekan. Agar sug'urta kompaniyasining mijozi n muddat ichida vafot etsa, yashash sug'urtasida badal qaytarilmaydi va bu summa yashab qolgan sug'urtalanuvchilarga taqsimlanadi. Hayot sug'urtasi bo'lmagan riskli sug'urta turlarida barcha shartnomalarda sug'urta zararining qiymati har doim sug'urta summasining qiymatiga teng bo'lsa va sug'urta summasi muddat oxirida to'lansa, agar hayot sug'urtasida diskontlash qo'llanilmasa, u holda ikkala tur sug'urtalarda sug'urta badallari teng bo'lar edi. Demak, bu holda ham hayot sug'urtasining badali diskontlash hisobiga riskli sug'urta badalidan kichik bo'lar ekan.

Misol. 40 yoshli erkak uchun muddati 5 yil, sug'urta summasi 10000 p.b., yillik daromad normasi 10 foiz bo'lganda sug'urta badalining qiymatini toping.

Yechish. Yillik diskont koeffitsienti $v = \frac{1}{1+0,1} = 0,9091$, o'lim jadvalidan

$l_{40} = 83344$, $l_{45} = 77387$ (1) formula bo'yicha hisoblab, sug'urta badalining qiymatini $P = v^n \cdot \frac{l_{45}}{l_{40}} \cdot S = 0,9091^5 \cdot \frac{77387}{83344} \cdot 10000 = 5765$ p.b. ga teng bo'lishini topamiz.

Bir birlik sug'urta summasining ($S = 1$) sug'urta badaliga ta'rif stavkasi yoki ta'rifi deyiladi, ya'ni

$$T = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_n p_x$$

(2) Masalan, misol shartida ta'rif stavkasi ($S = 1$)

$$T = v^n \cdot \frac{l_{45}}{l_{40}} = 0,9091^5 \cdot \frac{77387}{83344} = 0,5765$$

ya'ni 1 p.b. uchun ta'rif miqdori 0,5765 p.b. bo'ladi. Ushbu maqolada, shartnoma shartlariga ko'ra va daromad normasini nazarda tutgan holda belgilangan muddatgacha sof yashash sug'urtasida ta'rif stavkalarini hisoblash usuli o'rganilgan.

ADABIYOTLAR

1. *Кошкин Г.М.* Основы актуарной математики. - Томск: Томск ГУ, 2002 г., 116 стр.

2. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Актуарная математика в задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 г.

3. *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. - Издание 2-е, перераб. и дополнен. - М.: АНКИЛ, 2002 г.

4. *Касимов Ю.Ф.* Введение в актуарную математику (страхование жизни и пенсионных схем). - М.: АНКИЛ, -2001, 176 с..

5. *Кагаловская Э.Т., Попова А.А.* Страхование жизни: тарифы и резервы взносов (финансовые основы страхования жизни) Практическое пособие- М.: АНКИЛ, 2000. 231с.

BANKLARNING FAOLIYAT SAMARADORLIGINI BAHOLASH MODELLARI

Hakimova D.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston,
olimovayasmina@gmail.com

Bank faoliyat samaradorligini baholash hozirda juda muhim ahamiyat kasb etadi. Baholashning turli matematik modellari mavjud. Bulardan biri ko'p oo'zgaruvchili korrelyatsion-regression tahlil овo'tkazib, natijasida ekonometrik model taklif qilishdir. Zamonaviy dunyoda banklar bozor munosabatlari tizimining asosiy bo'g'inidir. Ular vositachilar vazifasini bajaradilar, iqtisodiyotning barcha faol subyektlaridan mablag'larni samarali ravishda jalb qiladilar va taqsimlaydilar. Bank tuzilmalari rolining tobora ortib borishi kredit tashkilotlarining turli statistik ko'rsatkichlarini hisoblash va prognozlashni soddalashtirish doirasida ekonometrik tadqiqotlarni rivojlantirish zarurligi tobora ortib bormoqda. Bank faoliyatining o'ziga xos xususiyati shundaki, kredit va depozit operatsiyalarini muvaffaqiyatli amalga oshirish banklar tomonidan foyda olishiga olib keladi, bu nafaqat kredit tashkilotining o'zi, balki mamlakat iqtisodiyoti rivojlanishining ham ishonchliligi va barqarorligini oshirishga yordam beradi. Ushbu tadqiqotlarning maqsadi bank faoliyati samaradorligini va uni amalda qo'llash imkoniyatlarini aniqlash uchun sifatli ko'p o'zgaruvchili regressiya modelini ishlab chiqish va tahlil qilishdir. Yuqori sifatli matematik, xususan, regressiya modellarini ishlab chiqish bank sektorida kredit berish jarayonining juda muhim qismidir va doimiy takomillashtirishni talab qiladi. Ko'p o'zgaruvchili regressiya modeli bu bir nechta mustaqil o'zgaruvchilarni bitta natija bilan bog'laydigan model. Tadqiqotni o'tkazish uchun bitta davlatni tanlab, uning eng yirik banklarining sof aktivlari qiymati to'g'risidagi ma'lumotlarga asoslangan ekonometrik model tuziladi, bu yerda bog'liq sof foyda bog'liq o'zgaruvchiga aylanadi. Mustaqil o'zgaruvchilar sifatida bankning asosiy ko'rsatkichlari, shu jumladan: jismoniy shaxslarga berilgan kreditlar hajmi, jismoniy shaxslarning depozitlari hajmi va jismoniy shaxslarning muddati o'tgan kreditorlik qarzlari olinadi. Ushbu ko'rsatkichlar bir-biri bilan chambarchas bog'liq, chunki ularning barchasi bank muassasalari samaradorligini baholashga xizmat qialdi, xususan, ular birinchi navbatda bankning sof foyda ko'rsatkichiga ta'sir qiladi. Ushbu ma'lumotlarga asoslanib, ko'p o'zgaruvchili regressiya modeli tuziladi va tahlil qilinadi. Model tanlashda avvalo ularning korrelyatsion matritsasi hisoblanadi va tahlil qilinadi. Bunda korrelyatsiya matritsasi tahli qilinayotgan o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan barcha juftliklari uchun korrelyatsiya koeffitsientining qiymatlarini aks ettiradi. Ko'p o'zgaruvchili regressiya tenglamasi uchun prediktorlar tanlashda quyidagi qoidaga amal qilish muhimdir: o'zgaruvchilar bog'liq o'zgaruvchi bilan kuchli, o'zaro esa past korrelyatsiyalangan bo'lishi kerak. Topilgan korrelyatsiya koeffitsientlari barcha o'zgaruvchilar orasida qanday bog'lanish borligini aniqlash hamda tushuntiruvchi o'zgaruvchilar orasida multikollinearlik muammosi bor yoki yo'qligini aniqlashda xulosa berishga yordam beradi. Multikollinearlik muammosi bo'lsa, regressiya modeliga bog'liqlik parametrlarni baholashning aniqligini pasaytiradi. Bu muammodan qutulishning oson yo'li modeldan o'zaro kuchli korrelyatsiyalangan bir yoki bir nechta prediktor chiqarib tashlanadi. Model tenglamasini tanlashda Minitab programmasidagi "Best supsets"va "Stepwise"funksiyalari yordam beradi hamda topilgan bashorat model tenglamasi uchun tanlanmaning korrelyatsiya koeffitsienti bosh to'plamning korrelyatsiya koeffitsientining noldan ahamiyatli farq qilish haqida xulosa chiqarish uchun gipotezalar qo'yilishi ikki yoqlama (bir yoqlama) tanlanib, "T-sinov"orqali tahlil qilingan ковʼrsatkichlar asosida chiziqli bog'lanish bor yoki yo'qligi aniqlanadi. O'zgaruvchilar uchun

"F-sinov"o'tkazamiz ya'ni tushuntiriluvchi o'zgaruvchini o'zgarishini model uchun tanlangan tushuntiruvchi o'zgaruvchilar o'zgarishi uchun ahamiyatli qismini tushuntirishi mumkinmi yoki yoв'qligini tushuntirib beradi bunda ham gipotezalar qo'yiladi va F-statistika qiymati va F-kritik qiymat solishtirilib gipoteza tanlanadi. Bu tahlillarni тов'la qanoatlantirgan tenglama model tenglamasi sifatida tanlanadi va amaliyotda qo'llaniladi. Bunda ko'p o'zgaruvchili regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Y = \beta_0 + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + ... + \beta_{k-1}\xi_{k-1}$$

Y- bog'liq o'zgaruvchi;
$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{k-1}$-tushuntiruvchi o'zgaruvchilar yoki prediktorlar;
$\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}$- modelning bosh to'plamdagi parametrlari.

Tanlangan model tenglamasining koeffitsient qiymatlariga xulosa beriladi. Koeffitsientlar uchun interval baholar beriladi.Tushuntiriluvchi o'zgaruvchining o'zgarishini tushuntiruvchi o'zgaruvchilarning o'zgarishi bilan necha ulushini tushuntirishini aniqlovchi qiymati ya'ni R^2 (determinatsiya koeffitsienti) hamda model (S) baholashining standart xatoligi qiymati topiladi. Ko'p o'zgaruvchili korrelyatsion-regression tahlil natijalaridan topilgan bashorat modeli uchun umumiy xulosa beriladi ya'ni bu model iqtisodiy tajribada qo'llanilsa yaxshi natija berishi yoki yo'qligi. Umuman olganda, ushbu model amalda bankning sof foydasiga omillarning ta'sirini taxmin qilish va baholash uchun muvaffaqiyatli qo'llanilishi mumkinmi yoki yo'qligini aniqlab beradi. Shu bilan birga, shuni takidlash kerakki, berilgan ma'lumotlar bazasi modelni tahlil qilish uchun yetarli bo'layotgani yoki aksincha qo'shimcha ko'rsatkichlar qo'shilishi kerakligini aniqlab beradi hamda amalga oshirilgan tahlillarni sarhisob qilgan holda, matematik usullar va regressiya modellaridan foydalanish tijorat banklari faoliyati muammolari uchun eng yaxshi yechimlarni topishga imkon beradi. Shunga asoslanib bankning moliyaviy natijalari orqali kelgusidagi istiqbolli rejalar yo'nalishi tanlab olinadi.

Foydalanilgan adabiyot:

1. Оголихина С.Д, Исползование модели множенственной регрессии в определении эффективности банковской деятельности. 2017, N 8, 1-13.

YURAK QON TOMIR TIZIMLARINING FRAKTAL O'LCHOVI

Jabbarov J. S.
Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston.
jamoliddin.jabbarov@mail.ru

Mazkur maqola yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovini aniqlashga bag'ishlangan. Fraktallar telekommunikasyalarda, sanoat ishlab-chiqarishda, kompyuter tizimlarida va fan texnikaning boshqa ko'plab sohalarida qo'llaniladi [1]. Eng qiziqarli sohalaridan biri bu fraktallarning tibbiyotda qo'llanilishidir. Maqolada yurak qon tomir tizimlarining fraktal tuzilishi, fraktal o'lchovi, xususiyatlari, Mandelbrot-Richardson o'lcho-vi yordamida aniqlangan [1-3]. Aksariyat ishlarda fraktal o'lchovni faqat tabiat manzaralari va geometirik shakillarga nisbatdan qo'llagan. Mazkur yurak qon tomir tizimlarining fraktal tuzilishi xususiyatlari matematik formulalar asosida hisoblash uchun maxsus usullar qo'llanilgan, shuningdek, mos sonli ekspriment natijalari jadval ko'rinishda keltirilgan.

Yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovini aniqlash chegarasi 1 dan 2 gacha bo'lgan oralig'da bo'lib, o'lchovning qiymati qanchalik ikkiga yaqin bo'lsa qon tomir tizimlarining joylashuvi murakkab bo'ladi.
Inson organizimining fraktal xususiyatga ega bo'lgan a'zolari barcha nafas olish yo'llari, qon tomir tizimlari, limfa tomirlari, nerv tomirlari, o't yo'llari va asab tizimlari bo'lib [4], ularning fraktal o'lchovlari har-xil matematik usullarda aniqlanadi.

Hozirgi vaqtda dunyo miqyosida inson organizimida fraktal tuzilishga ega bo'lgan organlarning fraktal o'lchovini aniqlash, bu asosida odamlardagi har-xil kasalliklarni oldin-dan bashorat qilish muhim hisoblanadi [5].
Inson yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovini aniqlashda, tomirlarning joylashuvini daraxt navdalariga qiyoslangan holda o'rganildi.

Fraktal o'lchovlarni hisoblashda ko'pincha kublar usuli, qoplamalar usuli, prizma usuli va boshqalar asosida aniqlanadi. Biroq bir xil tasvirlarni turli usullar yordamida fraktal o'lchovini aniqlashda ham, natijalar ko'pincha bir-biridan farq qiladi. Shuning uchun fraktal o'lchovlarni amalda hisoblashda fraktal tuzilishga ega bo'lgan obyektlarning xususi-yatidan kelib chiqib usullar tanlanishi kerak. Buning uchun tekislikni kichik katakchalarga bo'lib [2], ularning kattaligini a bilan belgilanadi va fraktal tasvirlarni nechta katak kesib o'tishi hisoblanadi.

Insonning yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovini ham aniqlash mumkin.

Insonning yurak qon tomir tizimlarining ustidan uch xil o'lchamdagi katakchalar tortilgan. Bundan quyidagilar aniqlandi: a katakcha kattaligi bo'lib, shartli ravishda=48 mm, chizma joylashgan katakchalar soni mos xolda, $N_1 = 6$ ta, $N_2 = 24$ ta, $N_3 = 116$ ta. *-rasmdagi ma'lumotlar asosida odam yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovini quyidagicha aniqlaymiz:

Katakchaning o'lchovi a	9	16	48
Katakchalar soni N	116	24	6
$y = \ln N$	4,7536	3,1780	1,7917
$x = \ln a$	2,1972	2,7726	3,8712

Yuqoridagi keltirilgan ma'lumotlar asosida insonning yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovi katakchalar usuli yordamida hisoblandi ya'ni,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = 1,7021.$$

Biroq, insonning yurak qon tomir tizimlarining fraktal o'lchovining qiymati asl o'lchamga nisbatan ko'p farq qilmaydi [3]. Ya'ni tadqiqotlar natijasi shuni ko'rsatadiki, uning o'zgarish sohasi 0,073 larga teng ekan.

Adabiyotlar

1. Mandelbrot B.B. Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension.- Paris: Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995;

2. Glenny R.W. Emergence of matched airway and vascular trees from fractal rules. J Appl Physiol 110: 1119Ц1129, 2011. First published December 16, 2010; doi:10.1152/japplphysiol. 01293.2010.
3. Barry R. Fractalanalysis of thevasculartree in thehumanretina All rights reserved. First published online as a Review in Advance on April 13, 2004
4. Zainidinov Kh.N., Anarova Sh.A., Zhabbarov Zh.S. Fractal measurement and prospects for its application // Problems of computational and applied mathematics journal. Ц Toshkent. 2021. No. 3 (33), - pp. 105-114
5. Zaynidinov Kh.N., Anarova Sh.A., Jabbarov J.S. Fractal dimension and prospects of its application // Problems of Computational and Applied Mathematics. Toshkent, 2021. є 3(33), - P. 105-114

‘

RIVOJLANAYOTGAN MAMLAKATLARDA TO’G’RIDAN TOG’RI XORIJIY INVESTITSIYALAR HAJMINI STATISTIK TAHLIL ASOSIDA REGRESSION MODELINI TUZISH

Mamadiyev F.R.

Mirzo Ulug’bek nomidagi O’zbekiston Milliy universiteti, Toshkent,Uzbekistan,
faxriddin19951021@gmail.com

To’g’ridan to’g’ri xorijiy investitsiyalar har bir mamalakat iqtisodiyotining rivojlanishi uchun o’ziga xos axamiyatga ega. Ayniqsa, bu rivojlanayotgan mamlakatlar iqtisodiyotida yana o’z aksini topgan. Hozirgi kunda mamlakat iqtisodiyotiga kiritilayotgan To’g’ridan to’g’ri xorijiy investitsiyani umumiy hajmini yanada oshirish maqsadida xorijiy investorlarga yetarlicha qulay investitsion muhit yaratib berishga bo’lgan zaruriyat yanada ortmoqda. Bu esa xorijiy investorlarning investitsiya kirituvchi mamlakatlar iqtisodiy salohiyati va siyosiy barqarorligiga, uni rivojlanish istiqbollariga qiziqishi tufayli ishonchi ortishiga sabab bo’lmoqda. Shuningdek, jahon va mintaqaviy investitsiya bozorlarida raqobat kuchayib borayotganliga mamlakatning iqtisodiy holatidan qat’i nazar, ushbu mamlakat hududida yana ham qulayroq investitsiya muhitini yaratish, investitsion jozibadorlikni oshirishga, ishlab chiqarishlarni modernizatsiya qilish, texnik va tehnalogik bazani yangilashga qaratilgan loyihalarni amalga oshirish uchun xorijiy investitsiyalar jalb etilishini rag’batlantirishga nisbatan alohida urg’u berilmoqda. Ushbu tahlilda 30 ta rivojlanayotgan mamlakatlarga kirib keluvchi To’g’ridan to’g’ri xorijiy investitsiya hajmining unga ta’sir qiluvchi omillar asosida regression modeli tuzilgan. Bu tahlildagi foydalanilgan statistik ma’lumotlar jaxon banki ma’lumotlar bazasining 2010-2020-yillar oralig’idagi ma’lumotlaridan foydalanildi.
https: //data.worldbank.org

Tadqiqod uchun quyidagi statistik ko’rsatgichlar asos qilib olindi: Tushuntiruvchi ko’rsatgich sifatida Y to’g’ridan to’g’ri xorijiy investitsiya (AQSH doll.) hajmi olindi. Mamlakat iqtisodiyotida tashqi investitsiya hajmiga mevosita ta’sir qiluvchi asosiy omillar sifatida quyidagilar o’rganildi:

- X_1 sifatida YaIM o’sish sur’ati olindi. YaIM hajmi ortishi bilan, Investiitsiya kiritilishi ham ortadi (birligi: foiz (%)).
- X_2 sifatida savdo ochiqlik darajasi (eksport va import YaIM ga nisbatan) olindi. Tashqi investitsiya va savdo ochiqlik darajasi ijobiy musbat bog’lanishga ega (birligi foiz: (%)).

• X_3 sifatida yalpi mahalliy jamg'armalar (YaIM ga nisbatan foiz hisobida) olndi. Asosiy kapitalning ko'payishi, moddiy aylanma va mablag'lar zaxiralarining o'zgarishidan, hamda boyliklarni sotib olishga sarflangan harajatlarni o'z ichiga oladi (birlidi: foiz (%)).

• X_4 sifatida yalpi mahalliy jamg'armalar (YaIM ga nisbatan foiz hisobida) olndi. Asosiy kapitalning ko'payishi, moddiy aylanma va mablag'lar zaxiralarining o'zgarishidan, hamda boyliklarni sotib olishga sarflangan harajatlarni o'z ichiga oladi (birlidi: foiz (%)).

• X_5 sifatida inflatsiya darajasi olindi. Inflatsiya narxlarning keskin ravishda ortib borishi natijasida pul bahosining qadrsizlanishi (birligi: foiz %).

• X_6 sifatida ishsizlik darajasi olindi. Bu ish bilan band bo'lmagan ishchi kuchining darajasi (birligi: foiz (%)).

• X_7 sifatida ishchi kuchi olindi. Bu insonning mehnat qilishga qaratilgan jismoniy va aqliy qobilyatidir (birligi: son).

• X_8 sifatida tovar va xizmatlar eksporti mamlakat tashqarisiga chiqarib sotilayotgan Tovar va xizmatlarning YaIM dagi ulushi olindi (birligi: foiz (%)).

• X_9 sifatida oltin - valyuta zaxiralari - mamlakat hukumatlari va markaziy banklari ixtiyorida turuvchi moliyaviy aktivlar olindi (birligi: AQSH doll).

Yuqoridagi statistik ma'lumotlar asosida korrelyatsion va regression tahlil o'tkazilib to'g'ridan to'g'ri tashqi investitsiyalar uchun regression model tuzildi:

$$Y = -9.6 \cdot 10^5 \cdot X_2 + 3.44 \cdot 10^6 \cdot X_4 + 191.1 \cdot X_7 + 0.0615 \cdot X_9$$

Va bu model uchun T test, F test va 95 % li ishonch intervallari qurildi.

ADABIYOTLAR

1. *Sarimsoqova.H.Q.:* "Ekonometriya"fanidan ta'lim ta'lim tehnalogiyasi. T.JIDU-2011.

2. *Paul A. Samuelson and William D. Nordhaus.:* .: Economics. 2004,18th ed., McGraw-Hill, p. 5.

3. *Margaret Lewis,:* Applied Statistics for Economists, 2012, London, p. 368.

GARCH (1,1) JARAYONLARINING KVADRATLARI UCHUN LIMIT DISPERSIYANI BAHOLASH

Sharipov O. Sh.[1], Gaipova Y. A.[2]

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston,

[1] osharipov@yahoo.com,

[2] yulduz.ashirboyevna@gmail.com

GARCH (p,q) jarayoni moliyaviy vaqt qatorlarini modellashtirishda keng qo'llaniladi. GARCH(p,q) jarayonlari xossalari xususan, [1]-[3] maqolalarda tadqiq qilingan.

Quyidagi

$$X_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

ko'rinishdagi $X_t, t \in Z$ ketma-ketlik GARCH(1,1) jarayoni deb ataladi. Bu yerda $\omega, \alpha_1, \beta_1$ manfiy bo'lmagan sonlar, $Z_t, t \in Z$ matematik kutilmasi 0 ga dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma ketligi va barcha Z_t, $k \leq t$ da σ_k dan bog'liqsiz.

Ma'lum bir shartlarda GARCH(1,1) jarayonlar uchun markaziy limit teorema, ya'ni quyidagi sust yaqinlashish o'rinli

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - EX_i^2) \Rightarrow N(0,\epsilon^2)$$

bu yerda $N(0,\epsilon^2)$ - $(0,\epsilon^2)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor va

$$\epsilon^2 = E(X_1^2 - EX_1^2)^2 + 2\sum_{i=2}^{\infty} E(X_1^2 - EX_1^2)(X_i^2 - EX_i^2).$$

Amalda ϵ^2 noma'lum bo'ladi va uni statistik baholash muhim. Biz ϵ^2 ni [4] va [5] dagi baholar yordamida baholadik. Ma'ruzada shu baholar yordamida olingan natijalar keltiriladi va solishtiriladi.

ADABIYOTLAR

1. *M.Borkoves.:* Extremal behavior of the autoregressive process with ARCH(1) errors, Stochastic Processes and their Applications 85 (2000), 189–207.
2. *T.Bollerslev.:* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, J.Econometrics 31 (1986), 307–327.
3. *O.Lee and J.Kim,:* Strict stationarity and functional central limit theorem for ARCH/GARCH model, Bull. Kor Math. Soc. 38 (2001), no.3 495–594.
4. *O.Sh. Sharipov, M. Wendler.:* Bootstrap for the sample mean and for U-statistics of mixing and near-epoch dependent processes, Journal of Nonparametric Statistics, 24:2 (2012), 317–342.
5. *H.Dehling, R.Fried, O.Sh.Sharipov, D.Vogel, M.Wornowizki:* Estimation of the variance of partial sums of dependent processes. Statistics and Probability Letters, 83, (2013), 141–147.

SPACING-STATISTIKALAR GINI INDEKSIGA NORMAL TAQSIMOT ORQALI APPROKSIMATSIYA HAQIDA

Zokirjonov M.O.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston, zokirjonovmuhammadsidiq@gmail.com

Haqiqiy o'qda aniqlangan absolut uzliksiz taqsimotdan hosil etilgan tasodifiy tanlanma $X_1, ..., X_{n-1}$ berilgan bo'lsin. Statistika fanining muhim

masalalaridan biri ushbu tanlanma berilgan taqsimotdan kelib chiqganligi haqidag tahminni, ya'ni asosiy tahmin H_0 ni alternativ tahmin H_a ga

$$H_0 : F(x) = F_0(x); \qquad H_a : F(x) \neq F_0(x) \tag{6}$$

nisbatan tekshirish alomatini tuzishdan iboratdir, bu yerda F_0 to'la-to'kis berilgan taqsimot funksiya. Bunday alomat muvofiqlik alomati deb ataladi. Adabiyotlarda muvofiqlik alomat tuzishga turlicha yondoshishlar ko'rilgan bo'lib, ulardan biri quyida ta'riflangan spacinglarga (o'qilishi: speysinglar) orqali berilgan statistikalarga tayangan alomatlardir. Avvalam bor shuni aytib o'tamizki umumiyatga ziyon keltirmagan holda "ehtimollik integral o'zgartirma" $U =$

$F_0(X)$ orqali yuqoridagi (1) masalada H_0 tahmini [0,1] oraliqda tekis taqsimot deb qarashga keltirish mumkin. Ya'ni (1) masala o'zgartirilgan tanlanma $U_i = F_0(X), i = 1, ..., n-1$ asosida

$$H_0 : F(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad \text{ni} \quad H_a : F(x) \ne x, \quad 0 \le x \le 1$$

nisbatan tekshirish masalasiga keltiriladi. Bundan buyon ushbu o'zgartirma bajarilgan deb qaraymiz. $0 = U_{0,n} \le U_{1,n} \le ... \le U_{n-1,n} \le U_{n,n} = 1$ tanlanmaga mos variasion qator bo'lsin. Quyida berilgan ayirmalarga spacinglar deyiladi:

$$D_i = U_{i,n} - U_{i-1,n}, \quad i = 1, ..., n$$

Spacinglarga asoslangan muvofiqlik alomatlarga etibor ayniqsa Greenwoodning [1] maqolasidan keyin mutaxassislarning e'tiborini tortdi. Ushbu maqolada, keyinchali Greenwood statistkasi deb atalmish $G_n^2 = D_1^2 + ... + D_n^2$ statistikaga asoslangan alomatni biror hodisalar, masalan biror kasallikning tarqalishi kabi hodisalar, tasodifiy ravishda ro'y berishi tahminini tekshirish masalasiga qo'llagan. Keyinchalik yuqorida kiritilgan spacinglarning umumlashtirmalari bo'lmish yuqori tartibli (indekslar farqi birdan katta bo'lgan variasion qator hadlarining ayirmasi) spacinglarga asoslangan turli alomat-statistikalari bir necha mualliflar orqali kiritilgan va ularning xossalari o'rganilgan. Bunday statistikalar nafaqat statistik tahminlarni tekshirish alomatlarida, balki noma'lum parametrlarga baholar tuzish masalalarida ham qo'llanilgan. Batafsil ma'lumotlar uchun [2]-[5] maqolalarga va ularda keltirilgan adabiyotlarga murojat qilinshni maslaxat beramiz.

$\{D_i, \quad i = 1, ..., n\}$ spacinglarning, asosiy tahmin H_0 o'rinli bo'lganda, matematik kutimalari n^{-1} bo'ladi, shu bilan birga ularning o'rta arifmetik qiymati ham n^{-1} ga teng, chunki bu spacinglar yig'indisi 1 ga tengdir. Demak, tekis taqsimotlilik alomatlarni $\{D_i, \quad i = 1, ..., n\}$ spacinglarning o'z o'rta qiymati n^{-1} dan qanchalik farqlanishini belgilovchi o'lchov kabi statistikalar, (ya'ni spacinglarni o'rta qiymat atrofida tarqoqlik o'lchovi), orqali tuzish mantiqan asoslidir. Masalan, quyidagi satatistika mos ravishda Greenwood va Rao statistikalaridir

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} (D_i - n^{-1})^2 \quad va \quad R_n = \sum_{i=1}^{n} |D_i - n^{-1}|.$$

Bu statistikalar va mos alomatlar adabiyotlarda mukammal o'rganilgan. Shu bilan birga yuqorida aytib o'tilgan tarqoqlik o'lchovi sifatida kuzatilgan spacinglarning Ginining indeksi deb ataladigan statistikaga kam e'tibor berilgan. $\{D_i, \quad i = 1, ..., n\}$ spacinglarning Gini indeksi quyidagicha beriladi:

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |D_i - D_j|$$

Spacinglar Gini indeksining (Gini index) xossalari, xususan ba'zi hollarda uning Greenwood va Rao statiskalaridan ustunligi, yaqinda Jammalamadaka va Goria (2004) ochiqlangan. Shu yo'sinda ushbu maqolada $G_n \simeq N(n, n/3)$ natija qayd etilgan, bu erda $N(n, n/3)$ parametrlari n va $n/3$ bo'lgan normal tasodifiy miqdor, $\simeq$ esa $n \longrightarrow \infty$ bo'lganda asimptotik tenglikni belgisi. Quyidagi teorema Jammalamadaka va Gorialarning natijasini aniqlashtiradi.
Teorema. Agar (2) tahmin o'rinli bo'lsa, u holda

$$\left| P\left\{ \frac{G_n - n}{\sqrt{n/3}} < x \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \right| \le c_0 \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

bu yerda $0.4097 \le c_0 < 0.4748$, Berry-Esseenning klassik tengsizligidagi son [6].

Adabiyotlar

1. Greenwood M., (1946). The statistical study of infectious diseases. J.R. Statist. Soc., Ser A 109, 85-110.
2. Payk R. (1965) Spacings (with discussions). J.R. Statist. Soc.,7, 395-449.
3. Jammalamadaka S.R. and Goria M.N. (2004). A test of gooness of fit based on Gini's index of spacings. Statist. Probabl. Letters., 68,177-187.
4. Mirakhmedov S.M. (2010). On Greenwood goodness of fit test. J. Statist. Planning Inference. 140, 3017-3025.
5. Ekstrom M., Mirakhmedov S.M. and Jammalamadaka S.R. (2020). A class of asymptotically efficient estimators based on sample spacings. TEST. 29, 617Ц636 (2020).
6. Shevtsova I.(2011) On the absolute constants in the BerryЦEsseen type inequalities for identically distributed summands. Ч arXiv:1111.6554v1 [math.PR].

$M|G|1|N$ XIZMAT KO'RSATISH SISTEMASI STATSIONAR NAVBAT UZUNLIGI TAQSIMOTI UCHUN AYRIM MUNOSABATLAR HAQIDA

Qurbonov H.[1], Axmatova Sh. [2]

[1,2] Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston

[1] *Qurbonovh1950@gmail.com*, [2] *shakhnoza_ a1@mail.ru*

Bitta xizmat ko'rsatish qurilmasidan iborat bo'lgan sistemaga λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo'lsin. Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatilsin va xizmat ko'rsatish vaqt uzunliklari bog'liq bo'lmagan hamda bir xil $B(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etsin. Shuningdek, kutish joylari soni $N(N \geq 1)$ bilan chegaralangan, ya'ni sistemada bir paytda ko'pi bilan (qurilmadagi talab bilan birga) $N+1$ ta talab bo'lishi mumkin deb faraz qilamiz. Qaralayotgan sistema, odatda, $M|G|1|N$ deb belgilanadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

ξ_N- sistemaning statsionar navbat uzunligi, ya'ni ixtiyoriy momentda sistemada mavjud bo'lgan talablar soni;

$$P_N(k) = P(\xi_N = k),\ k = \overline{(0, N+1)}$$

ς_N- sistemaning bandlik davri;

η_k- bandlik davrining sistemada k ta talab bo'lgan qismi;

$\chi-$ sistemaning bandlik davridan keyingi bo'sh holatda bo'lish davri.

Ma'lumki, $\varsigma_N = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{N+1}$.

Qaralayotgan sistemaning statsionar navbat uzunligi taqsimoti [1] ishda, $B(x) = 1 - e^{-\mu x}, x > 0$, bo'lgan holda esa [2] ishda o'rganilgan. Qaralayotgan ishda $P_N(k)$ ehtimolliklar va χ, ς_N, η_k tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymatlari o'rtasidagi ayrim munosabatlar keltirib chiqariladi.

Faraz qilaylik,

$$\mu^{-1} = \int_0^\infty x dB(x) < \infty$$

bo'lsin.

Teorema 1. *Quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$P_N(0) = \frac{M\chi}{M(\varsigma_N + \chi)},$$

$$P_N(k) = \frac{M\eta_k}{M(\varsigma_N + \chi)}, \ \ k = \overline{1, N+1}.$$

Teorema 2. *Quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$M\eta_k = \frac{\mu}{\lambda}(M\varsigma_k - M\varsigma_{k-1}), \ k = \overline{1, N},$$

$$M\eta_k = \frac{1}{\lambda} + (1 - \frac{\mu}{\lambda})M\varsigma_N,$$

bu yerda $\varsigma_N - M|G|1|K \quad k = 0, 1, 2,$ sistemaning bandlik davri.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Висков О.В. Исмаилов А.И. Система массового обслуживания с органиченной очередью. Исс. по мат.стат. и слежные вопросы, науч. тр. ТашГУ, вып. 402, 1972.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания,м., 1984.

ОЦЕНИВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ВЫБОРКАМ

Захидов Д.Г.

Андижанский институт сельского хозяйства и агротехнологии,Андижан, Узбекистан,

Пусть требуется построить доверительный интервал интегрального функционала

$$\theta = \theta\left(F\right) = \int \mathcal{Y}\left(t\right) dF\left(t\right) = E\mathcal{Y}(X),$$

где $\mathcal{Y}$- некоторая измеримая функция, F- функция распределения (ф.р.) случайной величины (с.в.) X : $F\left(t\right) = P(X \leq t)$. Предполагается, что с.в. X цензурируется с.в. Y с ф.р $G\left(t\right) = P\left(Y \leq t\right)$, где X и Y независимы. В результате статистического эксперимента наблюдается случайно – цензурированная справа выборка $S^{(n)} = \left\{\left(Z_i, \ \delta_i\right), \ 1 \leq i \leq n\right\}$, где $Z_i = min\left(X_i, Y_i\right)$ и $\delta_i = I\left(X_i \leq Y_i\right)$ – индикатор, где $\left(X_i, Y_i\right)$ – независимые реализации пары (X, Y). Нетрудно видеть, что Z_i имеют общую ф.р $H\left(t\right) = 1 - \left(1 - F\left(t\right)\right)\left(1 - G\left(t\right)\right)$. В качестве оценки для ф.р F используем следующую степенную оценку $F_n\left(t\right) = 1 - \left(1 - H_n\left(t\right)\right)^{R_n(t)}$ автора [1], где $H_n\left(t\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(Z_i \leq t\right)$ эмпирическая оценка для $H\left(t\right)$ и

$$R_n\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i I\left(Z_i \leq t\right)\left[1 - H_n\left(Z_i\right) + \frac{1}{n}\right]^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} I\left(Z_i \leq t\right)\left[1 - H_n\left(Z_i\right) + \frac{1}{n}\right]^{-1}\right\}^{-1}$$

– статистика отнощения интенсивностей. Оценка $F_n\left(t\right)$ обладает многими оптимальными свойствами на интервала $(-\infty, T)$, где $T < T_H = inf\left\{t : H\left(t\right) = 1\right\}$. Поэтому вместо θ рассмотрим усеченный функционал $\theta_T\left(F\right) = \mathrm{E}\left[\mathcal{Y}\left(X\right) I\left(X \leq T\right)\right]$ и его оценку

$$\theta_T\left(F_n\right) = \int \mathcal{Y}\left(t\right) I\left(t \leq T\right) dF_n\left(t\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k + O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

где $V_k = U_k\left(F, G\right)$- независимые и одинаково распределенные с.в. с $\mathrm{E}U_k = \theta_T\left(F\right)$.

Пусть $\mathcal{Y}^{*}(x)=\mathcal{Y}(x)\,I\,(x\leq T)$, $V_k=\mathcal{Y}^{*}(Z_k)\triangle F_n(Z_k)$, $\triangle F_n(Z_k)=F_n(Z_k)-F_n(Z_k-0)$ и $\hat{R}_n(\theta_T)=\prod_{k=1}^{n}np_k$ – соответствующая эмпирическое отношение правдоподобия (ЭОП) с ограничениями

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=1$$

и

$$n\sum_{k=1}^{n}p_k\,(V_k-\theta_T)=0$$

и лагранжианом

$$\Lambda_n(p,\gamma,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}log\,(np_k)-n\gamma\sum_{k=1}^{n}p_k\,(V_k-\theta_T)+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}p_k-1\right).$$

Тогда разрешив соотвстетвующее уравнение находим

$$P_{k_n}=[n\,(1+\lambda_n\,(V_k-\theta_T))]^{-1},k=1,\ldots,n,$$

где λ_n удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{V_k-\theta_T}{1+\lambda\,(V_k-\theta_T)}=0.$$

Пусть

$$\sigma_v^2(F)=\lim_{n\to\infty}D_F(n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}V_k)<\infty. \tag{1}$$

Определим статистику

$$\Psi_n(\theta)=-2log\hat{R}_n(\theta_T)=2\sum_{k=1}^{n}log\,(1+\theta\,(V_k-\theta_T)).$$

Теорема. При справедливости условия (1) и $n\to\infty$

$$\frac{D_FV_1}{\sigma_v^2(F)}\cdot\Psi_n(\theta)\Longrightarrow\chi_1^2,$$

где $\Longrightarrow$ означает сходимость по распределению, χ_1^2- с.в имеющая хи – квадрат распределение с степенью свободы $\alpha=1$.

Доказанный результат можно использовать для построения асимптотического доверительного интервала для функционала $\theta_T(F)$.

Литература

1. Abdushukurov A.A. Commun. Statist. : Theory and Methods. 1998. v.27. N.8. p.1991-2012.

2. Абдушукуров А.А., Захидов Д.Г. Научный вестник Нам ГУ. 2020. N12.c. 30-36.

3. Zakhidov D.G., Iskandarov D.Kh. Empirical likelihood confidence intervals for censored integrals.// Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science. CDAM-2019. Belorussia. Minsk.2019.p.335-336.

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССЕ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА

Кудратов Х. Э.[1]**, Хусанбаев Я. М.**[2]

[1]Национальный Университет Узбекистана, Ташкент,Узбекистан,
qudratovh_83@mail.ru;

[2]Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент,Узбекистан,
yakubjank@mail.ru

Пусть $\{\xi_{k,i}, k, i \geq 1\}$-совокупность независимых, одинаково распределенных и принимающих неотрицательные целые значение случайных величин. Пусть $Z_k, k \geq 0$ ветвящиеся процесс Гальтона-Ватсона, определенный следующими рекуррентными соотношениями:

$$Z_0 = 1 \ , \ \ Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,j} \ , \ \ n \in N$$

Введем следующие обозначения.

$$f(s) := Es^{\xi_{1,1}} \ \ , \quad A = f'(1) \ , \ \ B = f''(1) \ , \ \ C = f'''(1),$$

$$F_n(s) := Es^{Z_n} \ \ , \ \ 0 \leq s \leq 1, S_n(x) = P\left(\frac{2Z_n}{Bn} < x \,|Z_n > 0\right) \quad , \quad S(x) = 1 - e^{-x} \ , \ \ x > 0$$

Известно [1], что

$$F_n(s) = f_n(s) \ , \ \ n \in N$$

где $f_n(s)-$ $n-$ кратная итерация функции $f(s)$: $f_0(s) = s, \ f_1(s) = f(s)$,

$$f_{k+1}(s) = f(f_k(s)), \ k \in N.$$

В 1947 году А.М. Яглом [2] при условии $F'''(1-) < \infty$, изучая условное распределение случайной величины Z_n при условии $Z_n > 0$, получил следующий резултат: для любого $x \geq 0$

$$(A): \ \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

В дальнейшем Kesten, Ney, Spitzer [3] доказали, что этот результат справедлив при $F''(1-) < \infty$. Для ветвящихся процессов с непрерывным временем аналог теоремы Яглома установлен Золотаревым [4].
Возникает естественный вопрос: какова скорость сходимости в предельной теореме (A)? Скорость сходимость в теореме Яглома (A) исследована в работе Нагаева и Мухамедханова [5] при условии $F'''(1-) < \infty$ получен следующий результат:

$$S_n(x) - S(x) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$$

Однако этот теоретический результат имеет определенную неудобность при решении прикладных задач.

Целью данной работы является получение оценки в (A) в случае когда величина $\xi_{1,1}$ имеет геометрическое распределение.
Теорема. *Предположим, что*

$$P(\xi_{1,1} = 0) = p \ , \ \ p_k = P(\xi_{1,1} = k) = (1-p)^2 p^{k-1} \ , \quad k = 1, 2, ...$$

где $p \in (0,1)$ фиксированное число. Тогда для любого $n \in N$ имеет место следующее неравенство

$$\sup_x |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{4(1-p)}{\pi p}\frac{\ln n}{n} + \frac{2(1-p)}{\pi p}\left(27\frac{1}{3} + \ln\frac{4\sqrt{2}p^2}{3(1-p)^2}\right)\frac{1}{n} + \frac{16(1-p)^4}{3\pi p^4 n^4}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris T. Теория ветвящихся случайных процессов. Москва, Наука, 1966.
2. Яглом А.М. Некоторие предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. *ДАН СССР*, 56(8), 1947, ст. 795-798.
3. Kesten H., Ney P., Spitzer F. The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya*, 11(4), 1966, pp. 579-611.
4. Золотарев В.М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов. *Теория вероятностей и ее применения*, 11(4), 1966, ст. 256-266.
5. Нагаев С.В. Мухамедханова Р. Некоторие предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов. *Пред. теор. и стат. выводы, Фан*, 1966, ст. 90-112.
6. Ширяев А.Н. Вероятность-I. Москва, МЦНМО, 2004.

О вещественных корнях уравнения $v = b(\lambda - \lambda v)$ и средном значении периода занятости системы с ограниченной очередью

Х.Курбанов[1], У.Базарова[2]

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
ogiloy.bozorova@mail.ru2

Рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим устройством и со следующими данными: входящий поток пуассоновский с параметром λ ; длительности времен обслуживания независимые, одинаково распределенные случайные влечины с функцией распределения $B(x)[B(+0) = 0]$ и со средним значением μ^{-1}; количество мест для ожидающих ограничено числом $k(k \geq 1)$. Описанную систему обозначим символом M|G|1|k.

Пусть ζ_k период занятости и $\rho = \lambda\mu^{-1}$ загрузка рассматриваемой системы. Положим

$$b(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$$

В теории массового обслуживания изучение характеристик систем часто связано с исследованиием вещественных корней функционального уравнения $v = b(\lambda - \lambda v)$, где v комплексная переменная.

Известно, что это уравнение при $\rho > 1$ в круге $|v| \leq 1$ имеет два вещественных корней: $v_1 = 1$ и $v_2 = r$ ([1],стр.62).

В данной работе рассматривается вопрос о существовании вещественных корней уравнения при любом фиксированном ρ и исследуется пределное поведение корня, отчисного от единицы, при $\rho \longrightarrow 1$. Также, изучаются асимптотические соотношения, связанные со средним значением случайной величины ζ_k.

Theorem 1. Уравнение $v = b(\lambda - \lambda v)$ в области определения имеет два вещественных корней:$v_1 = 1$ и $v_2 = r$, такой что

$$r < 1\rho > 1;$$

$$r > 1\rho < 1;$$

$$r = 1\rho = 1;$$

Theorem 2.. Если

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty,$$

то при $\rho \longrightarrow 1$ справедливо соотношение

$$r = 1 + \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2\sigma^2} + 0(1-\rho).$$

Теорема 3.Справедливы следующие соотношения

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}(r^k M\zeta_N - M\zeta_{N-k}) = \frac{1-r^k}{\mu(\rho-1)},$$

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} r^N(M\zeta_N - M\zeta_{N-k}) = \frac{r^k - 1}{\mu[b'_v(\lambda-\lambda v)|_{v=r} - 1]},$$

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{M\zeta_{N-k}}{M\zeta_N} = \begin{cases} r^k, \rho \geq 1, \\ \\ 1, x > 0, \rho < 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Г.Б. Стохастические системое обслуживания. М.,1966, 62-66.

2. Сирожиддинов С.Х., Азларов Т.А. Предельные теорема для некоторых характеристик системы M|G|1|N. Узб.АН УзССр,серия физ.мат.наук є6, 1972, 76-82.

3. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper. Res., 1971, 219-223.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АССОЦИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ c_0

Лазарева В. А.

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент,Узбекистан,
1748mailbox@mail.ru

Предел ьные теоремы для отрицательно ассоцированных случайных величин исследованы многими авторами(см. например [1])
Пусть $X(i,j), (i,j) \in Z^2$ случайное поле со значениями в пространстве c_0 (пространство сходящихся к нулю последовательностей). Разложим случайное поле по стандартному базису $X(i,j) = \sum_{i=1}^\infty X^k(i,j)e_k$, где $e_k = (0,\dots,1,0,\dots)$у которой все компоненты нули, за исключением i-той, которая равна единице.
Семейство случайных величин $X(i,j), (i,j) \in I$ со значениями в c_0 будем называть ассоцированным, если для каждого конечного подсемейства $X(i_1,j_1),\dots,X(i_m,j_m)$ и для каждой пары покоординатно неубывающих функций $f_i : R^{km} \to R, i = 1,2$для любого k=1, 2, Ж выполнено следующее условие:

$$cov(f_1(X_1^{(1)},\ldots,X_m^{(k)}),(f_2(X_1^{(1)},\ldots,X_m^{(k)})$$

Для $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in Z^2$ пишем $x\leq y$, если это неравенство выполняется покоординатно. Определим $|x-y|=sup\{|x_i-y_i|:i=1,2\}$ и обозначим $\mathbf{1}=(1,1)$
Для $n=(n_1,n_2)\in Z^2)$ мы обозначим через $\Lambda(n)$ прямоугольник
$\Lambda(n)=\{x\in Z^2,\mathbf{1}\leq x\leq n\}$ и $\|n\|=n_1n_2$
Частичную сумму обозначим следующим образом $S_N=\sum_{(i,j)\in\Lambda(k(N))}X(i,j)$
Введчм обозначение $t_{ij}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\Lambda(k(N))}}ES_N^{(i)}ES_N^{(j)}$ при $i,j=1,2,$
Теорема. Пусть $X(i,j),(i,j)\in Z^2$ случайное поле со значениями в c_0.
Пусть $\{k(N):N=1,2,\}$ последовательность в Z^2 такая, что $k_i(N)\to\infty$ при $n\to\infty$ Предположим, что для каждого N, $\{X_n(N):n\in\Lambda(k(N))\}$ семейство ассоцированых случайных величин и выполнены следующие условия:
(i) существуют конечные константы $c_i>0$ i=1,2 , такие, что $DX^{(k)}(i,j)\geq c_1$ и $E|X^{(k)}(i,j)|^3\leq c_2$ для всех $(i,j)\in Z^2$ $k=1,2,$
(ii) дана функция $u:\{0,1,2,...\}\to R$ такая, что $u(r)\to 0$ при $r\to\infty$ и для $k=1,2,$ $\sum_{v:|n-v|\geq r}cov(X^{(k)}(v),X^{(k)}(n))\leq u(r)$ для всех $n\in Z^2$ и $r\geq 0$
(iii) $\sum_{t=1}^{\infty}t_{ii}<\infty$, $t_{ii}>0$ $EX(i,j)=0$,$(i,j)\in Z^2$
Тогда при $\|N\|\to\infty$ имеет место следующая слабая сходимость

$$\frac{S_N}{\sqrt{\Lambda(k(N))}}\Rightarrow N(0,T)$$

где N(0,T) гауссовская случайная величина со значениями в c_0, с нулевым средним и ковариационной матрицей $T=(t_{ij})$
Приведенная теорема обобщает результат из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1.P. E. Oliveira Asymptotics for Associated Random Variablesњ, Springer-Verlag Berlin Heideiberg, 2012
2. J. T. Cox and G. Grimmet, Central limit theorems for associated random variables and percolation model, Ann. Probab., 12 (1984), 514-528.

О ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЯХ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В S^2

Мамуров Б.Ж.

Бухарский государственный университет, Бухара,Узбекистан,
bmamurov.51@mail.ru

Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений (см. например,[2],[3]). Мы будем придерживатся определения и обозначения работы [3]. В работе [1] на двумерном симплексе S^2 изучен квадратичные стохастический оператор:

$$V_0:S^2\to S^2, V_0(x_1,x_2,x_3)=(x_1^1,\overset{1}{x_2},x_3^1)$$

и

$$x_1^1=x_1^2+2x_1x_2;\;\; x_2^1=x_2^2+2x_1x_2;\;\; x_3^1=x_3^2+2x_1x_3$$

Доказано, что оператор V_0 имеет четыре неподвижные точки $M_1(1,0,0); M_2(0,1,0); M_3(0,0,1); C(1/3,1/3,1/3)$. Отметим, что в работе [4] автором на двумерном симплексе изучен квадратичные стохастический оператор V_1:

$$x_1^1 = 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_1x_2$$
$$x_2^1 = 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$x_3^1 = 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_1x_3.$$

и доказано,что оператор V_1 имеет единственную неподвижную точку $C(1/3,1/3,1/3)$ и регулярен. В данной работе мы рассмотрим выпуклые комбинации операторов V_0 и V_1

$$V_\lambda : S^2 \to S^2;$$
$$V_\lambda = (1-\lambda)V_0 + \lambda V_1, (0 \le \lambda \le 1).$$

В координатной записи оператор V_λ имеет вид:

$$x_1^1 = (1-2\lambda/3)x_1^2 + \lambda/3x_2^2 + \lambda/3x_3^2 + 2x_1x_2$$
$$x_2^1 = \lambda/3x_1^2 + (1-2\lambda/3)x_2^2 + \lambda/3x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$x_3^1 = \lambda/3x_1^2 + \lambda/3x_2^2 + (1-2\lambda/3)/3x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Очевидно,оператор V_λ - также квадратичный стохастический оператор.
Доказано, что оператор V_λ имеет единственную неподвижную точку $C(1/3,1/3,1/3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валландер С.С. О предельном поведении последовательности итераций неeоторыхквадратичныхпреобразований. Докл.АН СССР,202:3 (1972),515-517.
2.Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике, Наукова думка, Киев, 1983.
3.Жамилов У.У, Розиков У.А. О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе . Матем. сб., 200:9 (2009), 81-94.
4.Мамуров Б.Ж.,Шарипова М.Ш. Об одном квадрвтичном стохастическом операторе в S^2. Тезис дакладов респ.науч.конфер."Сармысаковские чтения. Т.2021.стр.100-101.

МАРКОВСКИЕ Q-ПРОЦЕССЫ

Назаров З. А.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
zuhrov13@gmail.com

Пусть величина $Z(t),\ t \ge 0$, представляет численность популяции в момент t в однородном марковском ветвящемся процессе (МВП) с непрерывным временем и переходными вероятностями

$$P_{ij}(t) := \mathsf{P}\left\{Z(t+\tau) = j \,|Z(\tau) = i\right\}, \quad \tau \ge 0,$$

$i, j \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Эти вероятности равны i-кратной свертке распределения $P_{1j}(t)$, т.е.

$$P_{ij}(t) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_i=j} P_{1j_1}(t) \cdot P_{1j_2}(t) \cdot \ \ldots \ \cdot P_{1j_i}(t).$$

Вероятности $P_{1j}(t)$, в свою очередь, определяются с помощью локальных плотностей $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}_0\}$ соотношением

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

где δ_{1j} – знак Кронекера, плотности вероятностей перехода $a_j \geq 0$ для $j \in \mathbb{N}_0 \backslash \{1\}$ и $0 < a_0 < -a_1$, причем $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j = 0$; см. [3, с. 11–12, 26].

В работе [5] исследованы некоторые асимптотические свойства так называемого Марковского Q-процесса (МQП) $\{W(t),\ \ t \geq 0\}$, определенный как "долгоживущий" МВП, переходные вероятности которого

$$Q_{ij}(t) := \mathsf{P}\left\{W(t+\tau) = j \mid W(\tau) = i\right\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^t} P_{ij}(t).$$

В равенстве (2) $\beta := \exp\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} ja_jq^{j-1}\right\}$, а число $q-$ вероятность вырождения МВП. С помощью (1) и (2) вероятности $Q_{1j}(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$, могут быть представлены в виде

$$Q_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + p_j\varepsilon + o(\varepsilon),$$

с плотностями вероятностей перехода

$$p_0 = 0, \quad p_1 = a_1 - \ln\beta < 0, \quad p_j = jq^{j-1}a_j \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Следовательно, производящая функция (ПФ)

$$g(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} p_jx^j = x\left[f'(qx) - f'(q)\right]$$

полностью определяет МQП, здесь $f(x)$ есть инфинитезимальная ПФ, порождающая МВП $Z(t)$, то есть $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_jx^j$. В этом обозначении $\beta := \exp\left\{f'(q)\right\}$ и $f(q) = 0$; см. [5].

Введем теперь в рассмотрение ПФ распределения состояний

$$G_i(t;x) := \mathsf{E}_i x^{W(t)} = \mathsf{E}\left[x^{W(t)}\middle|\, W(0) = i\right] = \sum_{j\in\mathbb{N}} Q_{ij}(t)x^j.$$

Как было доказано в [Имомов],

$$G_i(t;x) = x\left[\frac{\Phi(t;qx)}{q}\right]^{i-1} \exp\left\{\int_0^t b\left(\frac{\Phi(\tau;qx)}{q}\right)d\tau\right\},$$

где $\Phi(t;x) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} P_{1j}(t)x^j$ и

$$b(x) = \frac{g(x)}{x} = f'(qx) - f'(q).$$

Путем дифференцирования в точке $x = 1$ из (3) получаем где $\mathsf{D}_iW(t) = \mathsf{D}\left[W(t) \,|\, W(0) = i\right]$ и $\gamma = b/|\ln\beta|$.

Нам позволит написать уравнение

$$W(t+1) = [W(t) - 1]\cdot\beta + W(1) + \varepsilon(t),$$

с погрешностью $\varepsilon(t)$, имеющей нулевое среднее: $\mathsf{E}\varepsilon(t) = 0$. Учитывая это уравнение, предлагаем следующую оценку для β, при известном $\mathsf{E}_1 W(1)$:

$$\widehat{\beta}(t) = \frac{W(t+1) - \mathsf{E}_1 W(1)}{W(t) - 1}, \qquad t > 1.$$

Оценка $\widehat{\beta}(t)$ является несмещенной для параметра β. Действительно, согласно формуле полной вероятности и однородности MQП, с учетом (4) $\mathsf{E}\widehat{\beta}(t) = \beta$.

Следующие теоремы характеризуют дальнейшие свойства оценки $\widehat{\beta}(t)$.

Теорема 1. *Пусть $b < \infty$. Если $\beta = 1$, то*

$$\frac{t}{2} \cdot \mathsf{D}\widehat{\beta}(t) = 1 + O\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right), \quad t \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $b < \infty$. Если $\beta < 1$, то*

$$\mathsf{D}\widehat{\beta}(t) = O(1), \quad t \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $b < \infty$ и $\beta = 1$. Тогда*

$$P\{(\widehat{\beta}(t) - 1)t < x\} \to L(x), \quad t \to \infty,$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} dL(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x + 2i\theta/x} dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалбаев И.С. Мухитдинов А.А. Статистические задачи многотипных ветвящихся процессов. – Ташкент: Фан, 1990.
2. Нагаев А.В. Об оценке среднего числа непосредственных потомков частицы в ветвящемся случайном процессе. Теория вероятностей и ее примен. 1967. Т. 67. Вып. 2 С. 363–369.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. 436 с.
4. Imomov A.A. A differential analogue of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. Ukrainian Mathematical Journal, 2005. V. 57. №. 2. P.307–315.
5. Imomov A.A. On Markov continuous time analogue of Q-processes. Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2012. V. 84. P. 57-64.

ПОЛУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Сайфуллоева Г.С.

Навоийский государственный педагогический институт, Навои,Узбекистан., sayfullayevagulnoz@gmail.com;

Рассмотрим полупараметрическую статистическую модель случайного цензурирования с двух сторон, в которой наблюдается выборка

$$S^{(n)} = \{(Z_i, \Delta_i), i = \overline{1, n}\},$$

где $Z_i = \max\{L_i, \min\{X_i, Y_i\}\}$, $\Delta_i = (\delta_i^{(0)},\ \delta_i^{(1)},\ \delta_i^{(2)})$, $\delta_i^{(0)} = I(\min(X_i, Y_i) < L_i)$, $\delta_i^{(1)} = I(L_i \le X_i < Y_i)$, $\delta_i^{(2)} = I(L_i \le Y_i < X_i)$ и $I(A)$- индикатор события A. Здесь $\{(X_k, L_k, Y_k), k \ge 1\}-$ последовательность независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов с взаимозависимыми компонентами с соответствующими непрерывными функциями распределения (ф.р.) $F(x) = P(X_i \le x)$, $K(x) = P(L_i \le x)$ и $G(x) = P(Y_i \le x)$. Пусть H и $N-$ ф.р. с.в. Z_i и $V_i = \min(X_i, Y_i)$. Тогда заметим, что $H(x) = K(x)N(x)$, $N(x) = 1 - (1 - F(x))(1 - G(x))$. Задача состоит в оценивании характеристической функции (х.ф.) $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ с.в. X_i по выборке $S^{(n)}$ в следующей полупараметрической модели, согласно которой существуют положительные неизвестные числа θ и β такие, что верны представления для всех $x \in R^1$:

$$\begin{cases} 1 - G(x) = (1 - F(x))^{\theta}, \\ K(x) = (N(x))^{\beta}, \end{cases}$$

Здесь параметрами β и θ определяются соответственно глубины цензурирования с.в. X_i слева и справа. В работах [1-3] были установлены характеризационное свойства рассматриваемой модели, согласно которой представления (**??**) эквивалентны независимости с.в. X_i и вектора Δ_i а также была исследована полупараметрическая оценка для ф.р. $F(x)$ вида $F_n(x) = 1 - [1 - (H_n(x))^{\lambda_n}]^{\gamma_n}$, $t \in R^1$, где $\lambda_n = 1 - p_n^{(o)}$ и $\gamma_n = p_n^{(1)}(p_n^{(1)} + p_n^{(2)})^{-1}$ соответствующие оценки $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$ и $\gamma = \frac{1}{1+\theta}$. Построим оценку для х.ф. $C_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x)$. Пусть $\mathbb{C}[T^{(1)},\ \ T^{(2)}]$ банахово пространство непрерывных комплекснозначных функций на интервале $[T^{(1)},\ T^{(2)}]$ с супремум-нормой $\sup_{T^{(1)} \le t \le T^{(2)}} |.|$, где $\sup\{x \in R^1 : H(x) = 0\} = \tau_H < T^{(1)} \le T^{(2)} < T_H = \inf\{x \in R^1 : H(x) = 1\}$. Обозначим $\sup_{T^{(1)} \le t \le T^{(2)}} [(H(x))^{p^{(0)}} - H(x)]^{-1}$, где $p^{(0)} = P(\delta_i^{(0)} = 1)$.

Следующая теорема утверждает равномерно сильную состоятельность $C_n(t)$ на каждом конечном интервале $[T^{(1)},\ T^{(2)}]$.

Теорема 1. Предположим, что $\rho > 0$. Тогда при $n \to \infty$, $\sup_{T^{(1)} \le t \le T^{(2)}} |C_n(t) - C(t)| \to 0$.

Определим субраспределения $\{T^{(m)}(x) = P(Z_i \le x,\quad \delta_i^{(m)} = 1),\ \ m = 0, 1, 2\}$. Слабая сходимость эмпирического характеристического процесса $\{\Gamma_n(t) = \sqrt{n}(C_n(t) - C(t)),\quad t \in [T^{(1)},\ T^{(2)}]\}$ составляет содержание следующего утверждения.

Теорема 2. Предположим, что $\rho > 0$ и для $\alpha > 0$ при $x \to \infty$:

$$x^{\alpha} T^{(m)}(-x) + x^{\alpha}(1 - T^{(m)}(x)) = O(1), \quad m = 1, 2, 3.$$

Тогда последовательность случайных процессов $\{\Gamma_n(t),\ t \in [T^{(1)},\ T^{(2)}]\}$ слабо сходится в $\mathbb{C}[T^{(1)},\ T^{(2)}]$ к центральному комплекснозначному гауссовскому процессу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдушукуров А.А., Модель случайного цензурирование с двух сторон и критерий независимости для нее. Доклады АН РУз. 1994. Вып. 11. С. 8-9.
2. Abdushukurov A.A., Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function, Commun. Statist: Th. Meth. 1998.v. 27. N. 8. p. 1991-2012.
3. Abdushukurov A.A., Mansurov D.R. Asymptotic results for empirical processes in informative model of random censorship from both sides. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2021. e2.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕНАТУРАЦИИ ДНК-РНК ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Хатамов Н. М.[1], **Нажмиддинов Р. Е.**[2]

[1] Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
nxatamov@mail.ru;

[2]Наманганский государственный университет,Наманган,Узбекистан,
rustamjonnajmiddinov97@mail.ru

Термодинамика ДНК для моделей статистической физики изучается в статьях [1]-[4]. В работе [5] термодинамика ренатурации ДНК-РНК была исследована для новой модели. В настоящей работе рассматривается модель Изинга и для этой модели изучается термодинамика ренатурации ДНК-РНК.

Известно, что в ДНК каждая пара $A+T$ соединена двумя водородными связями, а каждая пара $C+G$ - тремя водородными связями. Поэтому в этом разделе мы моделируем их как $-1=A+T, 1=C+G$. Для разорванной водородной связи сопоставляется значение спина 0. Пары оснований $A+T$ (в ДНК) и $A+U$ (в РНК) считаются идентичными в процессе ренатурации ДНК из РНК (вируса). Эти молекулы содержатся в клетках всех живых организмов, а также в некоторых вирусах (см.[5]).

Рассмотрим конфигурационное пространство Ω :

$$\Omega=\left\{\sigma=(d,r)\in\{0,-1,1\}^{\mathbb{Z}}\times\{0,-1,1\}^{\mathbb{Z}}: d_ir_i=0, \forall i\in\mathbb{Z}\right\},$$

где

$$d=\{d_i\in\{0,-1,1\}: i\in\mathbb{Z}\}, r=\{r_i\in\{0,-1,1\}: i\in\mathbb{Z}\}$$

и $\mathbb{Z}-$ множество целых чисел.

Для каждой конфигурации $\sigma\in\Omega$ определим ее энергию (гамильтониан модели Изинга) следующим образом:

$$H(\sigma)=H(d,r)=-J\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(d_id_{i+1}+r_ir_{i+1})-\alpha\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(d_i+r_i), \tag{1}$$

где $J\in R$ - константа связи между парами оснований, $\alpha\in R-$ внешнее поле.

Через σ_n обозначим ограничение конфигураций $\sigma\in\Omega$ на $\mathbb{Z}_n=\{-n,-n+1,...,n-1,n\}$, а через Ω_n обозначим множество всех таких конфигураций. Пусть $A\subset\mathbb{Z}$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A.

Рассмотрим вероятностное распределение μ_n на Ω_n :

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n)+\sum_{m\in\{-n,n\}}h_{m,d_m,r_m}\right\}, \tag{2}$$

где $\beta=1/T$, $T>0-$ температура, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель, совокупность

$$h_{m,i,j}\in\mathbb{R}, i,j=-1,0,1, m=-n,n \tag{3}$$

представляет собой набор действительных чисел и

$$H_n(\sigma)=-J\sum_{i=-n}^{+n}(d_id_{i+1}+r_ir_{i+1})-\alpha\sum_{i=-n}^{+n}(d_i+r_i).$$

Говорят, что вероятностное распределение μ_n согласованно, если

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{\{-n,n\}}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}) \tag{4}$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{n-1}$.

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Ω такая, что

$$\mu(\{\sigma \mid_{\mathbb{Z}_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_n$. Такая мера называется *мерой Гиббса*, соответствующей гамильтониану (1) и значениям (2).

Для ясности предположим, что

$$h_{-n,i,j} = h_{n,i,j}, i, j = 0, -1, 1. \tag{5}$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{n,i,j}$, при которых выполняется (4).

ТЕОРЕМА. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n), n = 1, 2, ...,$ в (2) согласованно тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 1$ выполняются следующие функциональные уравнения:*

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= \tfrac{1+\eta^{-1}(\theta x_n+y_n)+\eta(\theta^{-1}u_n+v_n)}{1+\theta\eta^{-1}(x_n+y_n)+\eta(u_n+v_n)},\\
y_{n-1} &= \tfrac{1+\eta^{-1}(x_n+\theta y_n)+\eta(u_n+\theta^{-1}v_n)}{1+\eta^{-1}(x_n+y_n)+\eta(u_n+v_n)},\\
u_{n-1} &= \tfrac{1+\eta^{-1}(\theta^{-1}x_n+y_n)+\eta(\theta u_n+v_n)}{1+\eta^{-1}(x_n+y_n)+\eta(u_n+v_n)},\\
v_{n-1} &= \tfrac{1+\eta^{-1}(x_n+\theta^{-1}y_n)+\eta(u_n+\theta v_n)}{1+\eta^{-1}(x_n+y_n)+\eta(u_n+v_n)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Где

$$\begin{aligned}
&\theta = exp(J\beta), \eta = exp(\alpha\beta),\\
&x_n = exp(h_{n,0,-1} - h_{n,0,0}), y_n = exp(h_{n,-1,0} - h_{n,0,0}),\\
&u_n = exp(h_{n,0,1} - h_{n,0,0}), v_n = exp(h_{n,1,0} - h_{n,0,0}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Литература.

1. Rozikov U. A. Tree-hierarchy of DNA and distribution of Holliday junctions. J.Math.Biol. 2017. V.75, p.1715–1733.
2. Rozikov U.A. Holliday junctions for the Potts model of DNA. Algebra, Complex Analysis. Springer, Switzerland 2018. P.151–165.
3. Розиков У.А. Термодинамика взаимодействующих систем молекул ДНК. Теоретическая и математическая физика. 2021. Т.206, №2. С.199–209.
4. Хатамов Н.М. Структуры Холлидея в модели Блюма-Капеля молекулы ДНК. Теоретическая и математическая физика. 2021. Т.206, №3. С.439–447.
5. Rozikov U.A. Thermodynamics of DNA-RNA renaturation. Inter. Jour. Geom. Methods Mod. Phys. 2021. V.18, №6. 2150096 (14 pages).

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ НС-БЛЮМА-КАПЕЛЯ В СЛУЧАЕ "ЦИКЛ"НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Хатамов Н. М.[1], Эргашев Б. А.[2]

[1]Докторант институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
nxatamov@mail.ru;

[2] Наманганский государственный университет,Наманган,Узбекистан,
ergashevbahtiyor79@gmail.com

В этом статье изучена трансляционно-инвариантные меры Гиббса для динамической модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. Это двумерный спиновая система, где одна переменная спин может принимать три значения:$-1, 0, +1$. Первоначально он был введен для изучения $He^3 - He^4$ фазовый переход [2-5].

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V есть множество вершин Γ^k, $L-$ его множество ребер. Пусть $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x, y\rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y, т.е. количество ребер кратчайший пути, соединяющей x и y.

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, +1\}$. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A.

Рассмотрим граф с тремя вершинами $-1, 0, +1$ (на множестве значений $\sigma(x)$), который имеет следующий вид (см.[1], [3]):

$$\textit{цикл:}\quad \{0, -1\}, \{0, +1\}, \{-1, -1\}$$

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

где $J \in R$.

Пусть $x^0 \in V$-фиксированная точка. Будем писать $x \prec y$, если путь от x^0 до y проходит через x.

Обозначим: $W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\},\ V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}$.

Точка y называется *"прямым потомком"* точки x , если $x \prec y$ и $d(x, y) = 1$.

Для $x \in G_k$ обозначим через $S(x)-$ множество *"прямых потомков"* точки $x \in V$.

Пусть $O = \{$*цикл*$\}$, $G \in O$. Конфигурация σ называется G *-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$-ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через $\Omega^G(\Omega^G_{V_n})$.

Пусть $h : x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{+1,x})$-вектор функция от $x \in V \setminus \{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \tag{2}$$

где $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}, Z_n = \sum_{\overline{\sigma}_n\in\Omega^G_{V_n}} exp\{-\beta H(\overline{\sigma}_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\overline{\sigma}(x),x}\}$ и $h_{\overline{\sigma},x} \in R$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $(\forall n \geq 1)$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{3}$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω^G_V, такая, что

$$\mu(\{\sigma \mid_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{i,x}$, при которых выполняется (3).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $k \geq 2$ (*в случае "цикл"*). *Вероятностное распределение* $\mu^{(n)}(\sigma_n), n = 1, 2, ...$ в (2) *согласованно тогда и только тогда, когда для любого* $x \in V$ *имеют место следующие:*

$$\begin{cases} z_{+1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{1+\theta^3 z_{-1,y}}{z_{-1,y}+z_{+1,y}}, \\ \\ z_{-1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{1+\theta^3 z_{+1,y}}{z_{-1,y}+z_{+1,y}}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\theta = exp\{-J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}),\ i = +1, -1$.

Трансляционно-инвариантные(ТИ) меры Гиббса соответствуют решениям (4) с $z_{i,x} = z_i$ при всех $x \in V$ и $i = -1, +1$. Для удобства, перепишим $z_{+1} = z_1, z_{-1} = z_2$. Тогда (4) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = (\frac{1+\theta^3 z_2}{z_1+z_2})^k, \\ \\ z_2 = (\frac{1+\theta^3 z_1}{z_1+z_2})^k, \end{cases} \tag{5}$$

ЛЕММА. *Пусть* $k \geq 2$. *Для любого* $\theta > 0$ *система уравнений (5) имеет только единственное решение.*

Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для модели (1) в случае "цикл"при любых* $\theta > 0$ *существует ровно одна ТИ мера Гиббса.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U. A. Gibbs Measures on Cayley Trees. World Sci., Singapore 2013.
2. Xatamov N.M., Xakimov R.M. Translation-invariant Gibbs measures for the Blume-Capel model on a Cayley tree. JMAG. 2019, Vol.15, No.2, pp.239–255.
3. Xatamov N.M. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol 72, No. 4(2020), p.540–556.
4. Cirillo E.N., Olivieri E. Metastabilty and nucleation for the Blume-Capel model. Different mechanisms of transition. Journal of Statistical Physics, vol.83, 1996, p.473–554.
5. Hryniv O., Kotecky R. Surfase Tension and the Orustein-Zernike Behavior for the 2D Blume-Capel model.Journal of Statistical Physics, V.106, N.314, 2002.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НОВЫХ ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ГИББСА В МОДЕЛИ ИЗИНГА МОЛЕКУЛЫ ДНК НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Хатамов Н. М.[1], Ибрагимов И. И.[2]

[1] Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
nxatamov@mail.ru;
[2]Наманганский государственный университет,Наманган,Узбекистан,
islom.ibragimov.97@mail.ru

Как известно, каждая молекула ДНК представляет собой двойную спираль, образованную двумя комплементарными нитями нуклеотидов, которые удерживаются вместе водородными связями между парами оснований $C+G$ (цитозин-гуанин) и $A+T$ (аденин-тимин).

Дерево Кэли $\Gamma^k=(V,L)$ порядка $k\geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V есть множество вершин Γ^k, $L-$ его множество ребер. Пусть $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l\in L$ его концевые точки $x,y\in V$. Если $i(l)=\{x,y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x,y\rangle$.

Пусть $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$. В работе [3] было доказано, что все вершины дерева Кэли можно разбить на классы эквивалентности, пронумерованные целыми числами, и через каждую вершину, принадлежащую $m-$ му классу эквивалентности, проходит единственный путь, такой что номера классов эквивалентности, которым принадлежат последовательные вершины этого пути, образуют бесконечную в обе стороны последовательность $...,m-2,m-1,m,m+1,m+2,...$ целых чисел. Он называется $\mathbb{Z}-$*путь* ($\mathbb{Z}-path$).

Рассмотрим функцию σ, которая присваивает каждому ребру $l\in L$ значение $\sigma(l)\in\{-1,0,1\}$ так, что $-1=A+T$ и $1=C+G$, а $\sigma(l)=0$ означает, что ребро "свободно". Функция $\sigma=\{\sigma(l),l\in L\}$ называется конфигурацией. Конфигурация $\sigma=\{\sigma(l),l\in L\}$ называется *допустимой,* если $\sigma(l)\neq 0$ для всех $l\in\mathbb{Z}-path$. Ограничение допустимой конфигурации на $\mathbb{Z}-$*путь* называется ДНК.

Мы рассматриваем следующую модель Изинга энергии конфигурации σ на множестве ДНК [1]:

$$H(\sigma)=J\sum_{\langle l,t\rangle\in L\times L;}\sigma(l)\sigma(t), \tag{1}$$

где $J>0-$константа связи, $\sigma(l)\in\{-1,0,1\}$ и $\langle l,t\rangle$ ребра ближайшими соседями.

Стандартным образом (см. работы [1], [2]) можно свести задачу изучения мер Гиббса в модели Изинга к решению следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
&z_{0,l}=\tfrac{1+z_{l_0}}{\alpha+\alpha^{-1}z_{l_0}}\cdot\tfrac{1+z_{l_1}}{\alpha+\alpha^{-1}z_{l_1}}\cdot\prod_{t\in S_0(l)}\tfrac{1+z_{0,t}+z_{1,t}}{\alpha+z_{0,t}+1+\alpha^{-1}z_{1,t}},\, l\notin\mathbb{Z}-path,\\
&z_{1,l}=\tfrac{\alpha^{-1}+\alpha z_{l_0}}{\alpha+\alpha^{-1}z_{l_0}}\cdot\tfrac{\alpha^{-1}+\alpha z_{l_1}}{\alpha+\alpha^{-1}z_{l_1}}\cdot\prod_{t\in S_0(l)}\tfrac{\alpha^{-1}+z_{0,t}+\alpha z_{1,t}}{\alpha+z_{0,t}+\alpha^{-1}z_{1,t}},\, l\notin\mathbb{Z}-path,\\
&z_l=\tfrac{\alpha^{-1}+\alpha z_{l_1}}{\alpha+\alpha^{-1}z_{l_1}}\cdot\prod_{t\in S_1(l)}\tfrac{\alpha^{-1}+z_{0,t}+\alpha z_{1,t}}{\alpha+z_{0,t}+1+\alpha^{-1}z_{1,t}},\, l\in\mathbb{Z}-path.
\end{aligned} \tag{2}$$

Трансляционно-инвариантные меры Гиббса(ТИМГ) отвечают не зависящим от l,t решениям $\mathbf{z}=(z_{0,l},z_{1,l},z_t)$, где $l\notin\mathbb{Z}-path, t\in\mathbb{Z}-path$:

$$z_{0,l}=u, z_{1,l}=v,\forall l\notin\mathbb{Z}-path; z_l=w,\forall l\in\mathbb{Z}-path, \tag{3}$$

Здесь величины u, v, w положительны в силу уравнений (2) и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u &= \left(\tfrac{1+u+v}{\alpha+u+\alpha^{-1}v}\right)^{k-2}\left(\tfrac{1+w}{\alpha+\alpha^{-1}w}\right)^{2}, \\ v &= \left(\tfrac{1+\alpha u+\alpha^2 v}{\alpha^2+\alpha u+v}\right)^{k-2}\left(\tfrac{1+\alpha^2 w}{\alpha^2+w}\right)^{2}, \\ w &= \left(\tfrac{1+\alpha u+\alpha^2 v}{\alpha^2+\alpha u+v}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1+\alpha^2 w}{\alpha^2+w}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что $v = w = 1$ удовлетворяют данной системе уравнений для любого $k \geq 2$ и $\lambda < 1$, тогда из первого уравнения системы мы получаем

$$u = \left(\frac{2+u}{\alpha+\alpha^{-1}+u}\right)^{k-2}\left(\frac{2}{\alpha+\alpha^{-1}}\right)^{2}. \tag{5}$$

Здесь введем обозначении:

$$x = \frac{u}{2}, b = \frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}, a = 2\left(\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\right)^{2}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) принят вид

$$ax = \left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{k-2}. \tag{7}$$

Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Уравнение (7) имеет одно решение, если или $k = 3$, или $b \leq \left(\frac{k-1}{k-3}\right)^2$. Если $k > 3$ и $b > \left(\frac{k-1}{k-3}\right)^2$, то существуют числа $\eta_1(b,k), \eta_2(b,k)$ с $0 < \eta_1(b,k) < \eta_2(b,k)$, такие, что уравнение имеет три решения, если $\eta_1(b,k) < a < \eta_2(b,k)$, и имеет два решения, если либо $a = \eta_1(b,k)$, либо $a = \eta_2(b,k)$. Числа η_i находятся из формулы*

$$\eta_i(b,k) = \frac{1}{x_i}\left(\frac{1+x_i}{b+x_i}\right)^{k-2},$$

где x_1, x_2 являются решениями уравнения

$$x^2 + [2-(b-1)(k-3)]x + b = 0.$$

Соответствующие этим решениям ТИМГ являются новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U. A. Tree-hierarchy of DNA and distribution of Holliday junctions. J.Math.Biol. 2017. V.75, p.1715–1733.
2. Rozikov U.A., Ishankulov F.T. Description of periodic p-harmonic functions on Cayley trees. Nonlinear Diff.Equ.Appl. 17(2):153-160, 2010.
3. Хатамов Н.М. Структуры Холлидея в модели Блюма-Капеля молекулы ДНК. ТМФ. 2021. Т.206, №3. С.439–447.

Mundarija

I SHO‘BA: MATEMATIK ANALIZ

СЕКЦИЯ №1: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

SECTION No.1: MATHEMATICAL ANALYSIS

II SHO'BA: ALGEBRA VA GEOMETRIYA

СЕКЦИЯ № 2: АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

SECTION No. 2: ALGEBRA AND GEOMETRY

III SHO'BA: DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKA

СЕКЦИЯ №3: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

SECTION No.3: DIFFERENTIAL EQUATION AND MATHEMATICAL PHYSICS

IV SHO'BA: HISOBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

СЕКЦИЯ № 4: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

SECTION No. 4: COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELLING

V SHO'BA: EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

СЕКЦИЯ № 5: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

SECTION No. 5: THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Buxoro shahri, M.Iqbol ko'chasi, 11 – uy.