O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
INNOVATSION
RIVOJLANISH VAZIRLIGI

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN
T E Z I S L A R T O' P L A M I

A B S T R A C T S
INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES»

Т Е З И С Ы
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

2021 YIL 15 APREL
BUXORO

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ФАКУЛЬТЕТИ**

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ

ХАЛҚАРО МИҚЁСИДАГИ ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН

МАТЕРИАЛЛАРИ

2021 йил, 15-апрель

Бухоро – 2021

x	-1	1	2	3
f(x)	2	0	6	12

Ushbu masalani yechish uchun Mathcad dasturida Lagranj interpolyatsion ko'phadi uchun algoritm va dasturi tuzilgan. Bu dastur orqali jadval ko'rinishdagi funksiyani kiritib, ko'phadning ko'rinishini aniqlangan. Shunday qilib Lagranj interpolyatsion ko'phadi uchun tuzilgan algoritm va dasturdan ixtiyoriy interpolyatsiya masalasi uchun qo'llab yaxshi natija olish mumkin.

```
L2(t, x, y, n) := | s ← 0
                  | for  k ∈ 0 .. n
                  |     | a ← 1
                  |     | w ← x_k
                  |     | for  j ∈ 0 .. n
                  |     |     | q ← x_j
                  |     |     | a ← a · (t − q)/(w − q)  if  j ≠ k
                  |     | w ← y_k
                  |     | s ← s + a · w
                  | s
```

$$x := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := L2(t, x, y, 3) \text{ simplify } \to \frac{(t-1)\cdot\left(35\cdot t - 7\cdot t^2 + 30\right)}{12}$$

1-rasm. Lagranj interpolyatsion ko'phadi uchun Mathcad tizimida tuzilgan dastur.

Adabiyotlar ro'yxati.

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М., Наука. 1989.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. -М., Наука. 1987.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. –М.наука.1987.

УДК 517.518.644

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С.Л.СОБОЛЕВА $\widetilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Жалолов Ф. И., Хаятов Х., Каримов Ф.Р.

Бухарский государственный университет

Рассмотрим построению интерполяционную формулу $P_f(x)$, т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x_\lambda), \tag{1}$$

совпадающие функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), i = 0,1,..., N, \tag{2}$$

здесь точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $c_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1-одномерный тор ,т.е. окружность длины равной единице.

Важной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал определенный как

$$< \ell(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda) \tag{3}$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda)$

интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) \delta(x - x_\lambda) \tag{4}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$- коэффициенты, а x_λ узлы формулы $P_f(z), x_\lambda \in T_1$, $\delta(x)$- дельта- функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом в норме [2]

$$\left(\int_{T_1} f(x)dx\right)^2 + \left\|f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0}|2\pi k|^{2m}\left|\hat{f}_k\right|^2. \tag{5}$$

Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\left\|\ell \,|\, \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\| = \sup_{\|f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|=1} |<\ell, f>|, \tag{6}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ -сопряженное пространство пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Значит, для того чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить ному функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$. Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов χ_λ. Если

$$\left\|\overset{0}{\ell} \,|\, \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\| = \inf_{C_\lambda(x), \chi_\lambda} \left\|\ell \,\,|\, \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\|, \tag{7}$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую интерполяционную формулу оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, возникает следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$ которые удовлетворяют равенству (7).

Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (7), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.

В работе [1] С. Л. Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена задача 1.

Справедлива следующая .

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\|\ell/\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\|^2 = \left|1-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z)e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}, \tag{8}$$

где $c_\lambda(z)$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы вида (1).

Доказательство.

Известно, что [2] для функции $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi ikx} = \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi ikx},$$

Таким образом, имеем

$$< \ell(x), f(x) > = < \ell(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi ikx} > = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k < \ell(x), e^{-2\pi ikx} > = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \hat{\ell}_k = \hat{f}_o \hat{\ell}_o + \sum_{k\neq o} \hat{f}_k \hat{\ell}_k, \quad (9)$$

здесь $\hat{\ell}_0 = \int_{T_1} \ell(x)dx, \quad \hat{\ell}_k = \int_{T_1} \ell(x)e^{2\pi ikx}dx.$ и $\hat{\ell}_k = cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}.$ (10)

При k=0 из (10) имеем

$$\left(\ell(x), 1\right) = 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z). \quad (11)$$

Применяя к правой части (9) неравенство Шварца, получим следующую

$$\left\| \ell / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 \le \left| 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \quad (13)$$

Существует такая функция из пространства $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$,что в неравенстве (13) равенство достигается.

Действительно, рассмотрим следующую функцию $u(x)$:

$$u(x) = 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{(2m)}}. \quad (14)$$

Пользуясь формулами (10) и (11),после некоторых вычислений получим

$$< \ell(x), u(x) > = \left| 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq o} \frac{\left| cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (15)$$

Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. Квадрат нормы функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ равен:

$$\left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq o} \frac{\left| cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}.$$

Из этой леммы и неравенство (13) следует теорема 1.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. В периодическом пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4), коэффициенты которой при $m = 1$ имеют следующий вид

$$c_{[\beta]}(z) = \frac{1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^2}}{N\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2}\right)}, \quad (16)$$

где $\beta = \overline{1, N}, N = 2, 3, \ldots$.

Доказательство.

Так как $\psi_t(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, то по теоремы Бабушки условие оптимальности интерполяционной формулы запишется в виде

$$<\delta\left(x-x^{(\lambda)}\right),\psi_l(x)>=\psi_l\left(x^{(\lambda)}\right)=0, \qquad (17)$$

где ψ_l экстремальная функция интерполяционной формулы (1) в пространстве $\widetilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Представление экстремальной функции имеет следующий вид

$$\psi_l(x)=1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\cos 2\pi kz-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\beta)}}\right)e^{-2\pi ikx}}{k^2}, \qquad (18)$$

где $x^{(\beta)}$ и $c_\beta(z)$ узлы и коэффициенты интерполяционной формулы (1).

Из (17) для $\psi_l(h\lambda)$ имеем следующую систему уравнений , т.е.

$$1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\cos 2\pi kz-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\beta)}}\right)e^{-2\pi ikx}}{k^2}=0. \qquad (19)$$

Преобразуя (19) имеем

$$\sum_{\lambda=1}^{N}c_\beta(z)+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda(z)e^{2\pi ik(h\beta-h\lambda)}\right)}{k^2}=1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\lambda)}{k^2}. \qquad (20)$$

После некоторых преобразований из (20) получим

$$\sum_{\lambda=1}^{N}c_\beta(z)\left[1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(h\beta-h\lambda)}{k^2}\right]=1+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\lambda)}{k^2}. \qquad (21)$$

Умножая обе части (21) на a , где

$$a=\frac{1}{\left(D^{(1)}(0)+2D^{(1)}(1)\right)\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right)}, \qquad (22)$$

имеем

$$\sum_{\lambda=1}^{N}c_\beta(z)a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(h\beta-h\lambda)}{k^2}\right]=a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\lambda)}{k^2}\right). \qquad (23)$$

После некоторых обозначениях получим следующую уравнению

$$\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta(z)\nu_m(h\beta-h\lambda)=f_m(h\beta),(\lambda=1,N). \qquad (24)$$

Пере обозначив $c_\beta(z)=c_{[\beta]}(z),\nu_m(h\beta)=\nu_m[\beta]$ и $f_m(h\beta)=f_m[\beta]$,
систему (24) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$c_{[\beta]}(z)*\nu_m[\beta]=f_m[\beta],\beta=\overline{0,N} \text{ (см. [5]).} \qquad (25)$$

$$c_{[\beta]}(z)=0,h\beta\notin[T_1], \qquad (26)$$

где

$$\nu_2[\beta]=a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(h\beta-h\lambda)}{k^2}\right] \text{ и} \qquad (27)$$

$$f_2[\beta]=a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\lambda)}{k^2}\right). \qquad (28)$$

Решая уравнение (26)) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1) получим (см. [3,5])

$$c_{[\beta]}(z)=h\left(\frac{1}{1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}\right)\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2 N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^2}\right), \tag{29}$$

где $h=\frac{1}{N}$ и $\beta=\overline{1,N}, N=2,3,...$,тогда переобразуя (29) имеем коэффициенты оптимальной интерполяционной (1).

Что и требовалось доказать .

Приводим известные формулы (см. [4])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}(x), \tag{30}$$

где B_{2m}-числа Бернулли и $B_{2m}(x)$- многочлен Бернулли.

При $m=1$, используя формулы (30) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1) из (29) получим

$$c_{[\beta]}(z)=\frac{1+\frac{1}{2N^2}B_2(z-h\beta)}{N\left(1+\frac{1}{2N^2}B_2\right)}. \tag{31}$$

Список литературы

1. Соболев С.Л Об интерполировании функций n переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,-с. 778-781.Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. -808с.
2. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2016. - № 2. –С. 94-102.
3. И.С. Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. наука, физ-мат., М.1971.
4. Шадиметов Х.М., Жалолов И.И. Об одном алгоритме построения оператора $D_h^m[\beta]$ для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве $W_2^m(R)$. –УзМЖ 2010, №3, -с. 178-187.
5. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
6. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
7. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
8. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO
DAVLAT
UNIVERSITETI
1930

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
INNOVATSION
RIVOJLANISH VAZIRLIGI

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN ISHTIROKCHISI

Жалолов Ф. И.

SERTIFIKAT

bilan taqdirlanadi

Buxoro davlat universiteti rektori: ______ **O.X. Xamidov**

15.04.2021