МУАММОҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА ВА ТАЪЛИМИ ОН

(Маводи конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ бахшида ба 35 –солагии Истиқлоли давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон, 30-солагии Конститутсияи Ҷумҳурии Тоҷикистон, "Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф" ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика Тухлиев Қамаридин, Хуҷанд, 21-22 Июни соли 2024)

ҚИСМИ 1

ЧАСТЬ 1

ХУҶАНД - 2024

ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ
ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

МУАССИСАИ ДАВЛАТИИ ТАЪЛИМИИ
«ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ХУҶАНД БА НОМИ АКАДЕМИК БОБОҶОН ҒАФУРОВ»

МАВОДИ

КОНФЕРЕНСИЯИ БАЙНАЛМИЛАЛИИ ИЛМӢ – АМАЛИИ
«МУАММОҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА ВА ТАЪЛИМИ ОН»
БАХШИДА БА 35 – СОЛАГИИ ИСТИҚЛОЛИ ДАВЛАТИИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН, 30 - СОЛАГИИ КОНСТИТУТСИЯИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН, "БИСТСОЛАИ ОМӮЗИШ ВА РУШДИ ФАНҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ, ДАҚИҚ ВА РИЁЗӢ ДАР СОҲАИ ИЛМУ МАОРИФ" ВА 70- СОЛАГИИ ДОКТОРИ ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА ТУХЛИЕВ ҚАМАРИДИН

(ХУҶАНД, 21-22 -УМИ ИЮНИ СОЛИ 2024)

ХУҶАНД – 2024

43. **Х. М. Шадиметов, Ф. И. Давлатова.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул..161
44. **Х. М. Шадиметов, Х. И. Усманов.** Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами...164
45. **Х. М. Шадиметов, Х. Х. Жабборов.** Об одном оптимальной квадратурной формуле с ядром Гильберта...165
46. **Х. М. Шадиметов, Б. М. Атамурадова.** Дискретная система типа Винера – Хопфа одной интерполяционной формулы...167
47. **Х.М. Шадиметов, Н.Х. Маматова** Точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы...172
48. **Kh. M. Shadimetov, R. S. Karimov.** System of equations for finding optimal coefficients of difference formulas in the hilbert space..175

БАХШИ 2
МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ВА ИНТЕГРАЛӢ

СЕКЦИЯ 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. **Sneha Latha. M., Parandhama Areti, Kulanov I. B.** MHD Stefan flow of Casson nanofluid through a porous medium in the presence of chemical reaction with the effect of Thompson and Troian slip over a plate in the company of radiation..181
2. **Tuan Anh Dao, Murtazo Nazarov, Ignacio Tomas.** Structure and positivity preserving finite element method for ideal mhd via viscous regularization...184
3. **Г. Джангибеков, Г. Козиев.** Двумерные интегральные операторы с подвижными и фиксированными особенностями поограниченной области……………………………......190
4. **Г. Джангибеков, Г. Х. Худжаназарова, Ш. Мухторова.** О разрешимости некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области………....191
5. **Ш. Х. Мирзорахимов.** О распределении квадратичных вычетов по модулю свободного от квадратов....……………..………………………………………………………………......193
6. **С. В. Олимджонов.** О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов...196
7. **Е. М. Мухсинов, Р. И. Хакимов.** Некоторые задачи в Банаховом пространстве……...200
8. **А. Б. Расулов, Н. В. Якивчик.** Представление общего решения уравнения Коши–Римана с внутренними и граничными сильными особенностями в младшихкоэффициентах..203
9. **Н. В. Якивчик, А. Б. Расулов, С. М. Мухсинова.** Интегральное представление решений обобщенного уравнения коши–римана с неизолированными сильными особенностями в младшем коэффициенте…………………………………………………………………….........207
10. **M. M. Aripov, O. H. Atabayev.** On the behavior of solutions of doubly nonlinear parabolic problem with source and absorption terms with variable density…………………………....211
11. **U. Kh. Dusanova.** A non-local problem for mixed type equations involving the caputo fractional derivative………………………………………………………………………......214
12. **D, S. Shamuratov.** Solving fractional differential equations using decomposition method…………………………………………………………………………………….......216
13. **О. Абдулвохиди, А. Ганизода.** Двоякопериодические решение одной некласической нелинейной системы уравнений на плоскости…………………………………………....219
14. **Ю. П. Апаков, Р. А. Умаров.** О краевой задаче для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами………………………………………………………….....221
15. **С. Байзоев, Р. Н. Баротов.** О регулярных решениях одного класса обощенных систем коши-римана с ограниченными коэффициентами...224

УДК 519.644

Х.М. Шадиметов[1], Н.Х. Маматова[1,3]

[1] Институт математики им. В.И. Романовского, АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
[3]Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Аннотация: Многие задачи науки и техники естественным образом сводятся к построения оптимальных интерполяционных формул. В этой работе обсуждается задача построения оптимальных интерполяционных формул. Здесь сначала вычисляется точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Доказываются существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы, каторая дает наименьший погрешность.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, функционал погрешности, оптимальная интерполяционная формула.

Kh.M.Shadimetov, N.Kh.Mamatova

[1]V.I.Romanovskiy Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Bukhara State University, Republic of Uzbekistan

EXACT UPPER BOUND FOR THE ERROR OF THE INTERPOLATION FORMULA

Abstract: Many problems in science and technology naturally reduce to the construction of optimal interpolation formulas. This paper discusses the problem of constructing optimal interpolation formulas. Here, we first calculate the exact upper bound for the error of the interpolation formula in Sobolev space. The existence and uniqueness of the optimal interpolation formula, which gives the smallest error, is proved.

Key words: Sobolev space, extremal function, error functional, optimal interpolation formula.

Для отыскания приближенного представления функции ϕ элементами из некоторого набора можно воспользоваться значениями, которые эта функция принимает в некотором конечном множестве точек x_k, $k = 0, 1, \dots, N$.
Соответствующая задача называется задачей интерполирования.
В настоящей работе рассмотрим задачу об оптимальных интерполяционных формулах, которая впервые поставлена и исследована С.Л.Соболевым [1].
Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k\,(x)\varphi(x_k). \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$\varphi(x_k) = P_\varphi(x_k), \quad k = 0,1,\dots,N. \qquad (1.2)$$

Здесь $C_k(x)$ и x_k соответственно коэффициенты и узлы интерполяционной формулы (1.1), а функция ϕ является элементом некоторого банахова пространства B

Найти $\max\limits_{\varphi(x)\in B}|(\ell,\varphi)|$ мы будем решать с помошью экстремальной функции, которая удовлетворяет следующему равенству

$$(\ell,\psi_\ell) = \| \ell \big| L_2^{(m)*}(0,1) \| \cdot \| \psi_\ell \big| L_2^{(m)}(0,1) \|. \qquad (2.1)$$

Для экстремальной функции справедлива следующая.

Теорема 1. Экстремальная функция интерполяционной формулы (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формул

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x).$$

Здесь

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1}\mathrm{sign}(x)}{2(2m-1)!}$$

$P_{m-1}(x)$ – неизвестный многочлен степени m – 1.

Доказательство. Напомним, что пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым и скалярное произведение в нем задается формулой

$$\{\varphi, \psi\} = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx. \tag{2.4}$$

Норма функций в $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\| \varphi | L_2^{(m)} \| = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Поскольку функционал вида

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\delta(x-x_k)$$

определен на $L_2^{(m)}(0,1)$ то имеем

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \text{да } \alpha = 0,1,\dots,m-1. \tag{2.6}$$

Теперь, пользуясь общим видом линейного функционала в гильбертовом пространстве, представим функционал погрешности

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\delta(x-x_k)$$

в виде

$$(\ell, \varphi) = \{\psi_0, \varphi\}, \tag{2.7}$$

где $\psi_0 \in L_2^{(m)}(0,1)$ называется элементом Рисса. По теореме Рисса имеет место равенство

$$\| \ell \Big| L_2^{(m)*}(0,1) \| = \| \psi_0 \Big| L_2^{(m)}(0,1) \|. \tag{2.8}$$

В силу (2.4) и (2.7) получаем следующее тождество, справедливое для любой функции $\varphi \in \mathring{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$

$$\int_0^1 \frac{d^m\varphi}{dx^m}\frac{d^m\psi_0}{dx^m}dx = (\ell, \varphi). \tag{2.9}$$

Произведя m раз интегрирование по частям в смысле обобщенных функций, в левой части (2.9),
получаем

$$\begin{aligned}(\ell, \varphi) \quad &= \quad \int_0^1 D^m \varphi D^m \psi_0 dx = (-1)^m \left(D^{2m}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)\right), \varphi(x)\right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} D^{m-1+j}\psi_0(y) D^{m-j}\varphi(y)\Big|_{y=0}^{y=1} = \\ &= \quad \left(D^{2m}\left((-1)^m \varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)\right), \varphi(x)\right) + \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-1} D^{m-1+j}\psi_0(y)\delta^{(m-j)}(x-y), \varphi(x)\right)\Big|_{y=0}^{y=1},\end{aligned}$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$ $D^m = \frac{d^m}{dx^m}$.

Таким образом, в пространстве обобщенных функций

$$D^{2m}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)\right) = (-1)^m \ell(x) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m+j} D^{m-1+j}\psi(y)\delta^{(m-j)}(x-y)|_{y=0}^{y=1}. \qquad (2.10)$$

Общее решение уравнения (2.10) записывается в виде

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j\, |x-y|^{2m-j}|_{y=0}^{y=1} + P_{2m-1}(x), \qquad (2.11)$$

где $\sum_{j=1}^{m} a_j\, |x-y|^{2m-j}|_{y=0}^{y=1}$- многочлен степени 2m−1 с переопределенными коэффициентами a_j, соответствующий члену

$$\sum_{j=1}^{m} D^{m-1+j}\, \psi_0(y)\delta^{(m-j)}(x-y)|_{y=0}^{y=1},$$

$G_m(x)$ – определяется формулой (2.3).

Рассмотрим (2.11) вне отрезка [0, 1]. Выражение $(-1)^m \ell(x) * G_m$ на отрезке [0, 1] является многочленом степени m − 1, т. к. эта функция из $C^\infty(\mathbb{R}\backslash[0,1])$, которая после m кратного дифференцирования обращается в нуль благодаря условию (2.6).

Чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x) = 0 \text{ при } x \notin [0,1]$$

необходимо

$$\sum_{j=1}^{m-1} a_j\, |x-y|^{2m-1}|_{y=0}^{y=1} + P_{2m-1}(x) = R_{m-1}(x),$$

где $R_{m-1}(x)$,– некоторый многочлен степени m − 1.

Итак, для любой интерполяционной формулы вида (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ её экстремальная функция, т. е. элемент Рисса дается формулой

$$\psi_\ell(x) = \psi_0(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x).$$

Теорема 1 доказана.

Норма функционала $\ell(x)$и экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ связаны между собой соотношением

$$\| \ell|L_2^{(m)}(0,1) \|^2 = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(m)}(x)\right)^2 dx. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.2) в (2.12), видим, что квадрат нормы функционала погрешности пред-ставляет собой квадратичную функцию его коэффициентов

$$\Psi\big(C(z)\big) \quad = (-1)^m \left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N} C_k\,(z) C_{k'}(z) G_m(x_k - x_{k'}) - 2\sum_{k=0}^{N} C_k\,(z) G_m(z - x_k)\right),$$ где

$(z) = \big(C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z)\big)$

Напомним, что коэффициенты $C_k(z)$ в равенстве (2.13) должны удовлетворять системе линейных уравнений (2.6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С.Л. О задаче интерполирования функций n переменных, Докл. АН СССР. 137, 778–781 (1961) .

[2] Holladay J.C. Smoothest curve approximation, Math. Tables Aids Comput. 11, 223–243 (1957).

[3] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения (Мир, М., 1972).

[4] Маматова Н.Х., Хаётов А.Р., Шадиметов Х.М. Построение решетчатых оптимальных интерполя-ционных формул в пространстве Соболева $\tilde{L}_m^2(H)$ периодических функций n переменных методом Соболева, Уфимский матем. журн. 5, 90–101 (2013).