Известия вузов. Математика
2023, №12, с. 59–70

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Х.М. ШАДИМЕТОВ, Н.Х. МАМАТОВА

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Обсуждается задача построения оптимальных интерполяционных формул. Здесь сначала вычисляется точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Доказываются существование и единтвенность оптимальной интерполяционной формулы, которая дает наименьшую погрешность. Приводится алгоритм нахождения коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы. Реализовав этот алгоритм находятся оптимальные коэффициенты.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, функционал погрешности, оптимальная интерполяционная формула.

УДК: 519.644

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-59-70

1. Введение

Для отыскания приближенного представления функции φ элементами из некоторого набора можно воспользоваться значениями, которые эта функция принимает в некотором конечном множестве точек x_k, $k = 0, 1, \dots, N$.

Соответствующая задача называется задачей интерполирования.

В настоящей работе рассмотрим задачу об оптимальных интерполяционных формулах, которая впервые поставлена и исследована С.Л. Соболевым [1].

Следует отметить, что решение при $p = 2$ (теорема Холлидея [2]) задачи о минимизации L_p-нормы m-й производной функций, интерполирующих заданные значения y_i в заданных точках x_i, привело к развитию теории сплайнов. В дальнейшем эта задача исследовалась во многих работах в более общей постановке как проблема минимизации функционала при ограничениях (см., например, [3]–[8]).

Далее, приведем ряд недавних работ посвященных построению интерполяционных сплайнов и оптимальных интерполяционных формул. В работе [9] рассмотрена задача построения решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева периодических функций n переменных. Там найдены коэффициенты решетчатых оптимальных интерполяционных формул. В статье [10] с помощью метода Соболева построены интерполяционные D^m-сплайны, минимизирующие выражение $\int_0^1 \left(f^{(m)}(x)\right)^2 dx$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Получены явные формулы для коэффициентов интерполяционных сплайнов. Полученный интерполяционный сплайн точен для полиномов степени $m-1$. Показана связь между полученными интерполяционными сплайнами и оптимальными квадратурными формулами.

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

Работы [11], [12] посвящены построению интерполяционных сплайнов, минимизирующие выражение $\int_0^1 \left(f^{(m)}(x) + \omega^2 f^{(m-2)}(x)\right)^2 dx$ в пространстве $K_2(P_m)$. Получены явные формулы для коэффициентов интерполяционных сплайнов. Полученные интерполяционные сплайны точны для одночленов $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^{m-3}$ и для тригонометрических функций $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$. В работах [13], [14], используя дискретные аналоги дифференциальных операторов, построены оптимальные интерполяционные формулы в гильбертовых пространствах.

Следующие работы посвящены приближению алгебраическими полиномами. В статье [15] получена точная оценка погрешности наилучшего приближения алгебраическими полиномами в пространстве Лебега $L_2(-1,1)$ с весом $1-x^2$ в степени $\lambda > -1$. В работе [16] в одномерном случае определены интерполяционные весовые пространства Бесова для функций, в которых справедливы прямые и обратные оценки погрешности аппроксимации алгебраическими многочленами и сплайнами в соболевских нормах. В ряде случаев указаны точные константы в оценках.

Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k(x)\varphi(x_k). \tag{1.1}$$

Формула (1.1) удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$\varphi(x_k) = P_\varphi(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Здесь $C_k(x)$ и x_k — соответственно коэффициенты и узлы интерполяционной формулы (1.1), а функция φ является элементом некоторого банахова пространства $\mathbf{B}$.

Важной задачей теории интерполирования является отыскание максимума ошибок интерполяционной формулы (1.1). Значение ошибки $\varphi(x) - P_\varphi(x)$ в некоторой точке z есть линейный функционал над пространством функций φ:

$$(\ell, \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\varphi(x_k). \tag{1.2}$$

Здесь

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\delta(x - x_k) \tag{1.3}$$

называется функционалом погрешности интерполяционной формулы, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

По неравенству Коши–Шварца ошибка (1.2) интерполяционной формулы (1.1) оценивается с помощью нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $\mathbf{B}^*$:

$$|(\ell, \varphi)| \le \|\varphi|\mathbf{B}\| \cdot \|\ell|\mathbf{B}^*\|.$$

Предметом нашего изучения будет норма этого функционала:

$$\|\ell|\mathbf{B}^*\|.$$

Различным узлам x_k и коэффициентам $C_k(z)$ отвечают разные значения нормы $\|\ell|B^*\|$. Важная задача — это минимизация нормы $\|\ell|\mathbf{B}^*\|$, т. е. найти

$$\|\mathring{\ell}|\mathbf{B}^*\| = \inf_{C_k(z), x_k} \|\ell|\mathbf{B}^*\|. \tag{1.4}$$

Тогда соответствующая формула называется оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, получаем следующие задачи.

Задача 1. Найти $\max\limits_{\varphi(x)\in\mathbf{B}}|(\ell,\varphi)|$.

Задача 2. Найти оптимальные коэффициенты $\mathring{C}_k(z)$ и $\mathring{x}_k$, удовлетворяющие равенству (1.4).

В настоящей работе мы займемся исследованием задач 1 и 2 в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ функций, у которых обобщенная производная порядка m интегрируема с квадратом на отрезке $[0,1]$.

Остальная часть работы организована следующим образом. В разделе 2 найдены экстремальная функция и квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы. Получена точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Раздел 3 посвящен доказательству существования и единственности оптимальной интерполяционной формулы с равноотстоящими узлами. В разделе 4 описывается алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы с равноотстоящими узлами. В конце работы с помощью этого алгоритма получены явные выражения для коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы.

2. Точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы

Задачу 1 мы будем решать с помощью экстремальной функции, которая удовлетворяет равенству

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\middle|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\psi_\ell\middle|L_2^{(m)}(0,1)\right\|.$$

Для экстремальной функции справедлива

Теорема 1. *Экстремальная функция интерполяционной формулы* (1.1) *в пространстве* $L_2^{(m)}(0,1)$ *определяется формулой*

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x). \tag{2.1}$$

Здесь

$$G_m(x)=\frac{x^{2m-1}\mathrm{sign}(x)}{2(2m-1)!}, \tag{2.2}$$

$P_{m-1}(x)$ *— неизвестный многочлен степени* $m-1$.

Доказательство. Напомним, что пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым и скалярное произведение в нем задается формулой

$$\{\varphi,\psi\}=\int\limits_0^1\varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx. \tag{2.3}$$

Норма функций в $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\|\varphi|L_2^{(m)}\|=\left(\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку функционал ℓ вида (1.3) определен на $L_2^{(m)}(0,1)$, имеем

$$(\ell,x^\alpha)=0 \text{ при } \alpha=0,1,\dots,m-1. \tag{2.4}$$

Теперь, воспользовавшись общим видом линейного функционала в гильбертовом пространстве, представим функционал погрешности (1.3) в виде

$$(\ell,\varphi)=\{\psi_0,\varphi\},\tag{2.5}$$

где $\psi_0\in L_2^{(m)}(0,1)$ называется элементом Рисса. По теореме Рисса имеет место равенство

$$\big\|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\big\|=\big\|\psi_0|L_2^{(m)}(0,1)\big\|.$$

В силу (2.3) и (2.5) получаем справедливое для любой функции $\varphi\in\mathring{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ тождество

$$\int\limits_0^1\frac{d^m\varphi}{dx^m}\frac{d^m\psi_0}{dx^m}dx=(\ell,\varphi).\tag{2.6}$$

Произведя m раз интегрирование по частям в смысле обобщенных функций, в левой части (2.6) получаем

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_0^1 D^m\varphi D^m\psi_0dx=(-1)^m\left(D^{2m}(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)),\varphi(x)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}D^{m-1+j}\psi_0(y)D^{m-j}\varphi(y)\Big|_{y=0}^{y=1}=\left(D^{2m}((-1)^m\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)),\varphi(x)\right)+$$

$$+\left(\sum_{j=1}^m(-1)^{m-1}D^{m-1+j}\psi_0(y)\delta^{(m-j)}(x-y),\varphi(x)\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1},$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1],\end{cases}\quad D^m=\dfrac{d^m}{dx^m}.$

Таким образом, в пространстве обобщенных функций

$$D^{2m}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)\right)=(-1)^m\ell(x)+\sum_{j=1}^m(-1)^{m+j}D^{m-1+j}\psi(y)\delta^{(m-j)}(x-y)\Big|_{y=0}^{y=1}.\tag{2.7}$$

Общее решение уравнения (2.7) записывается в виде

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+\sum_{j=1}^m a_j|x-y|^{2m-j}\Big|_{y=0}^{y=1}+P_{2m-1}(x),\tag{2.8}$$

где $\sum\limits_{j=1}^m a_j|x-y|^{2m-j}\Big|_{y=0}^{y=1}$ — многочлен степени $2m-1$ с переопределенными коэффициентами a_j, соответствующий члену

$$\sum_{j=1}^m D^{m-1+j}\psi_0(y)\delta^{(m-j)}(x-y)\Big|_{y=0}^{y=1},$$

$G_m(x)$ определяется формулой (2.2).

Рассмотрим (2.8) вне отрезка $[0,1]$. Выражение $(-1)^m\ell(x)*G_m(x)$ вне отрезка $[0,1]$ является многочленом степени $m-1$, так как эта функция из $C^\infty(\mathbb{R}\setminus[0,1])$, которая после m кратного дифференцирования обращается в нуль благодаря условию (2.4).

Для выполнения условия

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_0(x)=0 \text{ при } x\notin[0,1]$$

необходимо

$$\sum_{j=1}^{m-1} a_j |x-y|^{2m-1}\Big|_{y=0}^{y=1} + P_{2m-1}(x) = R_{m-1}(x),$$

где $R_{m-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $m-1$.

Итак, для любой интерполяционной формулы вида (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ ее экстремальная функция, т. е. элемент Рисса, дается формулой

$$\psi_\ell(x) = \psi_0(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x).$$

□

Норма функционала $\ell(x)$ и экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ связаны между собой соотношением

$$\left\|\ell \middle| L_2^{(m)}(0,1)\right\|^2 = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(m)}(x)\right)^2 dx. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.1) в (2.9), видим, что квадрат нормы функционала погрешности представляет собой квадратичную функцию его коэффициетов $C_k(z)$:

$$\Psi(C(z)) = \left\|\ell \middle| L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2 =$$
$$= (-1)^m \left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} C_k(z) C_{k'}(z) G_m(x_k - x_{k'}) - 2\sum_{k=0}^{N} C_k(z) G_m(z - x_k) \right), \tag{2.10}$$

где $C(z) = (C_0(z), C_1(z), \ldots, C_N(z))$.

Напомним, что коэффициенты $C_k(z)$ в равенстве (2.10) должны удовлетворять системе линейных уравнений (2.4).

3. Существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы

Сформулируем условия, при которых квадратичная функция $\Psi(C(z))$ достигает минимума на множестве векторов $C(z)$, подчиненных соотношению (2.4). Для этого применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi_1(C(z), \lambda) = \Psi(C(z)) + 2(-1)^m \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (\ell, x^\alpha),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})$.

Приравнивая нулю частные производные от $\Psi_1(C(z), \lambda)$ по $C_k(z)$ и λ_α, получаем

$$\sum_{k'=0}^{N} C_{k'}(z) G_m(x_{k'} - x_k) + P_{m-1}(x_k) = G_m(z - x_k), \quad k = \overline{0, N}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{k'=0}^{N} C_{k'}(z) x_{k'}^\alpha = z^\alpha, \quad \alpha = \overline{0, m-1}. \tag{3.2}$$

Система (3.1), (3.2) называется дискретной системой Винера–Хопфа [1].

Система (3.1), (3.2) имеет единственное решение, которое мы обозначим $\mathring{C}_k(z)$ и $\mathring{\lambda}_\alpha$, и представляет собой стационарную точку функции $\Psi_1(C(z), \lambda)$.

Систему (3.2) можно записать в матричном виде

$$SC(z) = b$$

с матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_N^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Из теории условного экстремума известно достаточное условие, при котором решение системы (3.1), (3.2) дает локальный минимум $\|\ell\|^2$ на многообразии (2.4). Это состоит в положительной определенности следующей квадратичной формы:

$$\Phi(C(z)) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} \frac{\partial^2 \Psi_1(C(z), \lambda)}{\partial C_k(z) \partial C_{k'}(z)} C_k(z) C_{k'}(z) \tag{3.3}$$

на множестве векторов $C(z)$, подчиненных требованию

$$SC(z) = 0. \tag{3.4}$$

В нашем случае это условие выполняется, т. е. справедлива

Лемма 1. *Для любого ненулевого вектора $C(z) = (C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z))$ из $\mathbb{R}^{N+1}$, лежащего в подпространстве $SC(z) = 0$, функция $\Phi\left(C(z)\right)$ строго положительна.*

Доказательство. Вычисляя частные производные от функции $\Psi_1(C(z), \lambda)$ по прееменным $C_k(z)$ из (3.3), имеем

$$\Phi(C(z)) = 2(-1)^m \sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} G_m(x_k - x_{k'}) C_k(z) C_{k'}(z). \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующий функционал, который состоит из линейных комбинаций δ-функций

$$\ell_{C(z)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N} C_k(z) \delta(x - x_k). \tag{3.6}$$

Этот функционал принадлежит сопряженному пространству, т. е. пространству $L_2^{(m)*}(0,1)$, благодаря условию (3.4). Тогда он имеет экстремальную функцию $U_{C(z)}(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$, которая является решением уравнения

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} U_{C(z)}(x) = (-1)^m \ell_{C(z)}(x).$$

Возьмем

$$U_{C(z)}(x) = \sqrt{2}(-1)^m \sum_{k=0}^{N} C_k(z) G_m(x - x_k).$$

Квадрат нормы функции $U_{C(z)}(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ совпадает с функцией $\Phi(C(z))$:

$$\left\| U_{C(z)} \middle| L_2^{(m)}(0,1) \right\|^2 = (\ell_{C(z)}, U_{C(z)}) = 2(-1)^m \sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} G_m(x_k - x_{k'}) C_k(z) C_{k'}(z).$$

Отсюда следует, что для ненулевых векторов $C(z) \in \mathbb{R}^{N+1}$ функция $\Phi(C(z))$, определяемая формулой (3.5), является строго положительной. $\square$

Если узлы x_k интерполяционной формулы (1.1) подобраны так, что матрица S имеет правую обратную, то система (3.1), (3.2) имеет единственное решение.

Лемма 2. *Если матрица S имеет правую обратную, то матрица Q системы* (3.1), (3.2) *невырожденная.*

Доказательство. Однородная система, соответствующая системе (3.1), (3.2), имеет следующий вид:

$$Q\begin{pmatrix} C(z) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & S^* \\ S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(z) \\ \lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{3.7}$$

где G — матрица с элементами $g_{ij} = G_m(x_i - x_j)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, N$, S — матрица с элементами $S_{kp} = x_p^k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $p = 0, 1, \ldots, N$.

Покажем, что система (3.7) имеет единственное решение $C(z) = (0, 0, \ldots, 0)$ и $\lambda = (0, 0, \ldots, 0)$ — это тождественный нуль.

Пусть $C(z), \lambda$ — решение однородной системы (3.7). Воспользуясь формулой (3.6), образуем обобщенную функцию $\ell_{C(z)}(x)$, которая соответствует вектору $C(z)$. Она, очевидно, принадлежит $L_2^{(m)*}(0,1)$. В качестве экстремальной функции для $\ell_{C(z)}(x)$ возьмем функцию

$$U_{C(z)}(x) = \sqrt{2}(-1)^m\left(\sum_{k=0}^{N} C_k(z) G_m(x - x_k) + P_{m-1}(x)\right).$$

Первые $N+1$ уравнений системы (3.7) означают, что $U_{C(z)}(x)$ принимает нулевое значение во всех узлах интерполяции x_k:

$$U_{C(z)}(x_k) = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, N.$$

Тогда для нормы функционала $\ell_{C(z)}(x)$ имеем

$$\left\|\ell_{C(z)}\middle|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2 = \left(\ell_{C(z)}, U_{C(z)}\right) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N} C_k(z) U_{C(z)}(x_k) = 0,$$

что возможно лишь при $C(z) = 0$.

В силу последнего равенства, полученного из первых $N+1$ уравнений системы (3.7), имеем

$$S^*\lambda = 0. \tag{3.8}$$

По условию матрица S имеет правую обратную, но тогда S^* имеет левую обратную. Отсюда и из (3.8) следует $\lambda = 0$. □

Таким образом, система (3.1), (3.2) имеем единственное решение $\mathring{C}_k(z)$, $k = \overline{0, N}$, и $\mathring{\lambda}_i$, $i = \overline{0, m-1}$.

4. Алгоритм решения системы Винера–Хопфа

Пусть узлы x_β интерполяционной формулы (1.1) имеют вид

$$x_\beta = [\beta],$$

где $[\beta] = h\beta$, $h = \dfrac{1}{N}$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$.

Интерполяционная формула с равноостоящими узлами имеет вид

$$\varphi(z) \cong \sum_{\beta=0}^{N} C([\beta], z)\varphi[\beta]. \tag{4.1}$$

Считая $C([\beta],z)=0$ при $\beta h\overline{\in}[0,1]$, систему (3.1), (3.2) перепишем в виде свертки

$$G_m[\beta]*C([\beta],z)+P_{m-1}[\beta]=f[\beta],\ \beta=\overline{0,N}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C([\beta],z)[\beta]^{\alpha}=z^{\alpha},\ \alpha=\overline{0,m-1}. \tag{4.3}$$

Здесь

$$f[\beta]=G_m(z-[\beta]), \tag{4.4}$$

$C([\beta],z)$ — коэффициенты интерполяционной формулы (4.1), $P_{m-1}[\beta]$ — неизвестный полином дискретного аргумента степени $m-1$.

Задача А. *Найти функцию $C([\beta],z)$ и многочлен дискретного аргумента $P_{m-1}[\beta]$ степени $m-1$, удовлетворяющие системе (4.2)–(4.3) при заданных $f[\beta]$ и z^{α}.*

Рассмотрим

$$v[\beta]=G_m[\beta]*C([\beta],z) \tag{4.5}$$

и

$$U[\beta]=v[\beta]+P_{m-1}[\beta]. \tag{4.6}$$

Известно [17], что

$$hD_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta].$$

Здесь

$$D_m[\beta]=\frac{(2m-1)!}{h^{2m}}\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(1-\lambda_k)^{2m+1}\lambda_k^{|\beta|}}{\lambda_k E_{2m-1}(\lambda_k)} & \text{при } |\beta|\geq 2;\\[2ex] \displaystyle 1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(1-\lambda_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(\lambda_k)} & \text{при } |\beta|=1;\\[2ex] \displaystyle -2^{2m-1}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(1-\lambda_k)^{2m+1}}{\lambda_k E_{2m-1}(\lambda_k)} & \text{при } \beta=0\end{cases} \tag{4.7}$$

— дискретный аналог дифференциалного оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, где $E_{2m-1}(\lambda)$ — многочлен Эйлера–Фробениуса степени $2m-1$, λ_k — корни многочлена Эйлера–Фробениуса степени $2m-2$, $|\lambda_k|<1$, h — шаг решетка, а $\delta[\beta]$ — дельта-функция дискретного аргумента, которая равна единице при $\beta=0$ и равна нулю при $\beta\neq 0$.

В силу (4.5) оператор $D_m[\beta]$ позволяет выразить

$$C([\beta],z)=hD_m[\beta]*U[\beta]$$

и преобразовать задачу отыскания $C([\beta],z)$ и $P_{m-1}[\beta]$ в задачу отыскания неизвестной функции $U[\beta]$. Для этого рассмотрим функцию $v[\beta]$. Вычисляя свертку $v[\beta]=G_m[\beta]*C([\beta],z)$ при $\beta\leq 0$ и $\beta\geq N$ и учитывая (4.3), получаем

$$v[\beta]=G_m[\beta]*C([\beta],z)=\begin{cases}-Q^{(2m-1)}[\beta]-Q_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\leq 0;\\ Q^{(2m-1)}[\beta]+Q_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\geq N,\end{cases}$$

где

$$Q^{(2m-1)}[\beta]=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{(-1)^{\alpha}[\beta]^{2m-1-\alpha}}{2\alpha!(2m-1-\alpha)!}z^{\alpha}, \tag{4.8}$$

$$Q_{m-1}[\beta]=\sum_{\alpha=m}^{2m-1}\frac{(-1)^{\alpha}[\beta]^{2m-\alpha-1}}{2\alpha!(2m-\alpha-1)!}\sum_{\gamma=0}^{N}C([\gamma],z)[\gamma]^{\alpha}.$$

В силу (4.6) вне отрезка $[0,1]$ функция

$$U[\beta]=\begin{cases}-Q^{(2m-1)}[\beta]-Q_{m-1}[\beta]+P_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\le 0;\\ Q^{(2m-1)}[\beta]+Q_{m-1}[\beta]+P_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\ge N.\end{cases}$$

Обозначим

$$Q^{(-)}_{m-1}[\beta] = P_{m-1}[\beta]-Q_{m-1}[\beta], \tag{4.9}$$

$$Q^{(+)}_{m-1}[\beta] = P_{m-1}[\beta]+Q_{m-1}[\beta]. \tag{4.10}$$

После этих обозначений функция

$$U[\beta]=\begin{cases}-Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(-)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\le 0;\\ Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(+)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\ge N.\end{cases} \tag{4.11}$$

Из (4.9) и (4.10) следует

$$P_{m-1}[\beta] = \frac{1}{2}\left(Q^{(-)}_{m-1}[\beta]+Q^{(+)}_{m-1}[\beta]\right),$$

$$Q_{m-1}[\beta] = \frac{1}{2}\left(Q^{(-)}_{m-1}[\beta]-Q^{(+)}_{m-1}[\beta]\right).$$

В силу (4.2), (4.6) и (4.11) получим

$$U[\beta]=\begin{cases}-Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(-)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\le 0;\\ f[\beta] & \text{при } 0\le\beta\le N;\\ Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(+)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\ge N,\end{cases}$$

где многочлены дискретного аргумента $Q^{(2m-1)}[\beta]$ степени $2m-1$ задаются формулой (4.8), функция $f[\beta]$ задана в (4.4), а многочлены дискретных аргументов $Q^{(-)}_{m-1}[\beta]$ и $Q^{(+)}_{m-1}[\beta]$ — неизвестные многочлены степени $m-1$.

Итак, мы получаем следующую задачу.

Задача B. Найти решение уравнения

$$D_m[\beta]*U[\beta]=0 \text{ при } [\beta]\overline{\in}[0,1], \tag{4.12}$$

имеющее вид

$$U[\beta]=\begin{cases}-Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(-)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\le 0;\\ f[\beta] & \text{при } 0\le\beta\le N;\\ Q^{(2m-1)}[\beta]+Q^{(+)}_{m-1}[\beta] & \text{при } \beta\ge N,\end{cases}$$

где $Q^{(-)}_{m-1}[\beta], Q^{(+)}_{m-1}[\beta]$ — неизвестные, а $Q^{(2m-1)}[\beta]$ и $f[\beta]$ — известные многочлены.

Если задача B решена, т. е. найдены $Q^{(-)}_{m-1}[\beta]$ и $Q^{(+)}_{m-1}[\beta]$, то неизвестные $C([\beta],z)$, $P_{m-1}[\beta]$ определяются формулами:

$$C([\beta],z)=hD_m[\beta]*U[\beta], \tag{4.13}$$

$$P_{m-1}[\beta]=\frac{1}{2}\left(Q^{(-)}_{m-1}[\beta]+Q^{(+)}_{m-1}[\beta]\right).$$

Справедлива

Теорема 2. *В пространстве Соболева* $L_2^{(m)}(0,1)$ *существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида*

$$\varphi(z) \cong \sum_{\beta=0}^{N} \mathring{C}([\beta],z)\varphi[\beta],$$

коэффициенты которой определяются формулами

$$\mathring{C}([0],z) = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[\gamma]f[\gamma] + \sum_{k=1}^{m-1}(A_k+B_k) + \frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\left(-Q^{(2m-1)}[-1] + Q_{m-1}^{(-)}[-1]\right),$$

$$\mathring{C}([\beta],z) = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[\beta-\gamma]f[\gamma] + \sum_{k=1}^{m-1}\left(A_k\lambda_k^{\beta} + B_k\lambda_k^{-\beta}\right), \quad \beta = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\mathring{C}([N],z) = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[N-\gamma]f[\gamma] + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\lambda_k^{N}A_k + \lambda_k^{-N}B_k\right) + \frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\left(Q^{(2m-1)}[N+1] + Q_{m-1}^{(+)}[N+1]\right).$$

Здесь λ_k *— корни многочлена Эйлера–Фробениуса степени* $2m-2$ *по модулю меньше единицы, т. е.* $|\lambda_k|<1$, $f[\gamma]$, $D_m[\beta]$, $Q^{(2m-1)}[\gamma]$, A_k *и* B_k *определяются формулами* (4.4), (4.7), (4.8), (4.14), (4.15); $Q_{m-1}^{(-)}[\gamma]$, $Q_{m-1}^{(+)}[\gamma]$ *определяются из системы* (4.12).

Доказательство. Перейдем к вычислению свертки в формуле (4.13). Для этого воспользуемся выражением функции $U[\beta]$, определяемой (4.8) и дискретным аналогом дифференциального оператора $2m$-го порядка (4.4):

$$C([\beta],z) = hD_m[\beta]*U[\beta] = h\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_m[\beta-\gamma]U[\gamma] = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[\beta-\gamma]f[\gamma] +$$

$$+h\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_m[\beta-\gamma]\left(-Q^{(2m-1)}[\gamma] + Q_{m-1}^{(-)}[\gamma]\right) + h\sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_m[\beta-\gamma]\left(Q^{(2m-1)}[\gamma] + Q_{m-1}^{(+)}[\gamma]\right). \tag{4.14}$$

Пусть $\beta = 1,2,\dots,N-1$, тогда для коэффициентов интерполяционной формулы (4.1) имеем

$$C([\beta],z) = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[\beta-\gamma]f[\gamma] + \sum_{k=1}^{m-1}\left(A_k\lambda_k^{\beta} + B_k\lambda_k^{-\beta}\right).$$

Здесь

$$A_k = \frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\cdot\frac{(1-\lambda_k)^{2m+1}}{\lambda_k E_{2m-1}(\lambda_k)}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\lambda_k^{\gamma}\left(-Q^{(2m-1)}[-\gamma] + Q_{m-1}^{(-)}[-\gamma]\right),$$

$$B_k = \frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\cdot\frac{(1-\lambda_k)^{2m+1}}{\lambda_k E_{2m-1}(\lambda_k)}\sum_{\gamma=N+1}^{\infty}\lambda_k^{\gamma}\left(Q^{(2m-1)}[\gamma] + Q_{m-1}^{(+)}[\gamma]\right).$$

Из (4.14) при $\beta=0$ и $\beta=N$ получаем

$$C([0],z) = h\sum_{\gamma=0}^{N} D_m[\gamma]f[\gamma] + \sum_{k=1}^{m-1}(A_k+B_k) + \frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\left(-Q^{(2m-1)}[-1] + Q_{m-1}^{(-)}[-1]\right),$$

$$C([N],z)=h\sum_{\gamma=0}^{N}D_m[N-\gamma]f[\gamma]+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\lambda_k^N A_k+\lambda_k^{-N}B_k\Big)+\frac{(2m-1)!}{h^{2m-1}}\Big(Q^{(2m-1)}[N+1]+Q_{m-1}^{(+)}[N+1]\Big).$$

□

В частности, из теоремы 2 получается

Теорема 3. *В пространстве Соболева* $L_2^{(1)}(0,1)$ *существует единственная интерполяционная формула вида*

$$\varphi(z)\cong\sum_{\beta=0}^{N}\mathring{C}([\beta],z)\varphi[\beta],$$

коэффициенты которой выражаются формулами

$$\mathring{C}([0],z)=\frac{1}{2h}\left(h-z+|h-z|\right),$$
$$\mathring{C}([\beta],z)=\frac{1}{2h}\left(|z-h(\beta-1)|-2|z-h\beta|+|z-h(\beta+1)|\right),\quad \beta=1,2,\dots,N-1,$$
$$\mathring{C}([N],z)=\frac{1}{2h}\left(z+h-1+|z+h-1|\right).$$

Доказательство следует из доказательства теоремы 2 при $m=1$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе построена оптимальная интерполяционная формула в пространстве Соболева. Для этого с помощью экстремальной функции получена точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы, которая выражается нормой функционала погрешности. Далее, минимизируя нормы функционала погрешности интерполяционной формулы по коэффициентам, получена система Винера–Хопфа. Приведен алгоритм нахождения коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы. Применяя этот алгоритм, получены аналитические выражения оптимальных коэффициентов.

Литература

[1] Соболев С.Л. *О задаче интерполирования функций n переменных*, ДАН СССР **137** (4), 778–781 (1961).
[2] Holladay J.C. *Smoothest curve approximation*, Math. Tables Aids Comput. **11**, 223–243 (1957).
[3] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения* (Мир, М., 1972).
[4] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике* (Наука, М., 1976).
[5] Лоран П.Ж. *Аппроксимация и оптимизация* (Мир, М., 1975).
[6] Василенко В.А. *Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы* (Наука, Новосибирск, 1983).
[7] Игнатов М.И., Певный А.Б. *Натуральные сплайны многих переменных* (Наука, Л., 1991).
[8] Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* (Наука, М., 1987).
[9] Маматова Н.Х., Хаётов А.Р., Шадиметов Х.М. *Построение решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева* $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ *периодических функций n переменных методом Соболева*, Уфимск. матем. журн. **5** (1), 90–101 (2013).
[10] Cabada A., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. *Construction of* D^m*-splines in* $L_2^{(m)}(0,1)$ *space by Sobolev method*, Appl. Math. and Comput. **244**, 542–551 (2014).
[11] Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. *Interpolation splines minimizing a semi-norm*, Calcolo **51** (2), 245–260 (2014).
[12] Hayotov A.R. *Construction of Interpolation Splines Minimizing the Semi-norm in the Space* $K_2(P_m)$, J. Siberian Federal Univ. Math. and Phys. **11** (3), 383–396 (2018).
[13] Babaev S.S., Hayotov A.R. *Optimal interpolation formulas in the space* $W_2^{(m,m-1)}$, Calcolo **56**, 23 (2019).

[14] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. *Construction of optimal interpolation formulas in the Sobolev space*, J. Math. Sci. **264**, 782–793 (2022).

[15] Даутов Р.З. *Точная оценка погрешности наилучшего приближения алгебраическими полиномами в весовом* $L_2(-1,1)$, Изв. вузов. Матем. (5), 61–63 (2013).

[16] Даутов Р.З. *Прямые и обратные теоремы аппроксимации функций алгебраическими полиномами и сплайнами в нормах пространства Соболева*, Изв. вузов. Матем. (6), 79–86 (2022).

[17] Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог оператора* d^{2m}/dx^{2m} *и его построение*, Вопр. вычисл. и прикл. матем. **79**, 22–35 (1985).

Халматвай Махкамбаевич Шадиметов

Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
ул. Адылходжаева, д. 1, г. Ташкент, 100167, Республика Узбекистан;
Институт математики имени В.И.Романовского,
ул. Университет, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Нилуфар Хусеновна Маматова

Бухарский Государственный Университет,
ул. Мухаммад Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан;
Институт математики имени В.И.Романовского,
ул. Университет, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: nilufar.mamatova.76@mail.ru

Kh.M. Shadimetov and N.H. Mamatova

On the problem of optimal interpolation of functions

Abstract. In this work, the problem of constructing optimal interpolation formulas is discussed. Here, first, an exact upper bound for the error of the interpolation formula in the Sobolev space is calculated. The existence and uniqueness of the optimal interpolation formula, which gives the smallest error, are proved. An algorithm for finding the coefficients of the optimal interpolation formula is given. By implementing this algorithm, the optimal coefficients are found.

Keywords: Sobolev space, extremal function, composite lattice optimal cubature formulas, error functional.

Khalmatvay Makhkambaevich Shadimetov

Tashkent State Transport University,
1 Odilkhodjaev str., Tashkent, 100167 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Nilufar Husenovna Mamatova

Bukhara State University,
11 Muhammad Ikbol str., Bukhara 200118 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: nilufar.mamatova.76@mail.ru