Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №11, с. 59–74 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Х.М. ШАДИМЕТОВ, Н.Х. МАМАТОВА

СОСТАВНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. В настоящей работе вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. Кроме того, явно вычислен квадрат нормы функционала погрешности построенных решетчатых оптимальных кубатурных формул в сопряженном пространстве Соболева.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы, функционал погрешности.

УДК: 519.644

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-11-59-74

Введение

В различных разделах математики и ее приложений широко применяются квадратурные и кубатурные формулы. При получении дискретной аппроксимации (кубатурной формулы) важную роль играет общее требование, чтобы кубатурная формула как можно лучше приближалась к заданным определенным интегралам. Такие кубатурные формулы можно получить, например, при помощи вариационных принципов. Поэтому построение по вариационным методам решетчатых оптимальных кубатурных формул в пространстве Соболева является одной из актуальных задач вычислительной математики. Пусть $x-$вектор из $\mathbb{R}^n, \gamma$ — вектор из $\mathbb{Z}^n$, т. е. γ имеет n целочисленных координат. Для положительного числа h и матрицы H с единичным определителем образуем множество векторов $\{hH\gamma \; |\gamma \in \mathbb{Z}^n\}$. Это множество принято называть точечной геометрической решеткой в $\mathbb{R}^n$. Пусть также имеется функция $\varphi(x)$, непрерывная в измеримой области Ω из $\mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать формулы приближенного интегрирования, или кубатурные формулы вида

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{hH\beta\in\Omega} \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|\leq\sigma}} C_\alpha[\beta] D^\alpha \varphi(hH\beta). \tag{1}$$

Значения функции дискретной переменной $\left\{C_\alpha[\beta] \; |\beta \in \mathbb{Z}^n, hH\beta \in \bar{\Omega}\right\}$ называют коэффициентами кубатурной формулы, точки $hH\beta$ из $\bar{\Omega}$ — ее узлами, а параметр h — шагом решетки интегрирования, $p(x)$ — весовая функция, σ — целое положительное число, буквой α будем обозначать векторы вида $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_i — целые неотрицательные числа, $i = \overline{1, n}$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

Определение. Семейство кубатурных формул вида (1) называется составными кубатурными формулами на решетке.

Функционал погрешности кубатурной формулы (1) определяется как обобщенная функция, действующая по формуле

$$(\ell,\varphi) = \int\limits_{\Omega}\left(p(x)-\sum_{hH\beta\in\Omega}\sum_{\substack{\alpha\\|\alpha|\le\sigma}}C_\alpha[\beta](-1)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(x-hH\beta)\right)\varphi(x)dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega}p(x)\varphi(x)dx-\sum_{hH\beta\in\Omega}\sum_{\substack{\alpha\\|\alpha|\le\sigma}}C_\alpha[\beta]D^\alpha\varphi(hH\beta). \tag{2}$$

Ясно, что задание функционала погрешности $\ell(x)$ однозначно определяет формулу (1) и обратно. Поэтому в дальнейшем будем иметь дело в основном с функционалом погрешности. Нас будут интересовать свойства кубатурной формулы (1) на пространствах Соболева $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{L}_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

Напомним определения этих пространств [1], [2].

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на всем $\mathbb{R}^n$ и имеет локально суммируемые производные до порядка m включительно с полунормой

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)\| = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\varphi(x))^2dx\right]^{\frac12} < \infty. \tag{3}$$

Суммирование проводится по мультииндексам $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ с целочисленными координатами, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!$ и $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$.

Элементами пространства $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ служат классы функций, отличающихся друг от друга на полином степени меньше m и имеющих конечный интеграл (3). Выражение (3), очевидно, задает в $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ полунорму, по которой это пространство полно. Для того чтобы функционал погрешности был определен в $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ необходимо выполнение условий

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < m.$$

Если к тому же $2m > n$, т. е. выполнено условие первой теоремы вложения [3], то $\ell(x)$ ограничен в $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично определяется пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$, полунорма в котором задается равенством

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left[\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left(D^\alpha\varphi(x)\right)^2dx\right]^{\frac12}. \tag{4}$$

Пространство Соболева периодических функций определяется следующим образом. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет в $\mathbb{R}^n$ локально суммируемые производные до порядка m, причем для любой ограниченной области Ω конечен интеграл (4). Предположим, $2m > n$, а функция $\varphi(x)$ периодична с матрицей периодов H, т. е.

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x)$$

для любого x из $\mathbb{R}^n$, где γ — произвольный целочисленный вектор-столбец. Матрице H сопоставлен ее фундаментальный параллелепипед Ω_0, положив

$$\Omega_0 = \Big\{ x \in R^n : x = Hy, 0 \le y_i < 1, j = \overline{1,n} \Big\}.$$

Элементами пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ служат классы функций, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое. Полунорма в $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ имеет вид

$$\big\|\varphi\big|\widetilde{L}_2^{(m)}(H)\big\| = \left[\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^\alpha \varphi(x)\right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ полное. Теперь сопоставим функционалу погрешности (2) число

$$\big\|\ell\big|L_2^{(m)*}\big\| = \sup_{\|\varphi\|\neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\big\|\varphi\big|L_2^{(m)}\big\|}. \qquad (5)$$

Качество формулы (1) будет тем лучшее, чем меньше величина (5).

В работе С.Л. Соболева [1] рассмотрена задача приближенного вычисления интегралов периодических функций из пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Также рассмотрено построение оптимальных решетчатых кубатурных формул вида

$$\int\limits_{\Omega_0} p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{hH\beta\in\Omega_0} C[\beta]\varphi[\beta] \qquad (6)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = p(x)\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\beta\in\Omega_0} C[\beta]\delta(x - hH\beta).$$

Здесь $\varphi(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, $p(x)$ — весовая функция, $\chi_{\Omega_0}(x)$ — индикатор области Ω_0, h — шаг решетки.

Там же показано, что на пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ периодических функций, норма в котором инварианта относительно узлов, есть функционал погрешности с равными коэффициентами

$$\ell(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\beta\in\Omega_0} \mathring{C}[\beta]\delta(x - hH\beta).$$

В работах М.Д. Рамазанова [3], [4] построены оптимальные кубатурные формулы вида (6). Автор рассматривает пространства функций W_2^μ, которые получаются пополнением конечных рядов Фурье $f(x) = \sum\limits_k f_k e^{2\pi i k x}$ в норме:

$$\big\|f\big|W_2^\mu\big\| = \Big| \sum_k |f_k \mu(2\pi i k)|^2 \Big|^{\frac{1}{2}}.$$

В работах М.Д. Рамазанова, Х.М. Шадиметова [4], [5] построены весовые оптимальные кубатурные формулы вида (6) на пространстве Соболева $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Кроме того, в [6] построена оптимальная кубатурная формула типа Эйлера–Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

В работах Б.Г. Габдулхаева [7]–[10] предлагается общий проекционный метод решения сингулярных интегральных управлений и дается его теоретическое обоснование на основе теории положительно определенных операторов в гильбертовых пространствах.

В настоящей работе мы будем заниматься построением составных решетчатых оптимальных кубатурных формул в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Задача по построению кубатурной формулы вида (1) в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала (2), норма которого в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$ минимальна. В следующих разделах этой работы приводятся основные результаты, экстремальная функция кубатурной формулы, т. е. функция на которой функционал погрешности кубатурной формулы достигает своего наибольшего значения в построение $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, норма функционала погрешности кубатурных формул, система линейных алгебраических уравнений для определения оптимальных коэффициентов кубатурных формул, оптимальные коэффициенты составных кубатурных формул в $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, квадрат нормы функционала погрешности решетчатых оптимальных кубатурных формул.

1. Основные результаты

Рассмотрим составную кубатурную формулу

$$\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} \Big(C_k \varphi\big(x^{(k)}\big) + C_k^{(\prime)} D\varphi\big(x^{(k)}\big)\Big), \tag{7}$$

где точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k, C_k^{(\prime)}$ называют соответственно узлами и коэффициентами кубатурной формулы, $D = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial x_n}$.

Разность

$$\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \Big(C_k \varphi\big(x^{(k)}\big) + C_k^{(\prime)} D\varphi\big(x^{(k)}\big)\Big)$$

называется погрешностью кубатурной формулы (7).

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(\ell,\varphi) &= \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \Big(C_k \varphi\big(x^{(k)}\big) + C_k^{(\prime)} D\varphi\big(x^{(k)}\big)\Big) = \\ &= \int\limits_{\Omega_0} \left[\left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N}\Big(C_k\delta\big(x-x^{(k)}\big) - C_k^{(\prime)}\delta'\big(x-x^{(k)}\big)\Big)\right) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right]\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

где

$$\chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при } x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

$\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака,

$$\Phi_0\big(H^{-1}x\big) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

β_i−целые числа, т. е. $\beta_i \in \mathbb{Z}$,

$$\ell(x) = \left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N}\Big(C_k\delta\big(x-x^{(k)}\big) - C_k^{(\prime)}\delta'\big(x-x^{(k)}\big)\Big)\right) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big) \tag{8}$$

— функционал погрешности кубатурной формулы (7), $\delta'\big(x-x^{(k)}\big) = D\delta\big(x-x^{(k)}\big)$.

Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$ состоит из всех периодических функционалов (3), которые ортогональны единице:

$$(\ell, 1) = 0. \tag{9}$$

Неизвестными параметрами кубатурной формулы (7) являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k, C_k^{(\prime)}$.

Оптимальной кубатурной формулой называют такую кубатурную формулу, погрешность которой при заданном числе узлов N имеет наименьшую норму в $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т. е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$, то такую кубатурную формулу называют решетчатой. Здесь h — малый положительный параметр, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n}$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Экстремальная функция функционала погрешности ℓ, определяемая формулой (8) в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, имеет вид*

$$\psi_\ell(x) = -\sum_{k=1}^{N} \Big(C_k B_{2m}\big(x - x^{(k)}\big) - C_k^{(\prime)} B'_{2m}\big(x - x^{(k)}\big) \Big) - d_0. \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{2m}\big(x - x^{(k)}\big) &= \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}, \\ B'_{2m}\big(x - x^{(k)}\big) &= -\sum_{\beta \neq 0} \frac{2\pi i H^{*-1}\beta e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}, \end{aligned}$$

d_0 — неизвестная, β — вектор-столбец с компонентами β_i, β_i — целые числа, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2. *Пусть функционал погрешности ℓ определен на пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, т. е. его значение для константы равно нулю: $(\ell, 1) = 0$, и оптимален, т. е. среди всех функционалов вида (8) в заданной системе узлов он имеет наименьшую норму в $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$. Тогда существует экстремальная функция ψ_ℓ, которая принадлежит $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, а сама функция $\psi_\ell(x)$ и ее первые производные $\psi'_\ell(x)$ обращаются в нуль в точках $x^{(k)}$.*

Теорема 3. *Оптимальные коэффициенты кубатурных формул вида (7) в пространстве периодических функций $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ имеют вид*

$$\mathring{C}[\gamma] = h^n, \quad \mathring{C}^{(\prime)}[\gamma] = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad hH\gamma \in \Omega_0.$$

Теорема 4. *Норма функционала погрешности $\ell(x)$ решетчатых оптимальных кубатурных формул вида (7) в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ имеет вид*

$$\big\| \ell | \widetilde{L}_2^{(m)*}(H) \big\|^2 = \frac{h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{|H^{*-1}\gamma|^{2m}}.$$

В основном решетчатыми кубатурными и квадратурными формулами занимались С.Л. Соболев и его ученики [2]–[6], [11]–[22].

2. Экстремальная функция составной кубатурной формулы

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности ℓ в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$ будем использовать понятие его экстремальной функции [1].

Функцию ψ_ℓ из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ называют экстремальной для данного функционала погрешности ℓ, если выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\right\|\left\|\psi_\ell|\widetilde{L}_2^{(m)}(H)\right\|.$$

Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ гильбертово, скалярное произведение в нем задается формулой

$$(\varphi, \psi)_m = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi(x) dx.$$

По теореме Рисса любой линейный непрерывный функционал ℓ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(\ell, \varphi) = (\psi_\ell, \varphi)_m \tag{11}$$

для любого φ из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Здесь ψ_ℓ — функция из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, определенная однозначно по функционалу ℓ и является экстремальной для него. Кроме того, ψ_ℓ является элементом Рисса и имеет место равенство

$$\left\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\right\| = \left\|\psi_\ell|\widetilde{L}_2^{(m)}(H)\right\|.$$

Интегрируя по частям выражение в правой части формулы (11) и пользуясь периодичностью функций φ и ψ_ℓ, получаем

$$(\ell, \varphi) = (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \Big(\Delta^m \psi_\ell(x)\Big) \varphi(x) dx.$$

Таким образом, функция ψ_ℓ является обобщенным решением полигармонического уравнения

$$\Delta^m \psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x), \tag{12}$$

где

$$\Delta^m = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^m.$$

Доказательство теоремы 1. Найдем периодическое решение уравнения (12). Для этого воспользуемся известными формулами преобразования Фурье [1].

Введем обозначения

$$\Phi_0(H^{-1}x) = \sum_\beta \delta(x - H\beta).$$

Преобразование Фурье этой функции есть

$$F\left[\Phi_0(H^{-1}x)\right] = \sum_{\beta \neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big) = \Phi_0(H^* p). \tag{13}$$

Кроме того,

$$\chi_{\Omega_0}(x) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big) = \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(x - H\beta) = 1, \tag{14}$$

где $\varepsilon_{\Omega_0}(x)$ — характеристическая функция фундаментальной области Ω_0,

$$F[\Delta^m] = F\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^m\right] = \left[\sum_{j=1}^{n}(2\pi i p_j)^2\right]^m. \tag{15}$$

Применяя к обеим сторонам (12) преобразование Фурье, получаем

$$F\left[\Delta^m\psi_\ell(x)\right] = (-1)^m F\left[\left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k\delta\big(x-x^{(k)}\big) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)}\delta'\big(x-x^{(k)}\big)\right) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right]. \tag{16}$$

Так как преобразование Фурье является линейным, в формуле (15) к каждому слагаемому в отдельности применяем преобразование Фурье. Пользуясь преобразованием Фурье производных, имеем

$$F[\Delta^m\psi_\ell(x)] = \left[\sum_{j=1}^{n}(2\pi i p_j)^2\right]^m F[\psi_\ell(x)]. \tag{17}$$

Учитывая (14) и пользуясь фундаментальностью области Ω_0, нетрудно видеть, что

$$F\left[\chi_{\Omega_0}(x) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right] = \delta(p). \tag{18}$$

Теперь вычислим преобразование Фурье свертки

$$F\left[\sum_{k=1}^{N} C_k\ \delta\big(x-x^{(k)}\big) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right] = \sum_{k=1}^{N} C_k F\left[\delta\big(x-x^{(k)}\big)\right] F\left[\Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right]. \tag{19}$$

Известно, что

$$F\big[\delta\big(x-x^{(k)}\big)\big] \ = \ e^{2\pi i p^* x^{(k)}}.$$

Пользуясь этой известной формулой и равенством (13) выражение (19) приводим к виду

$$F\left[\sum_{k=1}^{N} C_k\delta\ \big(x-x^{(k)}\big) * \Phi_0(H^{-1}x)\right] = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\Phi_0(H^*p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\left(\delta(p) + \sum_{\beta\neq 0}\delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\delta(p) + \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\sum_{\beta\neq 0}\delta\big(p - H^{*-1}\beta\big).$$

Пользуясь формулой (9) и свойством дельта-функции Дирака, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\delta(p) = \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(p) = \delta(p).$$

Тогда из предыдущего выражения имеем

$$F\left[\sum_{k=1}^{N} C_k\delta\ \big(x-x^{(k)}\big) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right] = \delta(p) + \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}}\sum_{\beta\neq 0}\delta\big(p - H^{*-1}\beta\big). \tag{20}$$

Теперь переходим к вычислению преобразования Фурье следующей свертки:

$$F\left[\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \delta'\left(x-x^{(k)}\right) * \Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right] = \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} F\left[\delta'\big(x-x^{(k)}\big)\right] F\left[\Phi_0\big(H^{-1}x\big)\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \Phi_0(H^* p) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \left(\delta(p) + \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \delta(p) - \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big). \tag{21}$$

В силу (17), (18), (20), (21) формулу (16) приводим к виду

$$\left[\sum_{j=1}^{n} (2\pi i p_j)^2\right]^m F\left[\psi_\ell(x)\right] = (-1)^m \Bigg[\delta(p) - \delta(p) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta(p - H^{*-1}\beta) - \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)\Bigg] =$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)\right].$$

Итак, (16) принимает вид

$$\left[\sum_{j=1}^{n} (2\pi i p_j)^2\right]^m F\left[\psi_\ell(x)\right] = (-1)^{m+1} \Bigg[\sum_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum_{\beta\neq 0} \delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)\Bigg]. \tag{22}$$

Из формулы (22) сразу следует, что ее правая часть равна нулю в окрестности начала координат. Поэтому можно выполнить деление обеих частей формулы на

$$\left[\sum_{j=1}^{n} (2\pi i p_j)^2\right]^m.$$

Это деление будет неоднозначным. Функция $F[\psi_\ell(x)]$ определяется из уравнения (20) с точностью до слагаемого вида [1]

$$-d_0\delta(p) + \sum_{0<|\alpha|<2m} d_\alpha D^{(\alpha)}(p),$$

т. е. до линейной комбинации $\delta(p)$ и $D^{(\alpha)}(p)$. Так как $F[\psi_\ell(x)]$ должна быть боронообразной, то слагаемые, кроме $(-1)d_0\delta(p)$, должны быть отброшены. Тогда имеем

$$F\left[\psi_\ell(x)\right] = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} C_k e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum\limits_{\beta\neq 0} \delta(p - H^{*-1}\beta)}{(2\pi)^{2m}\left[\sum\limits_{j=1}^{2}(p_j)^2\right]^{2m}} -$$

$$-\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} (2\pi i p^*) e^{2\pi i p^* x^{(k)}} \sum\limits_{\beta\neq 0} \delta(p - H^{*-1}\beta)}{(2\pi)^{2m}\left[\sum\limits_{j=1}^{2}(p_j)^2\right]^{m}} - d_0\delta(p).$$

Отсюда пользуемся свойством дельта-функции, т. е. для любой непрерывной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a).$$

В силу этого получаем

$$F\left[\psi_\ell(x)\right] = -\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}}\delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)}{(2\pi)^{2m}|H^{*-1}\beta|^{2m}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big) e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}}\delta\big(p - H^{*-1}\beta\big)}{(2\pi)^{2m}|H^{*-1}\beta|^{2m}} - d_0\delta(p). \tag{23}$$

Теперь применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (23), окончательно имеем

$$\psi_\ell(x) = -\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}} e^{-2\pi i H^{*-1}\beta x}}{(2\pi)^{2m}|H^{*-1}\beta|^{2m}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big) e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}} e^{-2\pi i H^{*-1}\beta x}}{(2\pi)^{2m}|H^{*-1}\beta|^{2m}} - d_0 =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N}\Big(C_k B_{2m}\big(x - x^{(k)}\big) - C_k^{(\prime)} B'_{2m}\big(x - x^{(k)}\big)\Big) - d_0.$$

Теорема 1 доказана полностью. □

3. Норма функционала погрешности составных кубатурных формул

Норма кубатурной формулы вида (7) выражается билинейной формой от коэффициентов кубатурной формулы и значений экстремальной функции, определяемой формулой (12). Поскольку пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(\Omega_0)$ гильбертово, то квадрат нормы функционала погрешности ℓ и экстремальная функция ψ_ℓ связаны между собой соотношением

$$\left\|\ell\middle|\widetilde{L}_2^{(m)*}\right\|^2 = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\psi_\ell(x))^2dx = (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} (\Delta^m\psi_\ell(x))\psi_\ell(x)dx.$$

Так как
$$\Delta^m \psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x)$$
и, значит,
$$\big\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}\big\|^2 = (\ell, \psi_\ell),$$
то
$$\big\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}\big\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = \int\limits_{\Omega_0} \ell(x)\psi_\ell(x)dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} \left[\left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k'=1}^{N}\Big(C_{k'}\delta\big(x-x^{(k')}\big) - C_{k'}^{(\prime)}\delta'\big(x-x^{(k')}\big)\Big)\right) * \Phi_0(H^{-1}x)\right]\times$$
$$\times\left[-\sum_{k=1}^{N}\left(C_k\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} + C_k^{(\prime)}\sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big)e^{2\pi i H^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}\right) - d_0\right]dx =$$
$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}\int\limits_{\Omega_0} e^{-2\pi i H^{*-1}\beta x}dx -$$
$$-\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big)e^{2\pi i H^{*-1}\beta x^{(k)}}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}\int\limits_{\Omega_0} e^{-2\pi i H^{*-1}\beta x}dx +$$
$$+\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} +$$
$$+\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big)e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -$$
$$-\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)}\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big)e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -$$
$$-\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)}\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i H^{*-1}\beta\big)^2 e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}. \tag{24}$$
Интеграл от функции $e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}$ по основному параллелепипеду Ω_0 равен нулю, т. е.
$$\int\limits_{\Omega_0} e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}dx = 0, \tag{25}$$
так как в этом параллелепипеде $y = H^{-1}x$ изменяется в кубе $0 \leq y_i < 1$, а функции
$$e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x} = e^{2\pi i\beta^* y}$$
имеют среднее значение по этому кубу, равное нулю.

Нетрудно видеть, что
$$\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0}\frac{\big(2\pi i\beta^* H^{-1}\big)e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} =$$

$$
= -\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)} \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi i\beta^* H^{-1}\right) e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}. \tag{26}
$$

В левой части (26) меняем местами k и k', и, кроме того, так как β меняется от $-\infty$ до $+\infty$, это означает, что $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, каждое β_i меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Заменяем β на $-\beta$ и получаем равенство (26).

Учитывая (25) и (26), квадрат нормы (24) приводим к виду

$$
\left\| \ell \,\middle|\, L_2^{(m)*} \right\|^2 = \sum_{k'=1}^{N} C_{k'} \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -
$$

$$
-2\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)} \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi i\beta^* H^{-1}\right) e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} +
$$

$$
+\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)} \sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi \beta^* H^{-1}\right)^2 e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}. \tag{27}
$$

4. Система линейных алгебраических уравнений для определения оптимальных коэффициентов составных кубатурных формул

Для нахождения минимума квадрата нормы (27) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составляем функцию Лагранжа

$$
\Psi(C, C^{(\prime)}, \lambda) = \|\ell\|^2 + 2\lambda(\ell, 1),
$$

где $C = (C_1, \ldots, C_N)$, $C^{(\prime)} = \left(C_1^{(\prime)}, \ldots, C_N^{(\prime)}\right)$.

Приравнивая к нулю все частные производные по $C_k, C_k^{(\prime)}$ и λ от функции $\Psi(C, C^{(\prime)}, \lambda)$, получаем

$$
\frac{\partial \Psi\left(C, C^{(\prime)}, \lambda\right)}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}; \quad \frac{\partial \Psi\left(C, C^{(\prime)}, \lambda\right)}{\partial C_k^{(\prime)}} = 0, \quad k = \overline{1, N};
$$

$$
\frac{\partial \Psi\left(C, C^{(\prime)}, \lambda\right)}{\partial \lambda} = 0.
$$

Эти равенства дают систему уравнений

$$
\sum_{k=1}^{N} C_{k'} \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -
$$

$$
-\sum_{k'=1}^{N} C_{k'}^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi i\beta^* H^{-1}\right) e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} + \lambda = 0, \quad k = \overline{1, N}; \tag{28}
$$

$$
\sum_{k'=1}^{N} C_{k'} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi i\beta^* H^{-1}\right) e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -
$$

$$
-\sum_{k=1}^{N} C_k^{(\prime)} \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi i\beta^* H^{-1}\right)^2 e^{-2\pi i\beta^* H^{-1}(x^{(k')}-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} = 0, \quad k' = \overline{1, N}, \tag{29}
$$

$$\sum_{k=1}^{N} C_k = 1. \tag{30}$$

Решение системы (28)–(30) обозначаем через точку $(\mathring{C}_k, \mathring{C}_k^{(\prime)}, \mathring{\lambda},)$, которая является стационарной точкой для функции $\Psi\big(C, C^{(\prime)}, \lambda\big)$.

Из теории метода неопределенных множителей Лагранжа следует, что $\mathring{C}_k$ и $\mathring{C}_k^{(\prime)}$ будут искомыми значениями коэффициентов составной кубатурной формулы. Они дают условный минимум квадрату нормы $\big\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}\big\|^2$, заданной формулой (27), при соблюдении условия (9).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим формулу (10) для общего решения уравнения (12). Выбираем в ней постоянный d_0 так, чтобы он был равен $\mathring{\lambda}$, где $\mathring{\lambda}$ — найденное нами значение множителя Лагранжа.

В силу системы уравнений (28), (29) видим, что $\psi_\ell\big(x^{(k)}\big) = 0$ и $\psi'_\ell\big(x^{(k)}\big) = 0$.

Теорема 2 полностью доказана. □

Аналогичная теорема в случае кубатурных формул без участия значения производных принадлежит И.Бабушке и доказана в работе [16].

5. Оптимальные решетчатые кубатурные формулы в пространстве периодических функций $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$

Доказательство теоремы 3. Пусть узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т. е. $x^{(\beta)} = hH\beta$, $hH\beta \in \Omega_0$, N — число узлов кубатурной формулы, $Nh^n = |\Omega_0| = 1$, $|\Omega_0|$ — объем области Ω_0.

Имея в виду обозначения $C_k = C[k]$ и $C_k^{(\prime)} = C^{(\prime)}[k]$ на решетке систему уравнений (28)–(30) перепишем в виде

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} + \mathring{\lambda} +$$

$$+ \sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}^{(\prime)}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi i H^{*^{-1}}\beta\big)e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = 0, \quad hHk' \in \Omega_0; \tag{31}$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi i H^{*^{-1}}\beta\big)e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} -$$

$$- \sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}^{(\prime)}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi H^{*^{-1}}\beta\big)^2 e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = 0, \quad hHk' \in \Omega_0, \tag{32}$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}[k] = 1. \tag{33}$$

Так как h^{-1} целое и H^{-1} — матрица с целочисленными элементами, то заменой $\beta h = \gamma$ получаем

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{\big(2\pi i H^{*^{-1}}\beta\big)e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = \sum_{hHk\in\Omega_0} \mathring{C}[k] \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\big(2\pi i h^{-1} H^{*^{-1}}\gamma\big)e^{-2\pi i\gamma^*(k'-k)}}{|2\pi h^{-1} H^{*^{-1}}\gamma|^{2m}} =$$

$$= 2\pi i h^{-1} \sum_{\gamma\neq 0} \frac{H^{*^{-1}}\gamma}{|2\pi h^{-1} H^{*^{-1}}\gamma|^{2m}} = 0. \tag{34}$$

Имеет место равенство

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} C[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} = \sum_{hHk\in\Omega_0} C[k]\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma^*(k'-k)}}{|2\pi h^{-1}H^{*-1}\gamma|^{2m}}.$$

В периодическом случае все коэффициенты $C[k]$ равны между собой, т. е. $C[k]=C$, поэтому

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} C[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} = C\sum_{hHk\in\Omega_0}\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} =$$

$$= C\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}\sum_{hHk\in\Omega_0} e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}.$$

Известно, что

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)} = e^{-2\pi i\beta^* hk'}\sum_{hHk\in\Omega_0} e^{2\pi i\beta^* hk},$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0} e^{2\pi i\beta^* hk} = \begin{cases} 0, & \beta^* h\notin Z;\\ \sum\limits_{hHk\in\Omega_0} 1 = N, & \beta^* h\in Z,\end{cases}$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целочисленных векторов.

Итак, мы показали, что в формуле (34) действительно имеет место равенство $\beta h=\gamma$. В силу (34) система (31)–(33) принимает вид

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\mathring{C}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} + \mathring{\lambda} = 0, \quad hHk'\in\Omega_0; \tag{35}$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\mathring{C}^{(\prime)}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{\left(2\pi H^{*^{-1}}\beta\right)^2 e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = 0, \quad hHk'\in\Omega_0, \tag{36}$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\mathring{C}[k] = 1.$$

Равенство (36) имеет место, если

$$\mathring{C}^{(\prime)}[k] = 0, \quad hHk\in\Omega_0.$$

Действительно, в периодическом случае все коэффициенты равны между собой и $\mathring{C}^{(\prime)} = C$, и тогда (36) принимает вид

$$\mathring{C}^{(\prime)} N^n\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\left(2\pi H^{*^{-1}}\gamma\right)^2}{|2\pi h^{-1}H^{*^{-1}}\gamma|^{2m}} = 0.$$

Отсюда $C=0$, т. е. $\mathring{C}^{(\prime)}[k]=0,\ hHk\in\Omega_0$.

Теперь переходим к нахождению $\mathring{C}[k]$. Считая, что $\mathring{C}[k]=0$, при $hHk\notin\Omega_0$ уравнение (35) записываем в виде

$$\sum_{\gamma}\mathring{C}[\gamma]\chi_{\Omega_0}[\gamma]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^*(h\gamma\prime - h\gamma)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} + \mathring{\lambda} = 0,$$

это и есть

$$\left(\mathring{C}[\gamma]\chi_{\Omega_0}[\gamma]\right) * \sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^*(h\gamma)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} + \mathring{\lambda} = 0, \quad hH\gamma\prime\in\Omega_0. \tag{37}$$

Применяя известный оператор $h^n D_{h+1}^{(m)}[\beta]$ (см. [1]) к обеим частям равенства (37), получаем

$$\mathring{C}[\gamma] - h^n \sum_{hH\gamma\in\Omega_0} \mathring{C}[\beta] = 0.$$

Отсюда в силу (33) окончательно имеем

$$\mathring{C}[\gamma] = h^n \quad \text{при} \quad hH\gamma \in \Omega_0.$$

Теорема 3 полностью доказана. □

6. Норма функционала погрешности решетчатых оптимальных кубатурных формул

Доказательство теоремы 4. Формула (27) в решетчатом случае, т. е. при $x^{(k)} = hHk$ и $C_k = C[k]$, имеет вид

$$\left\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}\right\|^2 = \sum_{hHk'\in\Omega_0} C[k'] \sum_{hHk\in\Omega_0} C[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} -$$

$$-2\sum_{hHk'\in\Omega_0} C^{(\prime)}[k'] \sum_{hHk\in\Omega_0} C[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{(2\pi i\beta^* H^{-1}) e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}} +$$

$$+\sum_{hHk'\in\Omega_0} C^{(\prime)}[k'] \sum_{hHk\in\Omega_0} C^{(\prime)}[k] \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left(2\pi H^{-1}\beta^*\right)^2 e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}.$$

Отсюда, пользуясь теоремой 3, т. е. после подстановки $C[k] = h^n$, $C^{(\prime)}[k] = 0$, при $hHk \in \Omega_0$ получаем

$$\left\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\right\|^2 = \sum_{hHk'\in\Omega_0} h^n \sum_{hHk\in\Omega_0} h^n \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}. \tag{38}$$

Учитывая, что $\sum_{hHk'\in\Omega_0} 1 = N$, $h^n N = 1$ и h^{-1} целое, после замены переменных $\beta h = \gamma$, $\beta = \gamma h^{-1}$ (38) приводим к виду

$$\left\|\ell|\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\right\|^2 = \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{-2\pi i\gamma^*(k-k')}}{|2\pi h^{-1} H^{*-1}\gamma|^{2m}}. \tag{39}$$

Известно, что γ, k, k' — векторы с целочисленными координатами, поэтому

$$e^{-2\pi i\gamma^*(k-k')} = 1. \tag{40}$$

В силу (39) и (40) окончательно получаем утверждение теоремы 4. □

Заключение

Таким образом, в данной работе явно найдена экстремальная функция составной кубатурной формулы. С помощью этой функции вычислен квадрат нормы функционала погрешности составных кубатурных формул. Минимизируя квадрат нормы функционала погрешности по коэффициентам кубатурной формулы была получена система линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов составных кубатурных формул. В решетчатом случае явно найдены оптимальные коэффициенты составных кубатурных формул. Здесь найден квадрат нормы функционала погрешности оптимальных решетчатых кубатурных формул.

Литература

[1] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).
[2] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. *Кубатурные формулы* (Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996).
[3] Рамазанов М.Д. *Задачи теории решетчатых кубатурных формул*, в сб.: Кубатурные формулы и их приложения: Матер. VI Международного семинара-совещания, 103–105 (ИМВЦ УФНЦ РАН, Уфа, 2001).
[4] Рамазанов М.Д., Шадиметов Х.М. *Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева*, Докл. РАН **368** (4), 453–455 (1999).
[5] Ramasanov M.D., Shadimetov Kh.M. *Weight optimal cubature formulasi in periodic Sobolev space*, Dok. Math. **60** (2), 217–219 (1995).
[6] Шадиметов Х.М. *Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах*, Докл. РАН **376** (5), 597–599 (2001).
[7] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1980).
[8] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1994).
[9] Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1995).
[10] Габдулхаев Б.Г. *О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов*, Изв. вузов. Матем. (8), 3–10 (2009), URL: http://ksu.ru/journals/izv-vuz/.
[11] Shadimetov Kh.M. *Optimal lattice quadrature and cubature formulas*, Dokl. Math. **63** (1), 92–94 (2001).
[12] Шадиметов Х.М. *Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева*, Сиб. журн. вычисл. матем. **2** (2), 185–196 (1999).
[13] Носков М.В. *О кубатурных формулах для функций, периодических по некоторым переменным*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **31** (9), 1414–1419 (1991).
[14] Половинкин В.И. *Весовые кубатурные формулы*, Докл. АН СССР **179** (3), 542–544 (1968).
[15] Рамазанов М.Д. *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем* (ИМВЦ УФНЦ РАН, Уфа, 2009).
[16] Шадиметов Х.М. *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева* (Фан ва технология, Ташкент, 2019).
[17] Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. *Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space* $L_2^{(m)}(0,1)$, Numer. Algorithms **74**, 307–336 (2017).
[18] Hayotov A.R., Milovanovič G.V., Shadimetov Kh.M. *Interpolation splines minimizing a semi-norm*, Calcolo **51** (2), 245–260 (2014).
[19] Hayotov A.R., Milovanovič G.V., Shadimetov Kh.M. *Optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing the semi-norm in Hilbert space* $K_2(P_2)$, Anal. Numb. Theory, Approx. Theory, Special Funct. **3** (22), 573–611 (2014).
[20] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. *Construction of optimal interpolation formulas in the Sobolev space*, J. Math. Sci. **264** (6), 782–793 (2022).
[21] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. *Optimal interpolation formulas with derivative in the space* $L_2^{(m)}(0,1)$, Filomat **33** (17), 5661–5675 (2019).
[22] Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. *Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **11** (6), 764–775 (2018).

Халматвай Махкамбаевич Шадиметов

Ташкентский государственный транспортный университет,
ул. Адылходжаева, д. 1, г. Ташкент, 100167, Республика Узбекистан;
Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Мирзо Улугбека, д. 81, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

`e-mail:` kholmatshadimetov@mail.ru

Нилуфар Хусеновна Маматова

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан;
Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Мирзо Улугбека, д. 81, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: nilufar.mamatova.76@mail.ru

Kh.M. Shadimetov and N.H. Mamatova

Compound cubature formulas on a lattice

Abstract. In the present paper lattice optimal cubature formulas are constructed by the variational method in the Sobolev space. In addition, the square of the norm of the error functional of the constructed lattice optimal cubature formulas in the conjugate Sobolev space is explicitly calculated.

Keywords: Sobolev space, extremal function, composite lattice optimal cubature formulas, error functional.

Khalmatvay Makhkambaevich Shadimetov

Tashkent State Transport University,
1 Odilkhodjaev str., Tashkent, 100167 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
81 Mirzo Ulugbek str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Nilufar Husenovna Mamatova

Bukhara State University,
11 M. Iqbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
81 Mirzo Ulugbek str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: nilufar.mamatova.76@mail.ru