ISSN: 2181-1601

PARABOLIK TENGLAMALARNI ANALITIK VA TAQRIBIY YECHISH USULLARI

Nilufar Husenovna Mamatova **Shaxboz Shuxrat o'g'li Xazratov**
Buxoro davlat universiteti

ANNOTATSIYA

Ko`plab amaliy masalalarni yechishda qaralayotgan masalaning matematik modeli oddiy differensial tenglamalarga va xususiy hosilali differensial tenglamalarga keladi bu tenglamalarni yechishning biz biladigan klassik usullarda masalalarni yechish murakkabliklarga olib keladi. Bunday masalalar uchun taqribiy yechimlar muhim ahamiyatga ega. Ushbu maqolada parabolik tipdagi tengalamaga qo'yilgan masalalarni analitik va taqribiy yechish usullari haqida fikr yuritilgan.

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, tenglamalarning klassifikatsiyasi, parabolik tipdagi tenglama, chekli ayirma.

METHODS OF ANALYTICAL AND APPROXIMAL SOLUTION OF PARABOLIC EQUATIONS

Nilufar Husenovna Mamatova **Shakhboz Shukhrat ugli Khazratov**
Bukhara State University

ABSTRACT

The mathematical model of the problem under consideration in solving many practical problems leads to ordinary differential equations and partial differential equations, which leads to difficulties in solving problems in the classical methods of solving these equations. This paper discusses analytical and approximate methods for solving parabolic equations.

Keywords: differential equations, differential equations with special derivatives, classification of equations, equations of parabolic type, finite difference.

KIRISH

Ilm-fan, texnika taraqqiyoti hisoblash texnikasini keng qo'llanishi asosida jarayonlar va tizimlarni avtomatik hamda avtomatlashtirilgan boshqarish tizimlaridan fojdalanib, mamlakatimiz xalq xo'jaligiga fan texnikaning eng yangi yutuqlarini keng – ko'lamda qo'llab borishni taqozo etadi. [1-30]

Matematik modellar obyektni nazariy va amaliy tah'lil qilish natijasida yaratiladi. Tajribalarni matematik rejalashtirish usullari qaralayotgan jarayon yoki tizimning matematik modelini optimal usulda qurish imkonini beradi [2-3], [10-11], [17-18], [30].

Ushbu maqolada parabolik tipdagi tengalamaga qo‘yilgan masalalarni taqribiy yechish usullari haqida fikr yuritilgan.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Parabolik tipdagi tenglamalarning klassik vakili issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Ushbu tengalamaga qo‘yilgan Koshi masalasi va aralash masalalarni, ya’ni to‘g‘ri masalalarni analitik yechish usullari [8-9], [12-13], [21-26] “Xususiy hosilali differensial tenglamalar” kursida o‘qitiladi. Shuningdek hozirgi kunda xususiy hosilalarga qo‘yiladigan teskari masalalar ham o‘rganib kelinmoqda [4-7], [15-16]. Dastlab qisqacha analitik usullarga to‘xtalamiz, so‘ng taqribiy yechish usullarini bayon qilamiz.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchalik tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T; \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Yechimni quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

$v(x,t)$ funksiyadan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantirishini talab qilamiz:

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t).$$

Ikkala tomonini $a^2 X(x)T(t)$ ga bo‘lamiz, shunda hosil bo‘lgan tengliklar quyidagicha:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2;$$

Bu yerda $\lambda = const > 0$ ikkita tenglama xosil bo‘ladi:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \tag{1}$$

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \tag{2}$$

$X(x) = e^{i\lambda x}$ funksiya (1), tenglamaning yechimi bo‘ladi. Xuddi shunday qilib $T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$ funksiyamiz (2) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Demak, $v(x,t) = e^{i\lambda x - a^2\lambda^2 t}$ issiqlik o‘tkazuvchalik tenglamasining yechimi bo‘ladi. $u_\lambda = A(\lambda)e^{i\lambda x - a^2\lambda^2 t}$ funksiya ham yechim bo‘ladi (A (λ)-qandaydir funksiya).

Endi yakuniy funksiya quyidagicha aniqlanadi

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x - a^2\lambda^2 t} d\lambda$$

boshlang’ich shartlani qanoatlantirishini talab qilamiz

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \cdot$$

ISSN: 2181-1601

Fur'ye almashtirishtirishlar nazariyasinidan kelib chiqgan holda $A(\lambda)$ quydagicha topamiz

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds\,.$$

Shunday qilib bizlar $u(x,t)$:funksiya uchun quydagi ko‘rinishini hosil qilamiz

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds\right]e^{i\lambda x-a^2 i\lambda^2 t}d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(x-s)-a^2\lambda^2 t}d\lambda\right]\varphi(s)ds.$$

$u(x,t)$: uchun yechim shunday ko‘rinishga ega:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(s)ds. \tag{3}$$

$$G(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\},$$

belgilash kiritasak:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,s,t)\varphi(s)ds.$$

$G(x,s,t)$ funksiya issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining fundamental yechimi (manbaa funksiyasi), haqiqatan:

$$G_x(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\left(-\frac{2(x-s)}{4a^2t}\right);$$

$$G_t(x,s,t)=\frac{1}{2\sqrt{4\pi a^2 t^{\frac{3}{2}}}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)}{4a^2t}\right\}\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}$$

$$G_{xx}(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\frac{(x-s)^2}{4a^x t^2}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}(-\frac{2}{4a^2t})$$

$G(x,s,t)=a^2G_{xx}(x,s,t)$ ekanligini tekshirish oson.

(3) funksiya berilgan Koshi masalasining yechimi, Puasson formulasi deyiladi.

Endi issiqlik o‘tkazuvchalik tenglamasiga qo‘yilgan chegaraviy masalani qaraylik.

Birinchi chegaraviy masalaga kengroq to‘xtalib o‘tamiz:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), 0<x<l, 0<t\le T\\ u(0,t)=\mu_1(t), \qquad 0\le t\le T\\ u(l,t)=\mu_2(t), \qquad 0\le t\le T\\ u(x,0)=\phi(x), \qquad 0\le x\le l\end{cases}$$

Birinchi chegaraviy masalaning yechimi nima? Aniqki, bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi holatida $\tilde{u}(x,t)$ uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar to‘plami qanoatlantiradi:

$$\tilde{u}(x,t) = const,\ (x,t) \in Q_T = \{(x,t) : (0;1) \times (0;T)\};$$
$$\tilde{u}(0,t) = \mu_1(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(l,t) = \mu_2(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(x,0) = \phi(x);\ 0 \le x \le l.$$

Shuning uchun funksiyadan uzluksizlikni talab qilamiz, bu talab bilan keyinchalik biz barcha funksiyani o‘rganishdagi noqulayliklar bartaraf etamiz.

Ta’rif. *u(x,t)* funksiya issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalasining yechimi deyiladi, agar u quyidagi 3 shartni qanoatlantirsa:

1. $u \in C[\overline{Q}_T]$;
2. $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$;
3. $u(x,t)$ - I - chegaraviy masala shartlarini qanoatlantiradi.

Bu yerda masala $Q_T = \{(x,t) : (0;1) \times (0;T)\}$ sohada qaralyapti

Bir jinsli issiqlik o‘tazuvchasnlik tenglamasi nolinchi chegaraviy shartlar bilan berilgan birinchi chegaraviy masala uchun yechimni topamiz:

$$\begin{cases} (1)\ u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T; \\ (2)\ u(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T; \\ (3)\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T; \\ (4)\ u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Yechimni quyidagi yo‘l bilan aniqlaymiz, avvalo berilgan tenglamani almashtirish yordamida biror u(x,t) funksiyani tuzatamiz, keyin esa, boshlang’ich shartlarga qo‘yilgan ma’lum bir cheklanishlarda biz tuzgan funksiya birinchi chegaraviy masalaning yechimi bo‘lishini isbotlangan.

O‘zgaruvchilari ajratish usulida masalani yechib natijada u(x,t) uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t \right\}.$$

Parabolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan birinchi Koshi masalani sonli yechish usuliga to‘xtalamiz:

Berilgan Koshi masalasini yechish uchun yechishni, biz boshlang‘ich shartlarga muvofiq nol vaqt qatlamidagi harorat qiymatlarini hisoblaymiz. Issiqlik o‘tkazuvchalik tenglamasini chekli ayirmalar bilan almashtiramiz. Natijada chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz Sistema koeffitsientlari matritsasini - A matritsani va ozod hadlar ustunini aniqlaymiz. Ketma-ket har bir vaqt qatlamida temperaturani aniqlaymiz. Ushbu hisob kitoblarni bajarishda MATHCAD dasturidan foydalanish mumkin.

XULOSA

Hozirgi kunda fan va texnika taraqqiyoti asrida masalalarni sonli yechish muhim bo‘lib kelmoqda. Maqolada bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi va aralash masalalarni analitik yechish usallariga to‘xtalib, sonli yechish algoritmi berildi.

REFERENCES

1. Маматова Н.Х. Преподавание предмета «математика для экономистов» при помощи метода кейс-стади. //Вестник Науки и образования. 19(97), 2, 2020, с. 45-50.

2. Маматова Н.Х., Меражова Ш.Б. Постановка задачи для построения оптимальной интерполяцонной формулы пространства в С.Л.Соболева напериодических функций L_2^m (0,1) // "Молодой учёный " международный научный журнал, 2016,10 ЧАСТЬ I, 13-14

3. Дурдиев У.Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты. // Сибирские Электронные Математические Известия, 17 (2020), стр. 179-189.

4. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. //Eurasian journal of mathematical and computer applications, 7:2 (2019), pp. 4–19.

5. Durdiev U.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. //Mathematical Methods in the Applied Sciences – John Wiley & Sons, 42:18 (2019), pp. 7440–7451.

6. Durdiev U.D. An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equation in the Homogeneous Anisotropic Media. //Journal of Applied and Industrial Mathematics – Springer, 13:4 (2019), pp. 1-8.

7. Дурдиев Д.К Меражова Ш.Б. О решении обратных задач для уравнения смашенного параболо-гиперболического типа: одномерный случай.// Бухоро давлат университети илмий ахборотномаси, 2015 йил, 2-сон, 2-6 бетлар

8. Меражова Ш.Б., Нуриддинов Ж.З., Меражов Н.И., Хидиров У.Б. Методы решений задачи Коши для уравнения волны в случае n=2 и n=3// Academy, 4 (55), 2020, с. 21-25.

9. Меражова Ш.Б. Решение методам продолжения задач математической физики в полуограниченных областях // Молодой учёный, 12 (2016), с. 43-45.

10. Меражова Ш.Б. Численное решения первой и второй краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа. Романовский юбилейига бағишланган конференция материаллари тўплами. //Тошкент, 2004, 81-84-б.

11. Меражова Ш.Б. Тексиликда аралаш турдаги модел тенгламага қўйилган биринчи чегаравий масала ечими ҳақида. "Таҳлилнинг долзарб муаммолари ва татбиқлари" Илмий конференция материаллари.// Қарши 4-5 октябрь 2019 й. 173-174 бб

12. Меражова Ш.Б., Н.Х.Маматова. Априорная оценка для решения первой краевой задачи для уравнения смешанного типа// Молодой учёный, 12 (116), 2016, с. 42-56.

13. Меражова Ш.Б., Мардонова Ф.Я. Эквивалентность задачи для уравнения смешанного типа и задачи Коши для уравнений симметрической системе// Ученый XXI века 6-1 (53), 2019, с. 20-23.

14. Тураева Н.А. Методические рекомендации по обучению будущих учителей математики конструированию и анализу урока. ///Вестник Науки и образования. 19(97), 2, 2020, с. 45-50.

15. Меражова Ш.Б. Понятие прямой и обратной задачи в преподавании предмета уравнений математической физики. //Вестник Науки и образования. 19(97), 2, 2020, с. 81-85.

16. Merajova Sh.B. Methods of teaching the practical application of topics related to differential equations. //European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol. 8 No. 9, 2020 ISSN 2056-5852 pp37-40.

17. Merajova Sh.B. Numerical solution of the second boundary value problem for an equation of mixed-composite type. //Volume 6, No.10, October 2019 Journal of Global Research in Mathematical Archives RESEARCH PAPER

18. Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Меражов Н.И. Устойчивая разностная схема для второй краевой задачи поставленной для уравнения смешанно-составного типа на пространстве R^{n+1}. “Комплексный анализ, математическая физика и нелийные уравнения” международная научная конференция, сборник тезисов,// Россия, УФА, 2020, С. 43-45

19. Narmanov A.Ya. Parmonov H.F. On the geometry of hamiltonian symmetries. //Mathematics and Statistics 8(3): 293-298, 2020.

20. Жўраев Ф. М. Исломов Б. И. Аналог задачи Дарбу для вырождающегося нагруженного уравнения гиперболического типа.// Докл. Межд. Науч. Конф. 19-24 июля 2010. Владикавказ, Россия, С. 194-195/

21. Жўраев Ф. М. Задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. //Молодой Учёный международный научный журнал №8 апрель, 2016 г.

22. Элмуродова Х.Б. Условия существование виртуального уровня обобщенной модели фридрихса. //Молодой ученый 13(117), 62-65.

23. Элмуродова Х.Б. Кубический числовой образ на примерах. //Молодой ученый 12(116), 70-73.

24. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений // Молодой учёный. 10 (2015), С. 16-20.

25. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. О методе решения линейных интегральных уравнений сведением к дифференциальным уравнениям в частных производных высшего порядка с запаздывающим аргументом // Молодой учёный. 10 (2015), С. 21-24.

26. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З., Хидиров У.Б. Алгоритм решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом // Наука, техника и образование. 73:9 (2020), С. 77-80.
27. Бешимова Д.Р. Компактные пространства. //Молодой учёный международный научный журнал №13(117) июль-1 2016 г.
28. Бешимова Д.Р. Слабо сепарабельные пространства.// Молодой учёный международный научный журнал №12(116).июнь-2 2016 г.
29. Бешимова Д.Р. Слабая плотностьпространства слабо аддитивных функционалов.// Молодой учёный международный научный журнал №8(112) февраль-1, 2016 г.
30. Бозоров З.Р. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости. Сибирский Журнал Индустриальной Математики, 23:1 (2020), с. 28-45.