УДК: 519.644

Х.М.Шадиметов, Н.Х.Маматова

Составные кубатурные формулы

Аннотация. В настоящей работе вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. Кроме того явно вычислен квадрат нормы функционала погрешности построенных решетчатых оптимальных кубатурных формул в сопряженном пространстве Соболева.

Ключевые слова. пространство Соболева, экстремальная функция, составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы, функционал погрешности.

Введение

В различных разделах математики и ее приложений широко применяются квадратурные и кубатурные формулы. При получении дискретной аппроксимации (кубатурной формулы) важную роль играет общие требование, чтобы кубатурная формула как можно лучше приближалась к заданным определенным интегралам. Такие кубатурные формулы можно получить, например, при помощи вариационных принципов. Поэтому при построении по вариационным методом решетчатых оптимальных кубатурных формул в пространстве Соболева является одной из актуальных задач вычислительной математики. Пусть $x-$вектор из $\mathbb{R}^n, \gamma$ вектор из $\mathbb{Z}^n$, т.е. γ имеет n целочисленных координат. Для положительного числа h и матрицы H с единичным определителем образуем множество векторов $\{hH\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$. Это множество принято называть точечной геометрической решеткой в $\mathbb{R}^n$. Пусть также имеется функция $\varphi(x)$, непрерывная в измеримой области Ω из $\mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать формулы приближенного интегрирования, или кубатурные формулы вида

$$\int_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{hH\beta\in\Omega} \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|\le\sigma}} C_\alpha[\beta] D^\alpha \varphi(hH\beta). \qquad (1)$$

Значения функции дискретной переменной $\{C_\alpha[\beta] \mid \beta \in \mathbb{Z}^n, hH\beta \in \bar{\Omega}\}$

называют коэффициентами кубатурной формулы, точки $hH\beta$ из $\bar{\Omega}$ – ее узлами, а параметр h шагом решетки интегрирования, $p(x)$ – весовая функция, σ – целое положительное число, буквой α будем обозначать векторы вида $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, где α_i – целые неотрицательные числа, $i=\overline{1,n}$,

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n,\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Определение 1 *Семейство кубатурных формул вида (1) называется составными кубатурными формулами на решетке.*

Функционал погрешности кубатурной формулы (1) определяется как обобщенная функция, действующая по формуле

$$(\ell,\varphi)=\int_\Omega\left(p(x)-\sum_{hH\beta\in\Omega}\sum_{\substack{\alpha\\|\alpha|\le\sigma}}C_\alpha[\beta](-1)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(x-hH\beta)\right)\varphi(x)dx=$$

$$=\int_\Omega p(x)\varphi(x)dx-\sum_{hH\beta\in\Omega}\sum_{\substack{\alpha\\|\alpha|\le\sigma}}C_\alpha[\beta]D^\alpha\varphi(hH\beta). \tag{2}$$

Ясно, что задание функционала погрешности $\ell(x)$ однозначно определяет формулу (1) и обратно. Поэтому в дальнейшем будем иметь дело в основном с функционалом погрешности. Нас будет интересовать свойства кубатурной формулы (1) на пространствах Соболева $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ и $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ (см. [1, 2]).

В работе С.Л.Соболева [1] в $L_2^{(m)}(H)$ найдены оптимальные коэффициенты кубатурных формул вида (1) при $\alpha=(0,0,\dots,0)$ и $p(x)=1$.

В работах М.Д.Рамазанова [3,4] построены оптимальные кубатурные формулы вида (1) при $\alpha=(0,0,\dots,0)$ и $p(x)=1$ в пространстве W_2^μ.

В работах М.Д.Рамазанова и Х.М.Шадиметова [4,5] построены весовые оптимальные кубатурные формулы вида (1) при $\alpha=(0,0,\dots,0)$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(H)$. Кроме того, в [6] построена оптимальная кубатурная формула типа Эйлера- Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

В работах Б.Г.Габдулхаева [7,8,9,10] предлагается общий проекционный метод решения сингулярных интегральных управлений и дается его теоретическое обоснование на основе теории положительно определенных операторов и гильбертовых пространствах.

В настоящей работе мы будем заниматься построением составных решетчатых оптимальных кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(H)$. Задача по построение кубатурной формулы вида (1) в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала (2), норма которого в пространстве $L_2^{(m)*}(H)$ минимальна.

Основные результаты

Рассмотрим составную кубатурную формулу

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x^{(k)}) \right), \tag{3}$$

где точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k, C_k^{(')}$ называют соответственно узлами и коэффициентами кубатурной формулы, $D = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Разность

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x^{(k)}) \right)$$

называется погрешностью кубатурной формулы (3).

С другой стороны,

$$(\ell, \varphi) = \int_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x^{(k)}) \right)$$

$$= \int_{\Omega_0} [\left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x)] \varphi(x)dx,$$

где

$$\chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при } x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

$\delta(x)$-известная дельта-функция Дирака,

$$\Phi_0(H^{-1}x) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta), \ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

β_i – целые числа, т.е. $\beta_i \in \mathbb{Z}$;

$$\ell(x) = \left(\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x) \tag{4}$$

функционал погрешности кубатурной формулы (3), $\delta^{'}(x-x^{(k)})=D\delta(x-x^{(k)})$.

Пространство $L_2^{(m)*}(H)$ состоит из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице:

$$\left(\ell,1\right)=0. \qquad (5)$$

Неизвестными параметрами кубатурной формулы (3) являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k, C_k^{(')}$.

Оптимальной кубатурной формулой называют такую кубатурную формулу, погрешность которой при заданном числе узлов N имеет наименьшую норму в $L_2^{(m)*}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)}=hH\gamma$, тогда такую кубатурную формулу называют решетчатой. Здесь h-малый положительный параметр, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n),\ \gamma_i\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,n}$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы

Теорема 1 *Экстремальная функция функционала погрешности* ℓ *, определяемая формулой (4) в пространстве* $L_2^{(m)}(H)$*, имеет вид*

$$\psi_\ell(x)=-\sum_{k=1}^{N}\left(C_kB_{2m}(x-x^{(k)})-C_k^{(')}B_{2m}^{'}(x-x^{(k)})\right)-d_0. \qquad (6)$$

Здесь

$$B_{2m}(x-x^{(k)})=\sum_{\beta\neq0}\frac{e^{-2\pi iH^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|\,2\pi H^{*-1}\beta\,|^{2m}},$$

$$B_{2m}^{'}(x-x^{(k)})=-\sum_{\beta\neq0}\frac{2\pi iH^{*-1}\beta e^{-2\pi iH^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|\,2\pi H^{*-1}\beta\,|^{2m}}$$

d_0 -неизвестная, β -вектор-столбец с компонентами β_i , β_i -целые числа, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 2 *Пусть функционал погрешности* ℓ *определен на пространстве* $L_2^{(m)}(H)$*, т.е. его значение для константы равно нулю* $(\ell,1)=0$ *, и оптимален, т.е. среди всех функционалов вида (4) в заданной системе узлов он имеет наименьшую норму в* $L_2^{(m)*}(H)$*. Тогда существует экстремальная функция* ψ_ℓ *которая принадлежит* $L_2^{(m)}(H)$*, а сама функция* $\psi_\ell(x)$ *и ее* *первые производные* $\psi'_\ell(x)$ *обращаются в нуль в точках* $x^{(k)}$.

Теорема 3 *Оптимальные коэффициенты кубатурных формул вида (3) в пространстве периодических функций* $L_2^{(m)}(H)$ *имеют вид*

$$C[\gamma]=h^n,\quad C^{(\cdot)}[\gamma]=0 \ \textit{при}\ \ hH\gamma\in\Omega_0.$$

Теорема 4 *Норма функционала погрешности* $\ell(x)$ *решетчатых оптимальных кубатурных формул вида (3) в пространстве* $L_2^{(m)}(H)$ *имеет вид*

$$\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(H)\|^2=\frac{h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma\neq 0}\frac{1}{|H^{*-1}\gamma|^{2m}}.$$

Заключение.

Таким образом, в данной работе явно найдена экстремальная функция составной кубатурной формулы. С помощью этой функции вычислен квадрат нормы функционала погрешности составных кубатурных формул. Минимизируя квадрат нормы функционала погрешности по коэффициентам кубатурной формулы, была получена система линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов составных кубатурных формул. В решетчатом случае явно найдены оптимальные коэффициенты составных кубатурных формул. Здесь найден квадрат нормы функционала погрешности оптимальных решетчатых кубатурных формул.

Литературы.

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М. Наука, 1974, 808.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы, Новосибирск, Изд-во ИМ СО РАН, 1996, 484.
3. Рамазанов М.Д. Задачи теории решетчатых кубатурных формул Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VI Международного семинара-совещания, ИМВЦ УФНЦ РАН, Уфа, 103–105, 2001.
4. Рамазанов М.Д., Шадиметов Х.М. Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева. Доклады РАН., Москва, 4, 358, 453–455, 1999.
5. Ramasanov M.D., Shadimetov Kh.M. Weight optimal cubature formulasi in periodic Sobolev space. Doklad Mathematics, 60, 2, 217–219, 1995.
6. Shadimetov Kh.M. On the optimal lattice quadrature and cubature formulas. Doklad Akademii Nauk, 376, 5, 597–600, 2001.
7. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.

Казань Изд-во Казанск. ун-та, 1980, 232.
8. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Казань Изд-во Казанск. ун-та, 1994 288.
9. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы Казань Изд-во Казанск. ун-та, 1995, 230.
10. Габдулхаев Б.Г. О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов. Известия вузов. Математика, 8, 3–10, 2009.

Murakkab kubatur formulalar

X.M.Shadimetov, N.H.Mamatova

Annotatsiya

Ushbu maqolada Sobolev fazosida murakkab tipdagi panjarali optimal kubatur formulalar variatsion usuldan foydalanib qurilgan. Bundan tashqari, Sobolevning qo‘shma fazosida qurilgan panjarali optimal kubatur formulalarning xatolik funksionali normasining kvadrati aniq hisoblangan.

Compound cubature formulas

Kh.M.Shadimetov, N.H.Mamatova

Annotation

In the present paper, composite lattice optimal cubature formulas are constructed using the variational method in the Sobolev space. Moreover, the square of the norm of the error functional of the constructed lattice optimal cubature formulas is explicitly calculated in the conjugate Sobolev space.

Информации об авторов

1. Шадиметов Халматвай Махкамбаевич, д.ф.-м.н. проф. зав кафедры Ташкентский Государственный Транспортный Университета.
Адрес: г. Ташкент, 100167, ул. Адылходжаева, дом 1.
Тел.: +998998955777
e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru;

2. Маматова Нилуфар Хусеновна, докторант Институт математики имени В.И.Романовского.
Адрес: г. Ташкент, 100174, ул. Университет, дом 9.
Тел.: +998914132874
e-mail: nilufar.mamatova.76@mail.ru