А. А. Рахмонов, У. Д. Дурдиев, З. Р. Бозоров, Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды, *ТМФ*, 2021, том 207, номер 1, 112–132

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10035

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 207, № 1
апрель, 2021**

© **2021 г. А. А. Рахмонов[*†], У. Д. Дурдиев[*†], З. Р. Бозоров[*†]**

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА И ФУНКЦИИ ПАМЯТИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматриваются обратные задачи одновременного определения двух неизвестных: скорости распространения электромагнитных волн и функции памяти слоистой среды. Для их нахождения используются данные двух наблюдений флуктуаций на границе области. Основными результатами являются оценки устойчивости решения и теоремы единственности для рассматриваемых задач.

Ключевые слова: обратная задача, данные Неймана, преобразование Фурье, ступенчатая функция Хевисайда, функция Дирака, параметр Ламе.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10035

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие важные материалы, использующиеся в современных технологиях (например, в нанотехнологии), являются вязкоупругими и анизотропными. Некоторые нанотехнологические математические модели можно найти, например, в статьях [1]–[4] (см. также ссылки в них). При математическом моделировании процессов, протекающих в вязкоупругих материалах, возникает так называемая система с памятью, поведение которой определяется состоянием не только в данный момент, но и зависит от всей истории системы, и поэтому описывается интегро-дифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временнóй переменной. Одними из важнейших прикладных задач в этой области являются обратные задачи электромагнитной съемки и вязкоупругости.

Взаимодействие электромагнитных полей в среде с памятью моделируется системой уравнений Максвелла, содержащей интегральные члены типа свертки и описывающей электродинамические процессы с дисперсией. В теории упругости такой член в интегро-дифференциальных уравнениях отвечает за влияние вязкости материала. В обоих этих случаях ядро типа свертки обычно является неизвестной функцией, при этом распространение электромагнитных и упругих волн зависит от этого ядра.

[*]Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан. E-mail: araxmonov@mail.ru, umidjan93@mail.ru, zavqiddinbozorov2011@mail.ru

[†]Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Тот факт, что D и B (электрическое смещение и магнитная индукция соответственно) единственным образом определяются величинами E и H (интенсивностями соответствующих полей) в тот же момент времени, нарушается в быстро изменяющихся электромагнитных полях, частоты которых не малы по сравнению с начальными частотами электрической и магнитной поляризации, характерными для данной среды. Было доказано, что значения D и B в данный момент времени зависят не только от E и H, но и от всей временно́й истории этих полей (такая среда называется *среда с последействием*) [5]:

$$\begin{gathered}
D(x,t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)\,d\tau, \\
B(x,t) = \mu H + \int_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)\,d\tau, \\
D = (D_1, D_2, D_3), \qquad E = (E_1, E_2, E_3), \\
B = (B_1, B_2, B_3), \qquad H = (H_1, H_2, H_3),
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, диагональные матричнозначные функции $\varphi(t) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и $\psi(t) = \mathrm{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ описывают наличие памяти. Эти функции конечны для всех значений своих аргументов и стремятся к нулю при $t \to \infty$. Последнее обстоятельство является выражением того факта, что на значения $D(x,t)$, $B(x,t)$ в данный момент времени не могут заметно влиять значения интенсивностей $E(x,t)$, $H(x,t)$ в глубоком прошлом. Физическим механизмом, лежащим в основе интегральных зависимостей вида (1.1), является процесс формирования электромагнитной поляризации среды, поэтому интервал времени, на котором функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ заметно отличаются от нуля (время релаксации), характеризует скорость этого процесса.

Предположим с учетом уравнений (1.1), что векторы E и H образуют решение задачи Коши для системы уравнений Максвелла, описывающих однородный анизотропный кристалл, с нулевыми начальными условиями [6]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}D - \mathrm{rot}\,H + \sigma E + j^{\,\mathrm{cm}} &= 0, \qquad x_3 \neq 0, \\
\tilde{\mu}\frac{\partial}{\partial t}B + \mathrm{rot}\,E &= 0, \qquad t > 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где ε, $\tilde{\mu}$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ – проводимость среды. Мы считаем, что векторы электрического и магнитного полей до момента $t = 0$ удовлетворяют условию

$$E\big|_{t<0} = H\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{1.3}$$

Пусть вектор плотности внешнего электрического тока имеет вид [7]

$$j^{\,\mathrm{cm}} = (0,1,0) \cdot g(x_1)\eta(x_3)\theta(t), \tag{1.4}$$

где функции $g(x_1)$, $\eta(x_3)$ описывают поперечные размеры источника, $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Такой вид внешнего электрического тока соответствует мгновенному включению тока, параллельного оси x_2, сосредоточенного на поверхности земли $x_3 = 0$ и распределенного вдоль оси x_1 с плотностью $g(x_1)$. Кроме того, пусть в системе уравнений Максвелла параметры ε, $\tilde{\mu}$, σ зависят от точки $x = (x_1, x_3)$ и $\varepsilon(x) > 0$, $\mu(x) > 0$, $\sigma(x) \geqslant 0$. В геофизике эти параметры являются очень важными характеристиками сред и имеют то же значение, что плотность среды и упругие параметры Ламе, а задача определения этих параметров как функций от x является основной в электрогеофизической разведке [8].

Далее предположим, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменных x_1, x_2, также будем считать, что $\psi = 0$ (отсутствие предыстории магнитного поля), и выберем источник в виде (1.4). Тогда ненулевыми остаются только три компоненты: E_2, H_1 и H_2. Исключив последние две из них, запишем итоговое уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_1} E_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_3} E_2\right) + \\ + \int_0^t \varepsilon \varphi_2''(t-\tau) E_2(x_1, x_3, \tau)\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t} j^{\,\mathrm{cm}}, \qquad x_3 > 0, \quad t > 0. \quad (1.5)$$

Далее мы будем писать x и z вместо x_1 и x_3 и положим $\tilde{\mu}(x,z) := \tilde{\mu}(z)$, $\eta(z) = \delta(z)$ (дельта-функция Дирака).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы определяем скорость распространения волны и функцию памяти многослойной среды из двумерного интегро-дифференциального волнового уравнения с переменным коэффициентом, представляющего собой более общий случай, чем уравнение (1.5).

Далее предположим, что $\varepsilon = \mathrm{const}$ и $\sigma = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда начально-граничная задача для уравнения (1.5) записывается как

$$u_{tt} - \Lambda u - \bar{b}(z) u + \lambda u_t = \int_0^t k(t-\tau) \Lambda u(x,z,\tau)\, d\tau, \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2_+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \quad \left[u_z(x,z,t) + \int_0^t k(t-\tau) u_z(x,z,\tau)\, d\tau\right]_{z=+0} = \delta(x)\delta'(t) + \delta(x)\theta(t) f(t), \quad (2.2)$$

где $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon z > 0\}$, Λ – дифференциальный оператор вида

$$\Lambda u = \mu(z) \triangle u + \mu'(z) u_z, \quad (2.3)$$

в котором $\triangle$ – двумерный лапласиан по переменным (x,z), а $\bar{b}(z)$, $f(t)$ – известные непрерывные функции. Коэффициент $\mu(z)$ является положительной функцией из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$ (здесь $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{R} \colon z > 0\}$), λ – некоторая постоянная, а функции $k(t)$, $f(t)$ непрерывны при $t \in \mathbb{R}$.

Задача вычисления функции $u(x,z,t)$, удовлетворяющей (в обобщенном смысле) уравнениям (2.1), (2.2) для заданных функций $\mu(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$, называется прямой задачей. Граничное условие моделирует мгновенный источник возбуждения волны, расположенный в точке $x = 0$, $z = 0$.

Изучение обратных задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений и систем является предметом исследований многих авторов. Среди публикаций, близких к настоящей работе, можно выделить статьи [9], [10]. В работе [11] исследовались прямая и обратная задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным членом типа свертки относительно одномерной зависящей от времени функции памяти среды. С помощью метода Фурье обратная задача была сведена к решению интегральных уравнений Вольтерра для неизвестных функций зависящей от времени переменной. В работах [12]–[14] (см. также ссылки в них) исследовалась задача определения многомерного ядра уравнения вязкоупругости для неоднородной изотропной среды. В работах [15], [16] решались задачи восстановления одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной и неограниченной областях и были доказаны теоремы о глобальной однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций со взвешенными нормами. Основная особенность, присутствующая в статьях [17]–[20] и в настоящей работе, заключается в использовании для инициирования волнового процесса источника, локализованного на границе, и/или точечного источника. Наконец, отметим работы [10], [21]–[27], посвященные задачам определения ядра из интегро-дифференциальных уравнений с интегралом типа свертки, и работы [1], [28]–[34], где изучались одно- и двумерные обратные задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды.

Что касается определения подынтегральной функции гиперболических уравнений, то мы сошлемся на работы [21], [22]. В работе [21] исследовалась задача нахождения функции памяти в случае трехмерного волнового уравнения с дельта-функцией в правой части. Далее в работе [22] эта задача была обобщена на случай гиперболического уравнения второго порядка с постоянной главной частью и переменными коэффициентами при малых производных. Аналогичные задачи с распределенными источниками возмущений можно найти в работах [35], [36]. В статье [37] изучалась задача определения одномерного коэффициента скорости распространения волны и формы источников импульсов в случае граничного условия, заданного вторым соотношением в (2.2). Оказывается, что для решения этой задачи достаточно задать фурье-образ функции $g(x,t)$ при двух различных значениях переменной преобразования Фурье. В настоящей статье мы исследуем задачу определения двух функций одной переменной, одна из которых находится под знаком интеграла, с помощью процедуры, аналогичной методу работы [8].

Отметим также, что обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений изучались в работах [38]–[43], где были найдены малые локальные поправки и условие устойчивости “в целом”.

Основной особенностью настоящей работы является использование источника, локализованного на границе рассматриваемой области пространства; в результате воздействия этого источника возникает физический процесс передачи волн. Эта особенность существенно увеличивает ценность исследования с точки зрения приложений. В работах Карчевского и Фатьянова [44]–[46] можно ознакомиться с численными методами решения таких задач.

Предположим, что в области $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}$ задано решение задачи с граничным условием

$$u\big|_{z=+0} = g(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

Обратная задача состоит в нахождении $\mu(z)$, $k(t)$ при известных $\overline{b}(z)$, $f(t)$, $g(x,t)$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Зададим интегральный оператор

$$L[k,u](t;x,z,t) = u(x,z,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(x,z,\tau)\,d\tau.$$

Иногда, чтобы сократить обозначения, мы не будем указывать в операторе L зависимость функций от своих переменных, т. е. зависимость $k(t)$ и $u(x,z,t)$.

Обозначим как $\tilde{u} = F[u](\nu,z,t)$ преобразование Фурье функции $u(x,y,t)$ по переменной x:

$$\tilde{u}(\nu,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} u(x,z,t)e^{i\nu x}\,dx.$$

Для заданных $\mu(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$ задача (2.1), (2.2) корректно поставлена и имеет единственное решение $u(x,y,t)$ с компактным носителем для любого фиксированного t. Можно переписать уравнения (2.1), (2.2) для функции $u(x,z,t)$ как

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = \left(\mu(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu'(z)\frac{\partial}{\partial z} - \nu^2\mu(z)\right)L[k,\tilde{u}] + \bar{b}(z)\tilde{u} - \lambda\tilde{u}_t, \quad (\nu,z,t)\in\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$\tilde{u}\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}L[k,\tilde{u}]\bigg|_{z=+0} = \delta'(t) + \theta(t)f(t). \tag{3.2}$$

Введем новую переменную

$$y = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\mu(s)}}. \tag{3.3}$$

Заданная таким образом функция $z = l(y)$ монотонна и определяет взаимно однозначное соответствие между y и z по формуле (3.3). Пусть $c(y) := \sqrt{\mu(l(y))}$; введем новую функцию $\tilde{u}(\nu,z,t) = \bar{u}(\nu,y,t)$. В терминах этой функции и переменной y обратная задача (3.1), (3.2), (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{c'(y)}{c(y)}\frac{\partial}{\partial y} - \nu^2c^2(y)\right)L[k,\bar{u}] + b(y)\bar{u} - \lambda\bar{u}_t, \quad (y,t)\in\mathbb{R}^2_+, \quad \nu\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\bar{u}\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}L[k,\bar{u}]\bigg|_{y=+0} = \delta'(t) + \theta(t)f(t), \qquad \bar{u}\big|_{y=0} = \tilde{g}(\nu,t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{3.5}$$

где

$$b(y) = \bar{b}(z), \qquad \tilde{g}(\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)e^{i\nu x}\,dx. \tag{3.6}$$

Теперь преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (3.4) так, чтобы, во-первых, в подынтегральном выражении отсутствовали производные функции $\bar{u}$ по y и, во-вторых, коэффициенты при $\bar{u}_y$ и $\bar{u}_t$ во внеинтегральных членах были равны нулю. Эти требования удовлетворяются, если ввести новую функцию v как

$$v(\nu,y,t) = \sqrt{\frac{c(y)}{c(0)}}\,e^{(\lambda-k(0))t/2}L[k,\bar{u}](t;\nu,y,t). \tag{3.7}$$

Прямыми вычислениями нетрудно показать, что $\bar{u}$ связана с v соотношением

$$\bar{u}(\nu,y,t) = \sqrt{\frac{c(0)}{c(y)}}\,L[r,e^{(k(0)-\lambda)t/2}v](t;\nu,y,t), \tag{3.8}$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau) r(\tau)\, d\tau. \tag{3.9}$$

Введем обозначения

$$r_{00} := -r'(0) + \frac{1}{4} r^2(0) - \frac{3\lambda}{2} r(0) + \frac{\lambda^2}{4}, \qquad c_0 := -\frac{c'(0)}{2c(0)}. \tag{3.10}$$

Перепишем уравнения (3.4), (3.5) в терминах новых функций $\bar{u}(\nu, y, t)$ и $r(t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H(\nu, y) v(\nu, y, t) - \\ - \int_0^t h(t-\tau) v(\nu, y, \tau)\, d\tau + b(y) \int_0^t p(t-\tau) v(\nu, y, \tau)\, d\tau, \tag{3.11}$$

$$v\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial y} + c_0 v\right)\Big|_{y=+0} = \delta'(t) - \frac{\lambda + r(0)}{2}\delta(t) + \theta(t) f_0(t), \tag{3.12}$$

$$v\big|_{y=+0} = \tilde{g}_0(\nu, t) + \int_0^t k_0(t-\tau) \tilde{g}_0(\nu, \tau)\, d\tau, \tag{3.13}$$

где

$$H(\nu, y) := r_{00} + q_0(y) - \nu^2 q_1(y) + b(y), \\ q_0(y) := \frac{1}{4c^2(y)} (2c(y)[c''(y) - 2c'(y)] + c'^{\,2}(y)), \qquad q_1(y) = c^2(y) \tag{3.14}$$

и

$$h(t) := e^{(\lambda + r(0))t/2} r''(t) + e^{(\lambda + r(0))t/2} r'(t), \qquad p(t) := e^{(\lambda + r(0))t/2} r(t), \\ f_0(t) := e^{(\lambda + r(0))t/2} f(t), \\ \tilde{g}_0(\nu, t) := e^{(\lambda + r(0))t/2} \tilde{g}(\nu, t), \qquad k_0(t) := e^{(\lambda + r(0))t/2} k(t). \tag{3.15}$$

С учетом предположения о гладкости функции $c(y)$ очевидно, что $q_0(y) \in C(\mathbb{R})$, $q_1(y) \in C^2(\mathbb{R})$. В условиях (3.12) использовано равенство $k(0) = -r(0)$, вытекающее из уравнения (3.9).

Из теории гиперболических уравнений следует, что решение прямой задачи (3.11), (3.12) тождественно равно нулю, $v(\nu, y, t) = 0$, при всех $y > t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, поскольку (3.11), (3.12) является начально-краевой задачей с нулевыми начальными данными и некоторым граничным условием, сосредоточенным в области $y = 0$, $t = 0$, $\nu \in \mathbb{R}$. Имеет место следующая

Лемма 3.1. *Решение прямой задачи* (3.11), (3.12) *представляется в виде*

$$v(\nu, y, t) = -\delta(t - y) + \theta(t - y) \hat{v}(\nu, y, t), \tag{3.16}$$

при этом регулярная функция $\hat{v}(\nu, y, t)$ удовлетворяет в области $t > y > 0$ уравнению

$$\hat{v}_{tt} = \hat{v}_{yy} + H(\nu, y) \hat{v}(\nu, y, t) + h(t - y) - b(y) p(t - y) - \\ - \int_0^{t-y} h(\tau) \hat{v}(\nu, y, t - \tau)\, d\tau + b(y) \int_0^{t-y} p(\tau) \hat{v}(\nu, y, t - \tau)\, d\tau \tag{3.17}$$

с начальным и граничным условиями

$$\hat{v}\big|_{t=y+0} = \beta(\nu, y) = \beta_0 - \frac{1}{2}\int_0^y H(\nu,\xi)\,d\xi, \qquad \nu \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_+, \tag{3.18}$$

$$(\hat{v}_y + c_0\hat{v})\big|_{y=0} = f_0(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.19}$$

Отметим, что $v = \hat{v}$ при $t > y > 0$. Поэтому далее при рассмотрении прямых и обратных задач в области $t > y > 0$ мы не будем писать значок шляпки над v.

Доказательство. Подставим (3.16) в уравнения (3.11), (3.12) и применим метод выделения особенностей [47]. Положим $\beta(\nu, y) = \tilde{v}(\nu, y, y + 0)$. Подставляя выражение (3.16) в (3.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых сингулярностях, находим, что $\beta(\nu, y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\beta_y(\nu, y) + H(\nu, y) = 0$$

с начальным условием $\beta(\nu, 0) = \beta_0 = (r(0) + \lambda - 2c_0)/2$. Решая это уравнение, получаем

$$\beta(\nu, y) = \beta_0 - \frac{1}{2}\int_0^y H(\nu, s)\,ds.$$

Кроме того, если подставить выражение (3.16) в (3.12), мы получим условие (3.19). Это завершает доказательство леммы.

Заметим, что в силу (3.13) с учетом введенных выше обозначений функция $\tilde{g}_0(\nu, t)$ имеет вид

$$\tilde{g}_0(\nu, t) = -\delta(t - y) + \theta(t - y)\bar{g}(\nu, t), \qquad (\nu, t) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{3.20}$$

где функция $\bar{g}(\nu, t)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости по переменной t, которые обсуждаются ниже. В связи с этим дополнительное условие (3.13) для функции v выглядит как

$$v\big|_{y=0} = \bar{g}_{00}(\nu, t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.21}$$

где

$$\bar{g}_{00}(\nu, t) = \bar{g}(\nu, t) - k_0(t) + \int_0^t k_0(t - \tau)\bar{g}(\nu, \tau)\,d\tau.$$

Теперь мы сузим данные задачи, предположив, что функция $\bar{g}(\nu, t)$ (и, следовательно, функция $\tilde{g}(\nu, t)$)) известна только для двух значений ν_1, ν_2, таких что $\nu_1^2 \neq \nu_2^2$. Тогда, если известно решение прямой задачи при $\nu = \nu_i$, $i = 1, 2$, обратная задача (2.1)–(2.4) сводится к задаче определения функций $c(y)$, $k(t)$ из соотношений (3.17)–(3.19) и ее решение задается равенством (3.21). Оказывается, что по этим данным функции $c(y)$, $k(t)$ определяются однозначно. После нахождения $c(y)$ функция $l(z)$, задающая соответствие (3.3) между переменными y и z, находится по формуле

$$l(y) = \int_0^y c(\xi)\,d\xi,$$

при этом $\sqrt{\mu(z)} = c(l^{-1}(z))$. Благодаря тому, что уравнение (3.17) описывает волновой процесс, распространяющийся с единичной скоростью, решение $v(\nu, 0, t)$ при

$t \in [0,T]$ и фиксированном ν зависит от функции $c(y)$ и ее производных (через функцию $H(\nu,y)$) только на интервале $[0,T/2]$ и от функции $k(t)$ на $[0,T]$. Поэтому естественно ожидать, что верно и обратное: функция $c(y)$ на каждом интервале $[0,T/2]$ и функция $k(t)$ на $[0,T]$ определяются значениями функции $\bar{g}(\nu,t)$ только на интервале $[0,T]$. Оказывается, что такой локальный характер зависимости функций $c(y)$ и $k(t)$ от $\bar{g}(\nu,t)$ действительно имеет место, и это, конечно, отражено в результатах, которые мы намерены далее доказать.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Изучим решение прямой задачи (3.17)–(3.19).

Лемма 4.1. *Предположим, что $b(y) \in C[0,T/2]$, $c(y) \in C^2[0,T/2]$, $f(t) \in C[0,T]$, $k(t) \in C^2[0,T]$ при некотором фиксированном $T > 0$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра ν решение задачи (3.17)–(3.19) для $(y,t) \in D_T$, где*

$$D_T = \big\{(y,t)\colon 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant T-y\big\},$$

принадлежит классу функций $C^1(D_T)$ и подчиняется следующей оценке:

$$\|v\|_{C^1(D_T)} \leqslant d \cdot (\|b(y)\|_{C[0,T/2]} + \|c(y)\|_{C^2[0,T/2]} + \|f(t)\|_{C[0,T]} + \|k(t)\|_{C^2[0,T]}), \quad (4.1)$$

где d зависит только от T, ν, $\|b(y)\|_{C[0,T/2]}$, $\|c(y)\|_{C^2[0,T/2]}$ и $\|k(t)\|_{C^2[0,T]}$. Кроме того, функция

$$\psi(\nu_1,\nu_2,t) = v_t(\nu_1,0,t) - v_t(\nu_2,0,t)$$

при любых фиксированных ν_j, $j=1,2$, принадлежит классу $C^1[0,T]$.

Доказательство. Используя для $v_{tt} - v_{yy}$ равенства

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v(\nu,y,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)(v_t + v_y) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(v_t - v_y),$$

из соотношений (3.17)–(3.19) при $(y,t) \in D_T$ интегрированием по соответствующим характеристикам дифференциальных операторов первого порядка получаем

$$\begin{aligned}(v_t + v_y)(\nu,y,t) = -\frac{1}{2} H\left(\nu, \frac{y+t}{2}\right) &+ \\ + \int_y^{(y+t)/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t+y-\xi) + h(t+y-2\xi) - b(\xi) p(t+y-2\xi) &- \\ - \int_0^{t+y-2\xi} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t+y-\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi&, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} v(\nu,0,t) = \beta_0 e^{c_0 t} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{c_0(t-\tau)} H\left(\nu,\frac{\tau}{2}\right) d\tau - \int_0^t e^{c_0(t-\tau)} f_0(\tau)\, d\tau &+ \\ + \int_0^t e^{c_0(t-\tau)} \int_0^{\tau/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,\tau-\xi) + h(\tau-2\xi) - b(\xi)p(\tau-2\xi) &- \\ - \int_0^{\tau-2\xi} \big(h(\alpha) - b(\xi)p(\alpha)\big) v(\nu,\xi,\tau-\xi-\alpha)\, d\alpha \Big]\, d\xi\, d\tau&, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$
\begin{aligned}
(v_t - v_y)(\nu, y, t) = -2f(t-y) + 2c_0 v(\nu, 0, t-y) - \frac{1}{2} H\left(\nu, \frac{t-y}{2}\right) + \\
+ \int_0^{(t-y)/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y-\xi) + h(t-y-2\xi) - b(\xi) p(t-y-2\xi) - \\
- \int_0^{t-y-2\xi} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y-\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi + \\
+ h(t-y)y - p(t-y) \int_0^y b(\xi)\, d\xi + \\
+ \int_0^y \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y+\xi) - \\
- \int_0^{t-y} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y+\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Из (4.2), (4.4) находим уравнения для v_t, v_y, v:

$$
\begin{aligned}
v_t(\nu, y, t) = -f(t-y) + c_0 v(\nu,0,t-y) - \frac{1}{4} H\left(\nu, \frac{y+t}{2}\right) - \frac{1}{4} H\left(\nu, \frac{t-y}{2}\right) + \\
+ \frac{1}{2}\left(h(t-y)y - p(t-y) \int_0^y b(\xi)\, d\xi \right) + \\
+ \frac{1}{2} \int_0^{(t-y)/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y-\xi) + h(t-y-2\xi) - b(\xi)p(t-y-2\xi) - \\
- \int_0^{t-y-2\xi} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y-\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi + \\
+ \frac{1}{2} \int_0^y \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y+\xi) - \\
- \int_0^{t-y} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y+\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi + \\
+ \frac{1}{2} \int_y^{(y+t)/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t+y-\xi) + \\
+ h(t+y-2\xi) - b(\xi)p(t+y-2\xi) - \\
- \int_0^{t+y-2\xi} h(\tau) v(\nu,\xi,t+y-\xi-\tau)\, d\tau + \\
+ b(\xi) \int_0^{t+y-2\xi} p(\tau) v(\nu,\xi,t+y-\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi,
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y(\nu, y, t) = f(t-y) - c_0 v(\nu,0,t-y) - \frac{1}{4} H\left(\nu, \frac{t+y}{2}\right) + \frac{1}{4} H\left(\nu, \frac{t-y}{2}\right) - \\
- \frac{1}{2} \int_0^{(t-y)/2} \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y-\xi) + h(t-y-2\xi) - b(\xi)p(t-y-2\xi) - \\
- \int_0^{t-y-2\xi} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y-\xi-\tau)\, d\tau \Big] d\xi - \\
- \frac{1}{2} \int_0^y \Big[H(\nu,\xi) v(\nu,\xi,t-y+\xi) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad - \int_0^{t-y} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big) v(\nu,\xi,t-y+\xi-\tau)\,d\tau\Big]\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{2}\int_y^{(y+t)/2}\Big[H(\nu,\xi)v(\nu,\xi,t+y-\xi) + h(t+y-2\xi) - b(\xi)p(t+y-2\xi) - \\
&\qquad\qquad - \int_0^{t+y-2\xi} h(\tau)v(\nu,\xi,t+y-\xi-\tau)\,d\tau + \\
&\qquad\qquad + b(\xi)\int_0^{t+y-2\xi} p(\tau)v(\nu,\xi,t+y-\xi-\tau)\,d\tau\Big]\,d\xi,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
v(\nu,y,t) &= \beta_0 - \frac{1}{2}\int_0^y H(\nu,\xi)\,d\xi - \int_0^{t-y} f(\tau)\,d\tau + c_0\int_0^{t-y} v(\nu,0,\tau)\,d\tau - \\
&- \frac{1}{4}\int_y^t \Big[H\Big(\nu,\frac{y+t}{2}\Big) + H\Big(\nu,\frac{t-y}{2}\Big)\Big]\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{t-y}\Big(h(\tau)y - p(\tau)\int_0^y b(\xi)\,d\xi\Big)\,d\tau + \\
&+ \frac{1}{2}\int_y^t\int_0^{(\tau-y)/2}\Big[H(\nu,\xi)v(\nu,\xi,\tau-y-\xi) + h(\tau-y-2\xi) - b(\xi)p(\tau-y-2\xi) - \\
&\qquad\qquad - \int_0^{\tau-y-2\xi}\big(h(\alpha) - b(\xi)p(\alpha)\big)v(\nu,\xi,\tau-y-\xi-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau + \\
&+ \frac{1}{2}\int_y^t\int_0^y \Big[H(\nu,\xi)v(\nu,\xi,\tau-y+\xi) + \int_0^{\tau-y} h(\alpha)v(\nu,\xi,\tau-y+\xi-\alpha)\,d\alpha - \\
&\qquad\qquad - b(\xi)\int_0^{\tau-y} p(\alpha)v(\nu,\xi,\tau-y+\xi-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau + \\
&+ \frac{1}{2}\int_y^t\int_y^{(y+\tau)/2}\Big[H(\nu,\xi)v(\nu,\xi,\tau+y-\xi) + h(\tau+y-2\xi) - b(\xi)p(\tau+y-2\xi) - \\
&\qquad\qquad - \int_0^{\tau+y-2\xi} h(\alpha)v(\nu,\xi,\tau+y-\xi-\alpha)\,d\alpha + \\
&\qquad\qquad + b(\xi)\int_0^{\tau+y-2\xi} p(\alpha)v(\nu,\xi,\tau+y-\xi-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Уравнение (4.7) – это интегральное уравнение типа Вольтерра в области D_T, имеющее единственное непрерывное решение. Из уравнений (4.5), (4.6) следует, что это решение непрерывно дифференцируемо в D_T. Подставляя выражение для $v(\nu,0,t)$, полученное из (4.3), в уравнения (4.5)–(4.7) и используя для этих уравнений обычную схему метода последовательных приближений, который имеет факториальную сходимость по t, легко установить справедливость оценки (4.1) в области D_T. Применив уравнение (4.5), построим функцию

$$
\begin{aligned}
\psi(\nu_1,\nu_2,t) &= c_0\big(v(\nu_1,0,t) - v(\nu_2,0,t)\big) + \frac{1}{2}(\nu_1^2-\nu_2^2)q_1\Big(\frac{t}{2}\Big) + \\
&+ \int_0^{t/2}\Big[H(\nu_1,\xi)v(\nu_1,\xi,t-\xi) - H(\nu_2,\xi)v(\nu_2,\xi,t-\xi) - \\
&\qquad - \int_0^{t-2\xi} h(\tau)\big(v(\nu_1,\xi,t-\xi-\tau) - v(\nu_2,\xi,t-\xi-\tau)\big)\,d\tau +
\end{aligned}
$$

$$+ b(\xi)\int_0^{t-2\xi} p(\tau)\big(v(\nu_1,\xi,t-\xi-\tau) - v(\nu_2,\xi,t-\xi-\tau)\big)\,d\tau\bigg]d\xi. \tag{4.8}$$

Правая часть этого равенства принадлежит классу $C^2[0,T]$. Следовательно, функция $\psi(\nu_1,\nu_2,t) \in C^2[0,T]$ при любых фиксированных ν_i, $i=1,2$. Лемма доказана.

5. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Отметим, что в условиях леммы 4.1 в качестве ее следствия мы получаем, что функция $\bar g(\nu,t)$ в (3.21) принадлежит классу $C^2[0,T]$ при каждом фиксированном ν, как и функция $\bar g(\nu_1,t) - \bar g(\nu_2,t)$.

Лемма 5.1. *Пусть функция $\tilde g_0(\nu,t)$ имеет вид* (3.20), $\bar g(\nu,t) \in C^2[0,T]$ *при любом фиксированном ν и*

$$\bar g(\nu_1,t) - \bar g(\nu_2,t) \in C^2[0,T].$$

Пусть дополнительно функция $\bar g_t(\nu,0)$ возрастает по $\nu \in \mathbb{R}$ и $f(t) \in C[0,T]$. Тогда обратная задача (3.17)–(3.19), (3.21) *в области D_T эквивалентна задаче нахождения функций v, v_t, $c(y)$, $c'(y)$, $q_0(y)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, $h(t)$, $p(t)$ из следующей замкнутой системы интегральных уравнений*:

$$c(y) = c(0) + \int_0^y c'(\xi)\,d\xi, \tag{5.1}$$

$$c'(y) = c'(0) + \int_0^y \left[2c'(\xi) + 2c(\xi)q_0(\xi) - \frac{(c'(\xi))^2}{2c(\xi)}\right]d\xi, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
q_0(y) &= -r_{00} - b(y) + \nu_1^2 q_1(y) - 2f(2y) + \\
&+ 2c_0\left[\bar g(\nu_1,y) - k_0(y) + \int_0^y k_0(\tau)\bar g(\nu_1,y-\tau)\,d\tau\right] - \\
&- \bar g_t(\nu_1,y) + k_0'(y) - \bar g(\nu_1,0)k_0(y) - \int_0^y k_0(\tau)\bar g_t(\nu_1,y-\tau)\,d\tau + \\
&+ \int_0^y \bigg[H(\nu_1,\xi)v(\nu_1,\xi,2y-\xi) + h(2y-2\xi) - b(\xi)p(2y-2\xi) - \\
&\qquad - \int_0^{2(y-\xi)} \big(h(\tau) - b(\xi)p(\tau)\big)v(\nu_1,\xi,2y-\xi-\tau)\,d\tau\bigg]d\xi, \qquad y \in [0,T/2],
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$k_0(t) = -r(0) + \left(-r'(0) + \frac{r^2(0)}{2} - \frac{\lambda}{2}r(0)\right)t + \int_0^t (t-\tau)k_0''(\tau)\,d\tau, \tag{5.4}$$

$$k_0'(t) = -r'(0) + \frac{r^2(0)}{2} - \frac{\lambda}{2}r(0) + \int_0^t k_0''(\tau)\,d\tau, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
k_0''(t) &= -c_0\bar g_t(\nu_1,t) + \bar g_{tt}(\nu_1,t) + \big(c_0 + \bar g(\nu_1,0)\big)k_0'(t) + \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2)q_1'(t/2) + \\
&+ \big(c_0\bar g(\nu_1,0) - \bar g_t(\nu_1,0)\big)k_0(t) + \int_0^t k_0(\tau)\big(c_0\bar g_t(\nu_1,t-\tau) - \bar g_{tt}(\nu_1,t-\tau)\big)d\tau + \\
&+ H\left(\nu_1,\frac{t}{2}\right)v\left(\nu_1,\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right) - H(\nu_2,t/2)v(\nu_2,t/2,t/2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{t/2}\Big[H(\nu_1,\xi)v_t(\nu_1,\xi,t-\xi)-H(\nu_2,\xi)v_t(\nu_2,\xi,t-\xi)-\\
&\quad-\big(h(t-2\xi)-b(\xi)p(t-2\xi)\big)\big(v(\nu_1,\xi,\xi)-v(\nu_2,\xi,\xi)\big)-\\
&\quad-\int_0^{t-2\xi}\big(h(\tau)-b(\xi)p(\tau)\big)\big(v_t(\nu_1,\xi,t-\xi-\tau)-v_t(\nu_2,\xi,t-\xi-\tau)\big)d\tau\Big]d\xi, \quad (5.6)
\end{aligned}
$$

$$h(t)=-k_0''(t)-r_{00}k_0(t)-\int_0^t k_0(\tau)h(t-\tau)\,d\tau, \tag{5.7}$$

$$p(t)=-k_0(t)-\int_0^t k_0(t-\tau)p(\tau)\,d\tau, \qquad t\in[0,T], \tag{5.8}$$

где

$$c(0)=\sqrt{\frac{2G'(0)}{\nu_1^2-\nu_2^2}}, \qquad c'(0)=2c(0)(r(0)+2\bar g(\nu,0)-\lambda), \tag{5.9}$$

$$
\begin{gathered}
r(0)=\lambda-2c_0-2\bar g(\nu,0),\\
r'(0)=c_0-2b(0)-\bar g_t(\nu,0)+\big(2\bar g(\nu,0)-\lambda+r(0)\big)\frac{r(0)}{2}.
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

Доказательство. Сначала установим справедливость равенств (5.9) и (5.10). Действительно, подставив $t=0$ в уравнение (4.3) и использовав условие (3.21), находим

$$\bar g(\nu_j,0)=\frac12\big(\lambda-r(0)-2c_0\big), \qquad j=1,2. \tag{5.11}$$

В частности, отсюда мы заключаем, что $\bar g|_{t=0}$ не зависит от ν. Далее из уравнения (4.8) при $t=0$ получаем

$$G'(0)=\frac12(\nu_1^2-\nu_2^2)c^2(0).$$

Следовательно, в силу положительности $G'(t)=\bar g_t(\nu_1,0)-\bar g_t(\nu_2,0)$ имеем (4.7). Учитывая равенство (5.11) для c_0, получаем второе равенство в (5.9). Поскольку $\bar g|_{t=0}$ не зависит от ν, вторая формула в (3.8) однозначно задает $c'(0)$.

Наложим условие непрерывности на функции $v(\nu,y,t)$, $v_y(\nu,y,t)$ при $y=t=0$. Из соотношений (3.18), (3.19) и (3.21) нетрудно получить формулу (5.10) для $r(0)$ и $r'(0)$. Чтобы получить последнее равенство для $r'(0)$, применим соотношение $k'(0)=-r'(0)+r^2(0)$, вытекающее из (3.9). Далее мы предполагаем, что значения $r(0)$ и $r'(0)$ подставлены в $H(\nu,y)$.

Продолжим доказательство леммы. Уравнение (4.5) получается из соотношений (3.17)–(3.19). Уравнение (4.7) выводится из (4.6) интегрированием по t от точки $(0,t)$ до точки (y,t) на плоскости переменных (ξ,τ). В свою очередь, уравнение (4.5) согласуется с (3.17)–(3.20). Далее положим $y=0$ в (4.5) и используем условие (3.21) при $\nu=\nu_1$. Отсюда после простых преобразований получаем равенство (5.3), в котором для определенности мы положили $\nu=\nu_1$. На самом деле результат вычислений не должен зависеть от выбора параметра ν. Чтобы получить уравнение (5.6), применим соотношение (4.8), которое выводится из уравнения (4.5) с использованием условия (3.21). Заметим, что $\psi(\nu_1,\nu_2,t):=\bar g_{00t}(\nu_1,t)-\bar g_{00t}(\nu_2,t)$, и продифференцируем равенство (4.5) по t. Получим уравнение (5.6).

Остальные соотношения в формулировке леммы приведены для замыкания системы уравнений. Они получаются из определений функций $h(t)$, $p(t)$ и $k_0(t)$ с использованием равенства (3.9).

Утверждение об эквивалентности системы интегральных уравнений (5.1)–(5.8) и обратной задачи (3.17)–(3.19), (3.21) доказывается в обычном порядке (см., например, работу [16]). Лемма доказана.

Система интегральных уравнений (4.5), (4.7) при $\nu = \nu_j$, $j = 1, 2$, и система (5.1)–(5.8) замкнуты в области D_T и определяют единственным образом непрерывные функции v, v_t, $c(y)$, $c'(y)$, $q_0(y)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, $h(t)$, $p(t)$ при достаточно малом T. Не останавливаясь на теореме о локальной однозначной разрешимости задачи, перейдем к результатам, связанным с оценкой устойчивости и однозначной разрешимостью задачи для произвольного $T > 0$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $\Psi(s_0, d_0)$ набор из двух функций $\{c(y), k(t)\}$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ следующим условиям:

$$0 < s_{00} \leqslant c(y), \qquad \|c(y)\|_{C^2[0,T/2]} \leqslant s_0, \qquad \|k(t)\|_{C^2[0,T]} \leqslant d_0;$$

пусть, кроме того,

$$\|b(y)\|_{C[0,T/2]} \leqslant b_0, \qquad \|f(t)\|_{C[0,T]} \leqslant f_0,$$

где s_{00}, b_0, f_0 – заданные числа.

Теорема 6.1. *Пусть* $(c^{(1)}, k^{(1)}) \in \Psi(s_0, d_0)$ *и* $(c^{(2)}, k^{(2)}) \in \Psi(s_0, d_0)$ *суть решения обратной задачи* (3.17)–(3.21) *с данными*

$$\big(\bar g^{(1)}(\nu_j, t),\, b^{(1)}(y),\, f^{(1)}(t)\big), \quad \big(\bar g^{(2)}(\nu_j, t),\, b^{(2)}(y),\, f^{(2)}(t)\big), \qquad j = 1, 2,$$

соответственно. Тогда существует положительная постоянная M, *зависящая от* ν_1, ν_2, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0, *такая что выполняется следующая оценка:*

$$\|k^{(1)}(t) - k^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]} + \|c^{(1)}(y) - c^{(2)}(y)\|_{C^2[0,T/2]} \leqslant M\tilde d, \tag{6.1}$$

где

$$\tilde d := \|b^{(1)}(y) - b^{(2)}(y)\|_{C[0,T/2]} + \|f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t)\|_{C[0,T]} + \\ + \sum_{j=0}^{2} \|\bar g^{(1)}(\nu_j, t) - \bar g^{(2)}(\nu_j, t)\|_{C^2[0,T]}.$$

Теорема 6.1 очевидно влечет теорему единственности для любого $T > 0$.

Теорема 6.2. *Пусть функции* $c^{(i)}(y) \in C^2[0, T/2]$, $k^{(i)}(t) \in C^2[0, T]$ *и* $\bar g^{(i)}(\nu_j, t)$, $b^{(i)}(y)$, $f^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, *имеют то же значение, что в теореме* 6.1. *Если при этом всюду на* $[0, T]$

$$b^{(1)}(y) = b^{(2)}(y), \qquad f^{(1)}(t) = f^{(2)}(t), \qquad \bar g^{(1)}(\nu_j, t) = \bar g^{(2)}(\nu_j, t), \quad j = 1, 2,$$

то

$$c^{(1)}(y) = c^{(2)}(y), \quad y \in [0, T/2], \qquad k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t), \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Обозначим решения для данных $b^{(i)}$, $f^{(i)}$, $c^{(i)}$, $k^{(i)}$, $\bar{g}^{(i)}(\nu_j,t)$ как $v^{(ij)}(y,t)$, $i,j=1,2$. Введем обозначения

$$\tilde{b}(y)=b^{(1)}-b^{(2)},\qquad \tilde{f}(t)=f^{(1)}-f^{(2)},\quad \tilde{c}(y)=c^{(1)}-c^{(2)},\quad \tilde{k}_0(t)=k_0^{(1)}-k_0^{(2)},$$
$$\tilde{l}(y)=l^{(1)}-l^{(2)},\quad \tilde{\bar{g}}_{00}(\nu_j,t)=\bar{g}_{00}^{(1)}-\bar{g}_{00}^{(2)},\quad \tilde{h}(t)=h^{(1)}-h^{(2)},\quad \tilde{p}(t)=p^{(1)}-p^{(2)},$$
$$\tilde{v}^{(j)}(y,t)=v^{(1j)}(y,t)-v^{(2j)}(y,t),\qquad j=1,2.$$

Пусть $q_0^{(i)}(y)$, $q_1^{(i)}(y)$ и

$$H^{(ij)}(y)=r_{00}^{(i)}+q_0^{(i)}(y)-\nu_j^2q_1^{(i)}(y)+b^{(i)}(y),\qquad \widetilde{H}^{(j)}(y)=H^{(1j)}-H^{(2j)},$$
$$c_0^{(i)}=\frac{(c^{(i)})'(0)-a^{(i)}(0)}{2c^{(i)}(0)},\qquad \beta_0^{(i)}=\frac{1}{2}\big(r^{(i)}(0)-2c_0^{(i)}+\lambda\big),$$
$$r_{00}^{(i)}=-(r^{(i)})'(0)+\frac{(r^{(i)})^2(0)}{4}-\frac{3\lambda r^{(i)}(0)}{2}+\frac{\lambda^2}{4}$$

суть вспомогательные функции и числа, соответствующим этим функциям $c^{(i)}(y)$. Выпишем соответствующие интегральные соотношения для введенных функций. Из равенств (4.7) и (4.5) следует, что для $j=1,2$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^{(j)}(y,t)&=\tilde{\beta}_0-\frac{1}{2}\int_0^y\widetilde{H}^{(j)}(\xi)\,d\xi-\int_0^{t-y}\tilde{f}(\tau)\,d\tau+\tilde{c}_0\int_0^{t-y}\bar{g}_{00}(\nu_j,\tau)\,d\tau+\\
&+c_0^{(2)}\int_0^{t-y}\tilde{\bar{g}}_{00}(\nu_j,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_y^t\left[\widetilde{H}^{(j)}\left(\frac{\tau+y}{2}\right)+\widetilde{H}^{(j)}\left(\frac{\tau-y}{2}\right)\right]d\tau+\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{t-y}\left(\tilde{h}(\tau)y-\tilde{p}(\tau)\int_0^y b^{(1)}(\xi)\,d\xi-p^{(2)}(\tau)\int_0^y\tilde{b}(\xi)\,d\xi\right)d\tau+\\
&+\frac{1}{2}\int_y^t\int_0^{(\tau-y)/2}\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,\tau-y-\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y-\xi)+\\
&\quad+\tilde{h}(\tau-y-2\xi)-b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\tau-y-2\xi)-\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\tau-y-2\xi)-\\
&\quad-\int_0^{\tau-y-2\xi}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y-\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,\tau-y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha+\\
&\quad+\int_0^{\tau-y-2\xi}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y-\xi-\alpha)+\\
&\qquad\quad+(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(2j)}(\xi,\tau-y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi\,d\tau+\\
&+\frac{1}{2}\int_y^t\int_0^y\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,\tau-y+\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y+\xi)+\\
&\quad+\int_0^{\tau-y}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y+\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,\tau-y+\xi-\alpha)\big)\,d\alpha-\\
&\quad-\int_0^{\tau-y}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau-y+\xi-\alpha)+\\
&\qquad\quad+(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(2j)}(\xi,\tau-y+\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi\,d\tau+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\int_y^t\int_y^{(\tau+y)/2}\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,\tau+y-\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau+y-\xi)+\\
&\quad+\tilde{h}(\tau+y-2\xi)-b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\tau+y-2\xi)-\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\tau+y-2\xi)-\\
&\quad-\int_0^{\tau+y-2\xi}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau+y-\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,\tau+y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha+\\
&\quad+\int_0^{\tau+y-2\xi}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,\tau+y-\xi-\alpha)+\\
&\qquad+(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(2j)}(\xi,\tau+y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}_t^{(j)}(y,t)&=-\tilde{f}(t-y)+\tilde{c}_0\bar{g}_{00}^{(1)}(\nu_j,t-y)+c_0^{(2)}\bar{\tilde{g}}_{00}(\nu_j,t-y)-\\
&-\frac{1}{4}\left[\widetilde{H}^{(j)}\left(\frac{t+y}{2}\right)+\widetilde{H}^{(j)}\left(\frac{t-y}{2}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{(t-y)/2}\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,t-y-\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y-\xi)+\\
&\quad+\tilde{h}(t-y-2\xi)-b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(t-y-2\xi)-\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(t-y-2\xi)-\\
&\quad-\int_0^{t-y-2\xi}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y-\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,t-y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha+\\
&\quad+\int_0^{t-y-2\xi}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y-\xi-\alpha)+\\
&\qquad+(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(2j)}(\xi,t-y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi+\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{y}\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,t-y+\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y+\xi)-\\
&\quad-\int_0^{t-y}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y+\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,t-y+\xi-\alpha)\big)\,d\alpha+\\
&\quad+\int_0^{t-y}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t-y+\xi-\alpha)+\\
&\qquad+(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(2j)}(\xi,t-y+\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi+\\
&+\frac{1}{2}\int_y^{(t+y)/2}\Big\{\widetilde{H}^{(j)}(\xi)v^{(1j)}(\xi,t+y-\xi)+H^{(2j)}(\xi)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t+y-\xi)+\\
&\quad+\tilde{h}(t+y-2\xi)-b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(t+y-2\xi)-\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(t+y-2\xi)-\\
&\quad-\int_0^{t+y-2\xi}\big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t+y-\xi-\alpha)+\tilde{h}(\alpha)v^{(2j)}(\xi,t+y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha+\\
&\quad+\int_0^{t+y-2\xi}\big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(j)}(\xi,t+y-\xi-\alpha)+\\
&\qquad+\big(b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha)+\tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha)\big)v^{(2j)}(\xi,t+y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Big\}d\xi.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Заметим, что в этих равенствах

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{r}(0) - 2\tilde{c}_0), \qquad \tilde{c}_0 = \frac{\tilde{c}(0)(c^{(2)}(0))' - \tilde{c}'(0)c^{(2)}(0)}{2c^{(1)}(0)c^{(2)}(0)}. \tag{6.4}$$

Используя соотношения (5.1)–(5.8), находим

$$\tilde{c}(y) = \tilde{c}(0) + \int_0^y \tilde{c}'(\xi)\,d\xi, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}'(y) = \tilde{c}'(0) + \int_0^y \Bigg[&2(\tilde{c}(\xi)q_0^{(1)}(\xi) + c^{(2)}(\xi)\tilde{q}_0(\xi)) - \frac{2\tilde{c}'(\xi)}{c^{(1)}(\xi)} + \\ &+ 2\frac{(c^{(1)}(\xi))' + (c^{(2)}(\xi))'}{c^{(2)}(\xi)}\tilde{c}'(\xi) - \frac{7[(c^{(1)}(\xi))']^2 - 4(c^{(2)}(\xi))'}{2c^{(1)}(\xi)c^{(2)}(\xi)}\tilde{c}(\xi)\Bigg]d\xi,\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0(y) = &-\tilde{r}_{00} - \tilde{b}(y) + \nu_1^2\tilde{q}_1(y) - 2\tilde{f}(2y) + \\ &+ 2\tilde{c}_0\left[\bar{g}^{(1)}(\nu_1, y) - k_0^{(1)}(y) + \int_0^y k_0^{(1)}(\tau)\bar{g}^{(1)}(\nu_1, y-\tau)\,d\tau\right] + \\ &+ 2c_0^{(2)}\left[\tilde{\bar{g}}(\nu_1, y) - \tilde{k}_0(y) + \int_0^y \big(\tilde{k}_0(\tau)\bar{g}^{(1)}(\nu_1, y-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{\bar{g}}(\nu_1, y-\tau)\big)\,d\tau\right] - \\ &- \tilde{\bar{g}}_t(\nu_1, y) + \tilde{k}_0'(y) - \tilde{\bar{g}}(\nu_1, 0)k_0^{(1)}(y) - \bar{g}^{(2)}(\nu_1, 0)\tilde{k}_0(y) - \\ &- \int_0^y \big(\tilde{k}_0(\tau)\bar{g}_t^{(1)}(\nu_1, y-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{\bar{g}}_t(\nu_1, y-\tau)\big)d\tau + \\ &+ \int_0^y \Bigg\{\widetilde{H}^{(1)}(\xi)v^{(11)}(\xi, 2y-\xi) + H^{(21)}(\xi)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y-\xi) + \tilde{h}(2y-2\xi) - \\ &\quad - b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(2y-2\xi) - \tilde{b}(\xi)p^{(2)}(2y-2\xi) - \\ &\quad - \int_0^{2(y-\xi)} \big(h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y-\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha)v^{(21)}(\xi, 2y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha + \\ &\quad + \int_0^{2(y-\xi)} \big(b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y-\xi-\alpha) + \\ &\qquad + (b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(21)}(\xi, 2y-\xi-\alpha)\big)\,d\alpha\Bigg\}d\xi,\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\tilde{k}_0(t) = -\tilde{r}(0) + \left(-\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{2}(r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)) - \frac{\lambda}{2}\tilde{r}(0)\right)t + \int_0^t (t-\tau)\tilde{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{6.8}$$

$$\tilde{k}_0'(t) = -\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{2}\big(r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)\big) - \frac{\lambda}{2}\tilde{r}(0) + \int_0^t \tilde{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}_0''(t) = &-\tilde{c}_0\bar{g}_t^{(1)}(\nu_1, t) - c_0^{(2)}\tilde{\bar{g}}_t(\nu_1, t) + \tilde{\bar{g}}_{tt}(\nu_1, t) + \big(\tilde{c}_0 + \tilde{\bar{g}}(\nu_1, 0)\big)(k_0^{(1)}(t))' + \\ &+ (c_0^{(2)} + \bar{g}^{(2)}(\nu_1, 0))\tilde{k}_0'(t) + \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2)\tilde{q}_1'\left(\frac{t}{2}\right) + \\ &+ \big(c_0^{(2)}\bar{g}^{(2)}(\nu_1, 0) - \bar{g}_t^{(2)}(\nu_1, 0)\big)\tilde{k}_0(t) + \big(\tilde{c}_0\bar{g}^{(1)}(\nu_1, 0) + c_0^{(2)}\tilde{\bar{g}}(\nu_1, 0) - \tilde{\bar{g}}_t(\nu_1, 0)\big)k_0^{(1)}(t) + \\ &+ \int_0^t \Bigg[\big(\tilde{c}_0\bar{g}_t^{(1)}(\nu_1, t-\tau) + c_0^{(2)}\tilde{\bar{g}}(\nu_1, t-\tau) - \tilde{\bar{g}}_{tt}(\nu_1, t-\tau)\big)k_0^{(1)}(\tau) + \\ &\quad + \Big(c_0^{(2)}\bar{g}_t^{(2)}(\nu_1, t-\tau) - \bar{g}_{tt}^{(2)}(\nu_1, t-\tau)\Big)\tilde{k}_0(\tau)\Bigg]d\tau +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \widetilde{H}^{(1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)\beta^{(1)}\Big(\nu_1, \frac{t}{2}\Big) + H^{(21)}\Big(\frac{t}{2}\Big)\tilde{\beta}\Big(\nu_1, \frac{t}{2}\Big) - \\
&- \widetilde{H}^{(2)}\Big(\frac{t}{2}\Big)\beta^{(1)}\Big(\nu_2, \frac{t}{2}\Big) - H^{(22)}\Big(\frac{t}{2}\Big)\tilde{\beta}\Big(\nu_2, \frac{t}{2}\Big) + \\
&+ \int_0^{t/2}\Big\{ \widetilde{H}^{(1)}(\xi)v_t^{(11)}(\xi, t-\xi) + H^{(21)}(\xi)\tilde{v}_t^{(1)}(\xi, t-\xi) - \\
&\quad - \widetilde{H}^{(2)}(\xi)v_t^{(12)}(\xi, t-\xi) + H^{(22)}(\xi)\tilde{v}_t^{(2)}(\xi, t-\xi) - \\
&\quad - \big(\tilde{h}(t-2\xi) - \tilde{b}(\xi)p^{(1)}(t-2\xi) - b^{(2)}(\xi)\tilde{p}(t-2\xi)\big)\big(v^{(11)}(\xi,\xi) - v^{(12)}(\xi,\xi)\big) - \\
&\quad - \big(h^{(2)}(t-2\xi) - b^{(2)}(\xi)p^{(2)}(t-2\xi)\big)\big(\tilde{\beta}(\nu_1,\xi) - \tilde{\beta}(\nu_2,\xi)\big) - \\
&\quad - \int_0^{t-2\xi}\big[\big(\tilde{h}(\tau) - \tilde{b}(\xi)p^{(1)}(\tau) - b^{(2)}(\xi)\tilde{p}(\tau)\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \big(v_t^{(11)}(\xi, t-\xi-\tau) - v_t^{(12)}(\xi, t-\xi-\tau)\big) + \\
&\qquad + \big(h^{(2)}(\tau) - b^{(2)}(\xi)p^{(2)}(\tau)\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \big(\tilde{v}_t^{(1)}(\xi, t-\xi-\tau) - \tilde{v}_t^{(2)}(\xi, t-\xi-\tau)\big)\big]\,d\tau\Big\}d\xi, \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{h}(t) = -\tilde{k}_0''(t) - \tilde{r}_{00}k_0^{(1)}(t) - r_{00}^{(2)}\tilde{k}_0(t) - \int_0^t \big(\tilde{k}_0(\tau)h^{(1)}(t-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{h}(t-\tau)\big)d\tau, \qquad (6.11)
$$

$$
\tilde{p}(t) = -\tilde{k}_0(t) - \int_0^t \big(\tilde{k}_0(\tau)p^{(1)}(t-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{p}(t-\tau)\big)d\tau; \qquad (6.12)
$$

здесь

$$
\tilde{r}_{00} = -\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{4}\big(r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)\big) - \frac{3\lambda\tilde{r}(0)}{2}. \qquad (6.13)
$$

Оценим функции в системе уравнений (6.2)–(6.13) в области D_T через величину $\tilde{d}$ из теоремы 6.1. Область D_T может быть эквивалентным образом задана как

$$
D_T := \Big\{(y,t)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} - \Big|\frac{T}{2} - t\Big|,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\}.
$$

Пусть

$$
\begin{aligned}
\omega(t) = \max\Big\{ &\max_{0\leqslant y\leqslant T/2-|T/2-t|}|\tilde{v}^{(j)}(y,t)|,\ \max_{0\leqslant y\leqslant T/2-|T/2-t|}|\tilde{v}_t^{(j)}(y,t)|, \\
&\max_{0\leqslant y\leqslant T/2-|T/2-t|}|\tilde{c}(y)|,\ \max_{0\leqslant y\leqslant T/2-|T/2-t|}|\tilde{c}'(y)|,\ \max_{0\leqslant y\leqslant T/2-|T/2-t|}|\tilde{q}_0(y)|, \\
&d|\tilde{k}_0(t)|,\ |\tilde{k}_0'(t)|,\ |\tilde{k}_0''(t)|,\ |\tilde{h}(t)|,\ |\tilde{p}(t)|\Big\}, \qquad t\in[0,T],\ j=1,2.
\end{aligned}
$$

По лемме 4.1 функции $v^{(ij)}$ дифференцируемы в D_T и удовлетворяют оценке

$$
\|v^{(ij)}\|_{C^1(D_T)} \leqslant m_1, \qquad i,j = 1,2, \qquad (6.14)
$$

при некоторой постоянной m_1, зависящей только от ν_1, ν_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0. Функции $G^{(i)}(t) = \bar{g}^{(i)}(\nu_1,t) - \bar{g}^{(i)}(\nu_2,t)$, $i=1,2$, суть следы функций $v^{(i1)}(y,t) - v^{(i2)}(y,t)$

при $y = 0$, и для каждой из них, как это следует из (6.14), (4.8), выполняется аналогичная (6.14) оценка, отсюда мы имеем неравенство

$$\|G^{(i)}(t)\|_{C^2(D_T)} \leqslant m_2, \quad i = 1, 2,$$

в котором постоянная m_2 зависит от тех же параметров, что и m_1. Из соотношений (6.14), (3.21) следует, что функции $\bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)$ должны быть ограничены постоянной m_1:

$$\|\bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)\|_{C^1[0,T]} \leqslant m_1, \qquad i, j = 1, 2.$$

Числа $c^{(i)}(0)$, $(c^{(i)})'(0)$, $r^{(i)}(0)$, $(r^{(i)})'(0)$, $i = 1, 2$, заданные формулами (5.9), (5.10) через ν_1, ν_2, G', по тем же причинам ограничены постоянной m_3, которая зависит от тех же параметров, что и m_j, $j = 1, 2$. Следовательно, для $c_0^{(i)}$, $\tilde{c}_0$, $\beta_0^{(i)}$, $\tilde{\beta}_0$, $r_{00}^{(i)}$, $\tilde{r}_{00}$, выражающихся через $c^{(i)}(0)$, $(c^{(i)})'(0)$, $r^{(i)}(0)$, $(r^{(i)})'(0)$, $i = 1, 2$, с помощью формул (6.5), (6.13), имеют место оценки

$$\max\bigl\{|c_0^{(i)}|,\, |\beta_0^{(i)}|,\, |r_{00}^{(i)}|\bigr\} \leqslant m_4, \qquad \max\bigl\{|\tilde{c}_0|,\, |\tilde{\beta}_0|,\, |\tilde{r}_{00}|\bigr\} \leqslant \theta m_5,$$

где m_4, m_5 – некоторые постоянные, зависящие от ν_1, ν_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0. Напомним, что θ задана в теореме 6.1.

Далее, функции $q_0^{(i)}(y)$, $q_1^{(i)}(y)$, $H^{(ij)}(y)$, определяющиеся через $r_{00}^{(i)}$, $c^{(i)}(y)$, $b^{(i)}(y)$ и ν_j, $i, j = 1, 2$, аналогичным образом удовлетворяют неравенствам

$$\|q_0^{(i)}(y)\|_{C^2[0,T/2]} \leqslant m_6, \qquad \|q_1^{(i)}(y)\|_{C^2[0,T/2]} \leqslant m_7,$$
$$\|H^{(ij)}(y)\|_{C^2[0,T/2]} \leqslant m_8, \qquad i, j = 1, 2,$$

где m_6, m_7, m_8 зависят от тех же параметров, что и остальные константы.

С учетом вышеизложенного перейдем к оценке в области D_T функций $\tilde{v}^{(j)}$, удовлетворяющих интегральным уравнениям (6.2). Заметим, что эти уравнения, как и все остальные, содержат члены, содержащие только известные величины и члены с неизвестными функциями. В правой части уравнения (6.2) первые четыре слагаемых зависят от известных функций и чисел и поэтому в совокупности оцениваются значением $A_1\tilde{d}$ с константой A_1, зависящей от m_i, $i = 1, \ldots, 8$. Как легко видеть, оставшиеся слагаемые в правой части оцениваются в области D_T интегралом вида

$$\kappa_1 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau,$$

где множитель κ_1 зависит только от постоянных m_i, $i = 1, \ldots, 8$, которые, в свою очередь, зависят от ν_1, ν_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0. Таким образом,

$$|\tilde{v}^{(j)}(y, t)| \leqslant A_1\tilde{d} + \kappa_1 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \qquad (y, t) \in D_T, \qquad j = 1, 2. \tag{6.15}$$

Из уравнений (6.5), (6.6) мы можем видеть, что $\tilde{c}(y)$, $\tilde{c}'(y)$ оцениваются аналогично:

$$\left.\begin{aligned} |\tilde{c}(y)| &\leqslant A_2\tilde{d} + \kappa_2 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \\ |\tilde{c}'(y)| &\leqslant A_3\tilde{d} + \kappa_3 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \end{aligned}\right. \qquad y \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \tag{6.16}$$

Здесь постоянные A_i, κ_i, $i = 2, 3$, зависят от тех же параметров, что и A_1, κ_1.

Используем неравенства (6.16) для оценки функций

$$\tilde{q}_1(y) = \tilde{c}(y)\big[c^{(1)}(y) + c^{(2)}(y)\big], \qquad \tilde{q}_1'(y) = 2\big[\tilde{c}(y)(c^{(1)}(y))' + c^{(2)}(y)\tilde{c}'(y)\big],$$

стоящих во внеинтегральных членах в правых частях уравнений (6.7), (6.8). Аналогично получаем неравенства

$$|\tilde{q}_0(y)| \leqslant A_4\tilde{d} + \kappa_4 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \qquad |\tilde{k}_0(t)| \leqslant A_5\tilde{d} + \kappa_5 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \tag{6.17}$$

а также неравенства для $\tilde{k}_0'(t)$, $\tilde{k}_0''(t)$, $\tilde{h}(t)$, $\tilde{p}(t)$:

$$|\tilde{k}_0'(t)| \leqslant A_6\tilde{d} + \kappa_6 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \qquad |\tilde{k}_0''(t)| \leqslant A_7\tilde{d} + \kappa_7 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \tag{6.18}$$

$$|\tilde{h}(t)| \leqslant A_8\tilde{d} + \kappa_8 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \qquad |\tilde{p}(t)| \leqslant A_9\tilde{d} + \kappa_9 \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau. \tag{6.19}$$

Применим неравенства (6.16)–(6.19) в оценках функций $\widetilde{H}^{(j)}$ во внеинтегральных членах уравнений (6.3), чтобы вывести оценки для функций $\tilde{v}_t^{(j)}(y,t)$:

$$|\tilde{v}_t^{(j)}(y,t)| \leqslant A_{10}\tilde{d} + \kappa_{10} \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau, \qquad j = 1, 2. \tag{6.20}$$

В полученных неравенствах постоянные A_i, κ_i, $i = 4, \ldots, 10$, через постоянные m_i, $i = 1, \ldots, 8$, зависят только от параметров ν_1, ν_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0. Из соотношений (6.15)–(6.20) следует, что $\omega(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$\omega(t) \leqslant A\tilde{d} + \kappa \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau,$$

где новые постоянные A, κ зависят только от ν_1, ν_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0. Отсюда, используя неравенство Гронуолла, выводим оценку (6.1).

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S. A. Chivilikhin, V. V. Gusarov, I. Yu. Popov, “Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum models”, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **3**:1 (2012), 7–26.

[2] A. Dvurechenskii, M. Alfimov, I. Suzdalev et al., “IV Nanotechnology International Forum 2011 (RUSNANOTECH 2011)”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **345**:1 (2012), 011001.

[3] F. Colombo, D. Guidetti, “A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17**:4 (2007), 537–565.

[4] F. Colombo, D. Guidetti, “Some results on the Identification of memory kernels”, *Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations*, Operator Theory: Advances and Applications, **216**, eds. M. Ruzhansky, J. Wirth, Springer, Basel, 2011, 121–138.

[5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.

[6] С. И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука, Новосибирск, 1989.

[7] С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков, М. А. Бектемесов, М. А. Шишленин, *Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач*, ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 2011.

[8] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

[9] Д. К. Дурдиев, "Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **12**:3 (2009), 28–40.

[10] D. K. Durdiev, "An identification problem of memory function of a medium and the form of an impulse source", *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **2**:2 (2009), 127–136.

[11] J. Janno, L. Von Welfersdorf, "Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity", *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:4 (1997), 291–314.

[12] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, "Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости", *Владикавк. матем. журн.*, **17**:4 (2015), 18–43.

[13] В. Г. Романов, "Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **15**:1 (2012), 86–98.

[14] В. Г. Романов, "О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника", *Сиб. матем. журн.*, **48**:4 (2007), 867–881.

[15] Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров, "Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области", *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 855–867.

[16] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, "Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:2 (2013), 72–82.

[17] D. K. Durdiev, "Inverse problem for the identification of a memory kernel from Maxwell's system integro-differential equations for a homogeneous anisotropic media", *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **6**:2 (2015), 268–273.

[18] D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov, "A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity", *Math. Methods Appl. Sci.*, **43**:15 (2020), 8776–8796.

[19] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, "Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость", *ТМФ*, **195**:3 (2018), 491–506.

[20] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, "Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **23**:2 (2020), 63–80.

[21] Д. К. Дурдиев, "Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью", *Математический анализ и дискретная математика*, НГУ, Новосибирск, 1989, 19–26.

[22] Д. К. Дурдиев, "К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегродифференциального уравнения", *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 69–77.

[23] У. Д. Дурдиев, "Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **17** (2020), 179–189.

[24] U. D. Durdiev, "A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation", *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, **7**:2 (2019), 4–19.

[25] U. Durdiev, Z. Totieva, "A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation", *Math. Methods Appl. Sci.*, **42**:18 (2019), 7440–7451.

[26] У. Д. Дурдиев, "Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **22**:4 (2019), 26–32.

[27] Д. К. Дурдиев, У. Д. Дурдиев, "Устойчивость решения обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде", *Узбек. матем. журн.*, 2014, № 2, 25–34.

[28] А. Л. Бухгейм, М. В. Клибанов, “Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач”, *Докл. АН СССР*, **260**:2 (1981), 269–272.

[29] А. Л. Бухгейм, В. Г. Яхно, “О двух обратных задачах для дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **229**:4 (1976), 785–786.

[30] Z. R. Bozorov, “Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect”, *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, **8**:2 (2020), 28–40.

[31] З. Р. Бозоров, “Задача определения двумерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **23**:1 (2020), 28–45.

[32] Ж. Д. Тотиева, “Одномерные обратные коэффициентные задачи анизотропной вязкоупругости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 786–811.

[33] Ж. Д. Тотиева, Д. К. Дурдиев, “Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости”, *Матем. заметки*, **103**:1 (2018), 129–146.

[34] Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении коэффициента теплового расширения уравнения термовязкоупругости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **14** (2017), 1108–1119.

[35] J. Jaan, L. Von Wolfersdorf, “An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity”, *Inverse Problems*, **17**:1 (2001), 13–24.

[36] А. Л. Карчевский, “Алгоритм восстановления упругих постоянных анизотропного слоя, находящегося в изотропной горизонтально-слоистой среде”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **4** (2007), 20–51.

[37] A. Favaron, “Identification of memory kernels depending on time and on an angular variable”, *Z. Anal. Anwendungen*, **24**:4 (2005), 735–762.

[38] A. Lorenzi, “An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation”, *Nonlinear Anal.*, **22**:1 (1994), 297–321.

[39] A. Lorenzi, E. Paparoni, “Direct and inverse problems in the theory of materials with memory”, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, **87** (1992), 105–138.

[40] A. Lorenzi, V. I. Priimenko, “Identification problem related to electro-magneto-elastic interactions”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **4**:2 (1996), 115–143.

[41] V. I. Priimenko, M. P. Vishnevskii, “An identification problem related to the Biot system”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **23**:3 (2015), 219–230.

[42] V. I. Priimenko, M. P. Vishnevskii, “Nonlinear mathematical problems of electromagnetoelastic interaction”, *Nonlinear Analysis Research Trends*, ed. I. N. Roux, Nova Sci., New York, 2008, 99–155.

[43] A. A. Rahmonov, “Coefficient determination problem in the system of integro-differential equation for visco-elastic porous medium”, *Uzbek Math. J.*, **2020**:1 (2020), 102–115.

[44] A. L. Karchevsky, V. G. Yakhno, “One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **7**:4 (1999), 329–346.

[45] А. Л. Карчевский, А. Г. Фатьянов, “Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **4**:3 (2001), 259–268.

[46] A. L. Karchevsky, Y. M. Turganbayev, S. G. Rakhmetullina, Zh. T. Beldeubayeva, “Numerical solution of an inverse problem of determining the parameters of a source of groundwater pollution”, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, **5**:1 (2017), 53–73.

[47] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию 14.12.2020,
после доработки 30.12.2020,
принята к публикации 3.01.2021