МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения»

17-18 ноября 2020 г.

I

Ташкент-2020

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения»

17-18 ноября 2020 г.

I

Ташкент-2020

Современные методы математической физики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых (17–18 ноября 2020 г., Ташкент) Главный редактор Р.Р. Ашуров. – Ташкент, 2020 г. №1., 466 с.

Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых по **«Современные методы математической физики и их приложения»** содержит научные доклады по следующем направлениям: спектральная теория дифференциальных операторов, краевые задачи для уравнений математической физики, вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа, алгебра и анализ, динамические системы, математическое моделирование и вычислительная математика, стохастические методы и их приложения.

Данная конференция организована в соответствии с распоряжением КМ РУз №56 – Ф от 07.02.2020.

Предназначен для специалистов в области физико-математических наук и информационных технологий, преподавателей, докторантов и магистрантов ВУЗов.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2020

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ:

Председатель:
Марахимов А.Р. - ректор НУУз.
Сопредседатель:
Аюпов Ш.А. - директор Института математики АН РУз.
Заместители председателя:
Ашуров Р.Р. - зав. отделом, Институт математики АН РУз,
Зикиров О.С. - декан мат. факультета НУУз.

Члены оргкомитета:

Арипов М.М. (Ташкент),
Бердышев А.С. (Алматы),
Ворисов А.К. (Ташкент),
Карачик В.В. (Челябинск),
Касимов Ш.Г. (Ташкент),
Мирсабуров М. (Термез),
Рахимов А.А. (Ташкент, Куала-Лумпур),
Тахиров Ж.О. (Ташкент),
Тухтасинов М. (Ташкент),
Уринов А.К. (Фергана),
Халмухамедов А.Р. (Ташкент),
Хасанов А.Б. (Самарканд).
Ашыралиев А. (Туркменистан),
Будаев В.Д. (Санкт Петербург),
Исломов Б. (Ташкент),
Каримов Э.Т. (Ташкент),
Лакаев С.Н. (Самарканд),
Пятков С.Г. (Россия),
Садыбеков М.А. (Алматы),
Турметов Б.Х. (Туркестан),
Умаров С.Р. (Ташкент),
Хаджиев Дж. Х. (Ташкент),
Хасанов А. (Ташкент),

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель:
Алимов Ш.А. - академик АН РУз (Узбекистан)
Сопредседатель:
Моисеев Е.И. - академик РАН (Россия)

Члены программного комитета:

Азамов А. - академик АН РУз (Узбекистан),
Гольдман М.Л. - профессор (Россия),
Денисов В.Н. - профессор (Россия),
Икромов И.А. - профессор (Узбекистан),
Ишанкулов Т.М. - профессор (Узбекистан),
Кальменов Т.Ш. - академик НАН РК, (Казахстан),
Кожанов А.И. - профессор (Россия),
Кудрявцев В.Б. - академик (Россия),
Ломов И.С. - профессор (Россия),
Маматов М.Ш. - профессор (Узбекистан),
Мирахмедов Ш. - профессор (Узбекистан),
Отелбаев М. - академик НАН РК (Казахстан),
Псху А.В. - профессор (Россия),
Раджабов Н.Р. - академик АН Таджикистана (Таджикистан),
Сабитов К.Б. - профессор (Россия),
Садуллаев А. - академик АН РУз. (Узбекистан),
Солдатов А.П. - профессор (Россия),

Фаязов К.С.	- профессор (Узбекистан),
Чилин В.И.	- профессор (Узбекистан).

СЕКРЕТАРИАТ КОНФЕРЕНЦИИ:

Буваев К.Т.,	Сайдаматов Э.М.,	Файзиев Ю.Э.,
Кучкаров Э.И.,	Аликулов Т.Н.,	Отаев Ш.К.,
Шералиев Ш.Н.,	Пирматов Ш.Т.,	Бабаев М.М.,
Мадрахимов У.С.,	Комилов Н.М.,	Хаитбоев Г.С.,
Тургунов К.К.,	Дехконов Ф.Н.,	Рахмонов Ф.Д.

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Институт математики имени В.И.Романовского

КОНФЕРЕНЦИЮ ПОДДЕРЖАЛИ:

Комитет по координации развития науки и техналогий при КМ РУз.,
Грант ОТ-Ф-4-(36+32)

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ СКОРОСТЬ И ПАМЯТЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Дурдиев У. Д.[1], Бозоров Р. З.[2], Рахмонов А. А.[3]

[1,2,3]Бухарский государственной университет, Бухара, Узбекистан;

[1,2]Старший научный сотрудник Бухарского филиала Института математики им. В.И. Романовского АН РУз.

[3]Младший научный сотрудник Бухарского филиала Института математики им. В.И. Романовского АН РУз; umidjon93@mail.ru; zavqiddinbozorov2011@mail.ru; a.raxmonov@mathinst.uz

Рассматривается задача об определении двух коэффциентов, один из которых находится под знаком интеграла в гиперболическом уравнении и представляет память среды, другой определяет скорость слоистой среды, по методу, близкому работе [1, 2]. В качестве дополнительной информации задается образ Фурье следа решения прямой задачи на гиперплоскости $z = 0$ для двух различных значений параметра преобразования. Установлены оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи и теорема единственности.

0. Пастановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - Au - \bar{b}(z)u + u_t = \int\limits_0^t k(t-\tau)Au(x,z,\tau)d\tau, \qquad (0.1)$$

при условиях

$$u\Big|_{t<0} \equiv 0, \qquad (0.2)$$

$$\Big[u_z(x,z,t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)u_z(x,z,\tau)d\tau\Big]_{z=+0} = \delta(x)\delta'(t) + \delta(x)\theta(t)f(t), \qquad (0.3)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $(x,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{R} :\ z > 0\}$, $\delta(\cdot)-$дельта функция Дирака, $A-$ дифференциальный оператор, имеющий вид

$$Au = \mu(z)\triangle u + \bar{a}(z)u_z,$$

$\triangle-$оператор Лапласа по переменным (x,z) и $\bar{a}(z), \bar{b}(z),\ f(t)-$заданные гладкие функции. В этих уравнениях коэффициент $\mu(z)$ является положительной функцией класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, а $k(t),\ f(t)-$непрерывные функции.

При заданных функциях $\mu(z)$, $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$ задачу нахождения функции $u(x,y,t)$, удовлетворяющей (в обобщенном смысле) равенствам (0.1), (0.2), (0.3), назовем прямой задачей. Предположим, что решение этой задачи задано на границе области $\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}$

$$u\Big|_{z=+0} = g(x,t),\ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2. \qquad (0.4)$$

Обратная задача заключается в определении двух функций $\mu(z)$, $k(t)$ по заданной функции $g(x,t)$.

1. Предварительные построения и основной результат.

Введем в рассмотрение билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L[k(t), u(x,z,t)] = u(x,z,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(x,z,\tau)d\tau.$$

В дальнейшем, для сокращения записи, иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных.

Обозначим через $\tilde{u} = F[u](\nu,z,t)$ преобразование Фурье функции $u(x,y,t)$ по переменной x:

$$\tilde{u}(\nu,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x,z,t)e^{i\nu x}dx.$$

При заданных функциях $\mu(z)$, $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$ задача (0.1)-(0.3) корректно поставлена и она имеет единственное решение $u(x,z,t)$, обладающее компактным носителем при любом конечном t. Уравнения (0.1)-(0.3) относительно функции $\tilde{u}(\nu,z,t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \Big(\mu(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{a}(z)\frac{\partial}{\partial z} - \nu^2\mu(z)\Big)L[k,\tilde{u}] + \bar{b}(z)\tilde{u} - \tilde{u}_t,\ (\nu,z,t) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}, \qquad (1.1)$$

$$\tilde{u}\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}L[k,\tilde{u}]\Big|_{z=+0} = \delta'(t) + \theta(t)f(t). \qquad (1.2)$$

Введем вместо z новую переменную y по формуле

$$y = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\mu(s)}}. \qquad (1.3)$$

Определяемая этим равенством функция $z = l(y)$ является монотонной и определяет взаимно однозначное соответствие между z и y. Обозначим $c(y) := \sqrt{\mu\big(l(y)\big)}$ и положим $\tilde{u}(\nu,z,t) = \bar{u}(\nu,y,t)$. Тогда в терминах функций $\bar{u}(\nu,y,t)$ и переменной y уравнения (1.1)-(1.2), (0.4) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{a(y)-c'(y)}{c(y)}\frac{\partial}{\partial y} - \nu^2c^2(y)\Big)L[k,\bar{u}] + b(y)\bar{u} - \bar{u}_t, \qquad (1.4)$$

$$\bar{u}\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}L[k,\bar{u}]\Big|_{y=+0} = \delta'(t) + \theta(t)f(t), \qquad (1.5)$$

$$\bar{u}\Big|_{y=0} = \tilde{g}(\nu,t). \qquad (1.6)$$

в которых

$$a(y) = \bar{a}(z), \quad b(y) = \bar{b}(z), \quad \tilde{g}(\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)e^{i\nu x}dx. \qquad (1.7)$$

Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (1.4) так, чтобы, во-первых, оно не содержало производных функции $\bar{u}$ по y под интегралом, и, во-вторых, чтобы коэффициенты при производных $\bar{u}_y$ и $\bar{u}_t$ в слагаемых вне интеграла были равны нулю. Эти требования можно удовлетворить, введя новую функцию

$$v(\nu,y,t)=\Big[\bar{u}(\nu,y,t)+\int\limits_0^t k(t-\tau)\bar{u}(\nu,y,\tau)d\tau\Big]\sqrt{\frac{c(0)}{c(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{a(s)}{c(s)}ds}\cdot e^{(1-k(0))t/2}. \tag{1.8}$$

Как нетрудно проверить прямыми вычислениями, функция $\bar{u}$ выражается через v следующим образом:

$$\bar{u}(\nu,y,t)=\Big[e^{(k(0)-1)t/2}v(\nu,y,t)+\int\limits_0^t r(t-\tau)e^{(k(0)-1)\tau/2}v(\nu,y,\tau)d\tau\Big]e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{a(s)}{c(s)}ds}\sqrt{\frac{c(y)}{c(0)}}, \tag{1.9}$$

где

$$r(t)=-k(t)-\int\limits_0^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau. \tag{1.10}$$

Введем следующие обозначения:

$$r_{00}:=k'(0)-\frac{3}{4}k^2(0)+\frac{1}{2}k(0)+\frac{1}{4},\quad c_0:=\frac{c'(0)-a(0)}{2c(0)}.$$

В новых функциях $\bar{u}(\nu,y,t)$ и $r(t)$ задача (1.4)-(1.6) записывается как

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+H(\nu,y)v(\nu,y,t)-\int\limits_0^t h(t-\tau)v(\nu,y,\tau)d\tau+b(y)\int\limits_0^t p(t-\tau)v(\nu,y,\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

$$v\Big|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.12}$$

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial y}+c_0 v\Big)\Big|_{y=+0}=\delta'(t)-\frac{1+r(0)}{2}\delta(t)+\theta(t)f_0(t), \tag{1.13}$$

$$v\Big|_{y=+0}=\tilde{g}_0(\nu,t)+\int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\nu,\tau)d\tau, \tag{1.14}$$

в которых

$$H(\nu,y):=r_{00}+q_0(y)-\nu^2 q_1(y)+b(y), \tag{x}$$

$$q_0(y):=\frac{1}{4c^2(y)}\Big(2c(y)[c''(y)-a(y)]-3c'^2(y)+4c'(y)a(y)-\big(a(y)\big)^2\Big),\quad q_1(y)=c^2(y),$$

$$\tilde{g}_0(\nu,t):=e^{(1+r(0))t/2}\tilde{g}(\nu,t),\quad k_0(t):=e^{(1+r(0))t/2}k(t),\quad f_0(t):=e^{(1+r(0))t/2}f(t),$$

$$h(t):=e^{(1+r(0))t/2}r''(t)+e^{(1+r(0))t/2}r'(t),\quad p(t):=e^{(1+r(0))t/2}r(t).$$

В условии (1.13) мы использовали равенство $k(0)=-r(0)$, вытекающее из (1.10). Из равенств (1.11), (1.13) следует, что $v\equiv 0$ при $t<y$, $\nu\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}_+$. Функция $v(\nu,y,t)$

как решение прямой задачи (1.11)-(1.13) имеет в окрестности характеристической поверхности $t = y$ следующую структуру:

$$v(\nu, y, t) = -\delta(t-y) + \theta(t-y)\tilde{v}(\nu, y, t). \tag{1.15}$$

Тогда $v(\nu, y, t)$ при фиксированном ν в области $t > y > 0$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} v_{tt} = v_{yy} + H(\nu, y)v(\nu, y, t) + h(t-y) - b(y)p(t-y) - \\ - \int\limits_0^{t-y} h(\tau)v(\nu, y, t-\tau)d\tau + b(y)\int\limits_0^{t-y} p(\tau)v(\nu, y, t-\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{1.16}$$

Из (1.15) следует, что

$$v\Big|_{t=y+0} = \frac{1}{2}\big(r(0) + 1 - 2c_0\big) - \frac{1}{2}\int\limits_0^y H(\nu, \xi)d\xi, \quad \nu \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+, \tag{1.17}$$

$$(v_y + c_0 v)\Big|_{y=0} = f_0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.18}$$

Заметим, что для разрешимости обратной задачи, как следует из представления (1.14), функция $\tilde{g}_0(\nu, t)$ должна иметь следующую структуру:

$$\tilde{g}_0(\nu, t) = -\delta(t-y) + \theta(t-y)\bar{g}(\nu, t), \quad (\nu, t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1.19}$$

где функция $\bar{g}(\nu, t)$ по аргументу t удовлетворяет некоторым условиям гладкости, о которых будет сказано ниже. В связи с этим дополнительная информация (1.14) для функции v выглядит как

$$v\Big|_{y=0} = \bar{g}_{00}(\nu, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.20}$$

где

$$\bar{g}_{00}(\nu, t) = \bar{g}(\nu, t) - k_0(t) + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\bar{g}(\nu, \tau)d\tau.$$

Лемма. *Пусть $(a(y), b(y)) \in C[0, T/2]$, $c(y) \in C^2[0, T/2]$, $f(t) \in C[0, T]$, $k(t) \in C^2[0, T]$ при некотором $T > 0$. Тогда при каждом фиксированном значении параметра ν решение задачи (1.16)-(1.18) для*

$$(y, t) \in D_T, \quad D_T = \big\{(y, t):\ 0 \le y \le t \le T - y\big\}$$

принадлежит функциональному классу $C^1(D_T)$ и для решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^1(D_T)} \le d\Big(\|a(y)\|_{C[0,T/2]} + \|b(y)\|_{C[0,T/2]} + \|c(y)\|_{C^2[0,T/2]} + \\ + \|f(t)\|_{C[0,T]} + \|k(t)\|_{C^2[0,T]}\Big), \end{aligned}$$

где d зависит лишь от T, ν, $\|a(y)\|_{C[0,T/2]}$, $\|b(y)\|_{C[0,T/2]}$, $\|c(y)\|_{C^2[0,T/2]}$ и $\|k(t)\|_{C^2[0,T]}$. Кроме того, функция

$$\psi(\nu_1, \nu_2, t) = v_t(\nu_1, 0, t) - v_t(\nu_2, 0, t)$$

при любых фиксированных ν_j, $j = 1, 2$ *является функцией класса* $C^1[0, T]$.

Обозначим через $A(s_0, d_0)$ $\{c(y),\, k(t)\}$ $T > 0$

$$0 < s_{00} \leq c(y), \quad \|c(y)\|_{C^3[0,T/2]} \leq s_0, \quad \|k(t)\|_{C^2[0,T]} \leq d_0.$$

Кроме того,

$$\|a(y)\|_{C[0,T/2]} \leq a_0, \quad \|b(y)\|_{C[0,T/2]} \leq b_0, \quad \|f(t)\|_{C[0,T]} \leq f_0,$$

в котором a_0, b_0, f_0-известные числа.

Теорема 1. *Пусть* $(c^1, k^1) \in A(s_0, d_0)$, $(c^2, k^2) \in A(s_0, d_0)-$*решения обратной задачи (1.16)-(1.20) с данными*

$$\Big(\bar{g}^1(\nu_j, t),\, a^1(y),\, b^1(y),\, f^1(t)\Big), \quad \Big(\bar{g}^2(\nu_j, t),\, a^2(y),\, b^2(y),\, f^2(t)\Big),$$

$j = 1, 2$, *соответственно. Тогда найдется положительное постоянное* M, *зависящее от* ν_1, ν_2, s_0, s_{00}, d_0, a_0, b_0, f_0, *что выполняется оценка*

$$\|k^1 - k^2\|_{C^2[0,T]} + \|c^1 - c^2\|_{C^3[0,T/2]} \leq M\lambda,$$

в котором

$$\lambda = \sum_{j=0}^{2} \|\bar{g}^1(\nu_j, t) - \bar{g}^2(\nu_j, t)\|_{C^2[0,T]} +$$

$$+\|a^1 - a^2\|_{C[0,T/2]} + \|b^1 - b^2\|_{C[0,T/2]} + \|f^1 - f^2\|_{C[0,T/2]}.$$

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает следующая теорема единственности для любого $T > 0$.

Теорема 2. *Пусть функции* $c^i \in C^3[0, T/2]$, $k^i \in C^2[0, T]$ *и* $\bar{g}^i(\nu_j, t)$, $a^i(y)$, $b^i(y)$, $f^i(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Если при этом*

$$\bar{g}^1(\nu_j, t) = \bar{g}^2(\nu_j, t),\, j = 1, 2,\, a^1(y) = a^2(y),\, b^1(y) = b^2(y),\, f^1(t) = f^2(t),$$

для $t \in [0, T]$, *то*

$$c^1(y) = c^2(y),\, y \in [0, T/2], \quad k^1(t) = k^2(t),\, t \in [0, T].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последействием. Ташкент.: TURON-IQBOL, 2014.

2. Дурдиев Д.К. Задача определения функции памяти среды и регулярной части импульсного источника // Матем. заметки, 2009. Т.86, No 2. С. 202–212.