Matematika Instituti Byulleteni

Bulletin of the Institute of Mathematics

Бюллетень Института Математики

2024

7(2)

ISSN 2181-9483

http://mib.mathinst.uz

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi
V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti

O‘zbekiston Matematika
Jamiyati

Matematika Instituti Byulleteni

Bulletin of the Institute of Mathematics

Бюллетень Института Математики

2024
7(2)

ISSN 2181-9483

http://mib.mathinst.uz

“Matematika instituti byulleteni” elektron jurnali tahririyat a’zolari haqida ma’lumot

Familiyasi va ismi	Ilmiy soha	Elektron pochtasi
Bosh muharrir		
Shavkat Ayupov	Algebra va funksional analiz	sh_ayupov@mail.ru
Boshqaruvchi muharrir		
Erkinjon Karimov	Differensial tenglamalar va matematik fizika	erkinjon@gmail.com
Faxriy muharrirlar		
Shavkat Alimov	Differensial tenglamalar va matematik fizika	sh_alimov@mail.ru
Abdulla Azamov	Dinamik sistemalar, o‘yinlar nazariyasi	abdulla.azamov@gmail.com
Shakir Formanov	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika	shakirformanov@yandex.ru
Saidahmad Lakayev	Differensial tenglamalar va matematik fizika	slakaev@mail.ru
O‘tkir Roziqov	Funksional analiz	rozikovu@mail.ru
Azimboy Sadullaev	Matematik analiz	sadullaev@mail.ru
Javvad Xajiyev	Funksional analiz	khdjavvat@gmail.com
Chet ellik muharrirlar		
Nasser Al-Salti (O‘mon sultonligi)	Differensial tenglamalar va matematik fizika	alsalti@nu.edu.om
Andrey Dorogovtsev (Rossiya Federatsiyasi)	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika	andrey.dorogovtsev@gmail.com
Anatoliy Kusraev (Rossiya Federatsiyasi)	Funksional analiz	kusraev@smath.ru
Alberto Elduque (Ispaniya)	Algebra va sonlar nazariyasi	elduque@unizar.es
Bruno Antonio Pansera (Italiya)	O‘yinlar nazariyasi	bruno.pansera@unirc.it
Luckraz Shravan (Xitoy Xalq Respublikasi)	Dinamik sistemalar, o‘yinlar nazariyasi	sluckraz@hotmail.com
Niyaz Tokmagambetov (Ispaniya)	Garmonik analiz	niyaz.tokmagambetov@gmail.com
Muharrirlar		
Bahrom Abdullayev	Matematik analiz	abakhrom1968@mail.ru
Jobir Adashev	Algebra va sonlar nazariyasi	adashevjq@mail.ru
Abdulaziz Artikbaev	Geometriya va topologiya	aartykbaev@mail.ru

Mundarija

Khadjiyev Dj. Evklid fazosidagi gipersirtlar invariantlari Bonnet sistemasining minimalligi haqida ………………………………………………………………………………...................... 1

Ergashova Sh. Yuqori o‘lchamli fazolarda Gamilton sistemalari geometriyasi.................... 7

Sobirov Z. Metrik grafda Hilfer kasr tartibli hosilasi bilan berilgan psevdo-subdiffuziya tenglamasi uchun teskari manba masalalari……………………………………………….... 14

G‘oziyev Q. Uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun siljish shartli chegaraviy masalalar……………………………..…………………………………………….. 25

Djamalov S., Xalxadjayev B., Yusupov Sh. To‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal masalaning bir qiymatli yechilishi haqida………………….. 35

Durdiyev U. Balka tebranishining integro-differensial tenglamasida yadroni aniqlash masalasi………………………………………………………………………………………. 42

Ibragimov M. Neytral SFS-fazoning dual fazosida geometrik tripotentlar panjaralari orasidagi morfizmlarning xossalari……………………………………………………….. 50

Karimov K, Shokirov A. Singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi uch o‘lchovli tenglama uchun Gellerstedt masalasi……………………………………………………………... 57

Oripov Sh. Geometrik o‘zgaruvchilarga ta’sir qiluvchi Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi…………………………………………… 71

Raximov B. Differensial mansublik trayektoriyalar ansamblining boshqariluvchanlik shartlari haqida………………………………………………………………………………. 83

Tulakova Z. Uchta singulyar koeffitsiyentli uch o‘lchovli elliptik tenglama uchun aralash masalalar……………………………………………………………………………………… 92

Hasanov A., Normururodov H. Cheksiz zonali davriy funksiyalar sinfida qo‘shimcha hadli modifitsirlangan Korteveg-de Friz-sinus Gordon tenglamasi uchun Koshi masalasi………………………………………………………………………………………. 105

Xodjibayev V., Ataxujayev A. Batamom yutqazish ehtimolligi uchun tengsizliklar haqida………………………………………………………………………………………. 122

Contents

Khadjiev Dj. On minimality of the Bonnet system of invariants of a hypersurface in a Euclidean space……………………………………………………………………..…….. 1
Ergashova Sh. Geometry of Hamiltonian systems on the high dimensional space………… 7
Sobirov Z. Inverse source problems for pseudo-subdiffusion equation with the Hilfer fractional derivative on a metric graph…….…………………………………………………… 14
Gaziev K. Boundary value problems with shift condition for a third order parabolic-hyperbolic equation …..…………………………………………………………………… 25
Dzhamalov S., Khalkhadjayev B., Yusupov Sh. About the unique solvability of a semi-non-local boundary-value problem for a mixed type equation of the second kind of the fourth order……..…………………………………………………………………………………. 35
Durdiev U. The problem of determining the kernel in the integro-differential equation of beam vibration …..…………………………………………………………………………… 42
Ibragimov M. Properties of morphisms between lattices of geometric tripotents in the dual space of theneutral SFS-space …..………………………………………………………… 50
Karimov K., Shokirov A. Gellerstedt problem for a three-dimensional mixed type equation with singular coefficient……………………….…………………………………………... 57
Oripov Sh. A Cauchy problem for the fourth-order equation with the Bessel operator acting on geometric variables ………………………………………………………………….. 71
Rakhimov B. About conditions of controllability of ensemble trajectories of differential inclusion…………………………………………………………………………………… 83
Tulakova Z. Mixed problems for a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients..………………………………………………………………………………….. 92
Khasanov A., Normururodov Kh. Cauchy problem for the modified Korteweg-de Vries-sine-Gordon (mKdV-sG) equation with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions……………………………………………………………………………………. 105
Khodjibayev V., Atakhujayev A. On inequalities for the probability of ruin……………… 122

Содержание

Хаджиев Дж. О минимальности системы Боннет инвариантов гиперповерхности в евклидовом пространстве ………………………………………………………………………. 1

Эргашова Ш. Геометрия гамильтоновых систем на многомерных пространствах........... 7

Собиров З. Обратные задачи источника для уравнения псевдосубдиффузии с дробной производной Хильфера на метрическом графе.. 14

Газиев К. Краевые задачи со смешением для одного пароболо-гиперболического уравнения третьего порядка 25

Джамалов С., Халхаджаев Б., Юсупов Ш. Об однозначной разрешимости полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка ……………………………...………………………………… 35

Дурдиев У. Задача определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении колебания балки.. 42

Ибрагимов М. Свойства морфизмов между решетками геометрических трипотентов в сопряженном пространстве нейтрального SFS-пространства 50

Каримов К., Шокиров А. Задача Геллерстедта для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом …….. 57

Орипов Ш. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя действующим по геометрическим переменным………………………………………..... 71

Рахимов Б. Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциального включения ………………………………………………………………………………….. 83

Тулакова З. Смешанные задачи для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами...…………………………………………………………... 92

Хасанов А., Нормуродов Х. Задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза-синус Гордона (мКдФ-сГ) с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций……....………………………………………….. 105

Ходжибаев В., Атахужаев А. О неравенствах для вероятности разорения……………... 122

Задача определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении колебания балки

Дурдиев Умиджон
Кафедра дифференциальных уравнений
Бухарский государственный университет
Бухара, Узбекистан
Бухарское отделение института Математики имени В.И.Романовского
Ташкент, Узбекистан
umidjan93@mail.ru, u.d.durdiev@buxdu.uz

Аннотация

Настоящее исследование посвящено обратной задаче определению ярда, которое представляет память среды в интегро-дифференциальном уравнении вынужденных колебаний балки. В начале рассматривается начально-граничная задача (прямая задача). Методом Фурье эта задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям. Затем, используя технику оценивания этих уравнений и обобщенное неравенство Гронуолла, получаем априорные оценки решения через неизвестное ядро, которые будут использованы для исследования обратной задачи. Обратная задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению типа Вольтерра. Для доказательства существование единственного решения этого уравнения, применяется метод сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с экспоненциальной весовой нормой. Получена теорема о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Ключевые слова: Начально-краевая задача; интегро-дифференциальное уравнение; уравнение колебания балки; неравенство Гронуолла; обратная задача; глобальная разрешимость.

MSC 2020: 35R30

1. Введение

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важные приложения при проектировании конструкций, теории устойчивости вращающихся валов, теории вибраций кораблей и трубопроводов и описываются дифференциальными уравнениями порядков выше второго [1], [2].

Изучение обратных задач – очень новое и очень старое явление. Обратные задачи математической физики изучались для многих классов дифференциальных уравнений. Обратные задачи, связанные с простейшими уравнениями гиперболического типа, исследованы в монографии [3]. Для решения обратных динамических задач методы доказательства локальных теорем существования и единственности, теорем единственности и условной устойчивости, а также численные подходы к поиску решений рассматривались в работах [4]–[9] и в других источниках.

В последнее время возрос интерес к исследованию прямых и обратных задач для уравнения колебаний балки [10]–[17]. В [11] исследуются начальные задачи для уравнения балки с различными условиями на концах. Для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, в работе [12] рассмотрена прямая начально-краевая задача и для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки.

В этой работе рассмотрена обратная задача определению ядра, которое представляет память среды в интегро-дифференциальном уравнении вынужденных колебаний балки. Получены результаты о глобальной однозначной разрешимости рассматриваемой обратной задачи и оценка условной устойчивости решения.

2. Исследование прямой задачи.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение колебания балки

$$w_{tt} + a^2 w_{xxxx} = a^2 \int_0^t k(\tau) w_{xxxx}(x, t-\tau) d\tau \tag{1}$$

в области

$$D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t \leq T\},$$

где l – длина балки, T – конечное время, с начальными

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l] \tag{2}$$

и граничными условиями

$$w(0,t) = w_{xx}(0,t) = w(l,t) = w_{xx}(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

В прямой задаче требуется определить функцию

$$w(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\bar{D}), \tag{4}$$

удовлетворяющую соотношениям (1)-(4), при заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $k(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t > 0$(помимо нахождение $w(x,t)$), если относительно решения прямой задачи (1)-(4) известно дополнительное условие

$$w(x_0, t) = q(t), \quad x_0 \in (0, l), \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

где $q(t)$–достаточно гладкая функция.

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) X_n(x), \tag{6}$$

где

$$w_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l w(x,t) \sin \mu_n x dx, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Применяя формальную схему метода Фурье и используя (1), (2), получим

$$w_n''(t) + a^2 \mu_n^4 w_n(t) = a^2 \mu_n^4 \int_0^t k(\tau) w_n(t-\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < t < T, \tag{7}$$

$$w_n(0) = \varphi_n, \quad w_n'(0) = \psi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx.$$

Пользуясь методикой работы [11], решение задачи (7), (8) представим в виде интегрального уравнения

$$w_n(t) = \varphi_n \cos a\mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{a\mu_n^2} \sin a\mu_n^2 t + a\mu_n^2 \int_0^t \sin a\mu_n^2 (t-\tau) \int_0^\tau k(s) w_n(\tau - s) ds d\tau. \tag{9}$$

При каждом фиксированном n уравнение (9) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно w_n. Согласно общей теории интегральных уравнений, при надлежащих условий на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $k(t)$ оно имеет единственное решение. Решение этого интегрального уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

Кроме того, из (9) можно получить оценку для $w_n(t)$:

$$\|w_n(t)\| \le \left|\varphi_n \cos a\mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{a\mu_n^2}\sin a\mu_n^2 t\right| + \left|a\mu_n^2 \int_0^t \sin a\mu_n^2(t-s)\int_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)ds d\tau\right| \le$$

$$\le |\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2}|\psi_n| + a\mu_n^2\|k\|\left|\int_0^t w_n(s)\int_0^{t-s}\sin a\mu_n^2\tau d\tau ds\right| \le$$

$$\le |\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2}|\psi_n| + 2\|k\|\int_0^t |w_n(s)|ds, \quad t\in[0,T], \quad (10)$$

где $\|k\| = \max\limits_{t\in[0,T]}|k(t)|$. Отсюда в силу неравенства Гроноулла, получаем оценку

$$\|w_n(t)\| \le \left(|\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2}|\psi_n|\right)\exp\{2T\|k\|\}. \quad (11)$$

Далее, продифференцировав (9), находим

$$w_n'(t) = -a\mu_n^2\varphi_n \sin a\mu_n^2 t + \psi_n\cos a\mu_n^2 t + a^2\mu_n^4\int_0^t \cos a\mu_n^2(t-\tau)\int_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)dsd\tau. \quad (12)$$

Учитывая (7), (10) и (12) находим оценки для $w_n'(t)$ и $w_n''(t)$, соответственно

$$\|w_n'(t)\| \le (1+2T\|k\|\exp\{2T\|k\|\})\left(a\mu_n^2|\varphi_n| + |\psi_n|\right), \quad (13)$$

$$\|w_n''(t)\| \le (1+3T\|k\|\exp\{2T\|k\|\})\left(a^2\mu_n^4|\varphi_n| + a\mu_n^2|\psi_n|\right). \quad (14)$$

Таким образом справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. *При любом $t\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$\|w_n(t)\| \le C_1\left(|\varphi_n| + \frac{1}{n^2}|\psi_n|\right), \quad (15)$$

$$\|w_n''(t)\| \le C_2\left(n^4|\varphi_n| + n^2|\psi_n|\right), \quad (16)$$

где C_i, $i=1,2$ – положительные постоянные зависящее от T, $\|k\|$.

Формально из (6) почленным дифференцированием составим ряды

$$w_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n''(t)X_n(x), \quad (17)$$

$$w_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)X_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^4 w_n(t)X_n(x). \quad (18)$$

Ряды (6), (17) и (18) при любых $(x,t)\in\overline{D}$ на основании Леммы 2.1 мажорируются рядом

$$C_3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4|\varphi_n| + n^2|\psi_n|\right). \quad (19)$$

Лемма 2.2. *Если*

$$\varphi(x)\in C^6[0,l], \quad \varphi^{(7)}(x)\in L_2[0,l],$$

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(l)=\varphi^{(6)}(0)=\varphi^{(6)}(l)=0,$$

$$\psi(x) \in C^4[0,l], \quad \psi^{(5)}(x) \in L_2[0,l],$$
$$\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = \psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(l) = 0,$$

то справедливы соотношения

$$\varphi_n = -\frac{1}{\mu_n^7}\varphi_n^{(7)}, \quad \psi_n = -\frac{1}{\mu_n^5}\psi_n^{(5)}, \tag{20}$$

где

$$\varphi_n^{(7)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi^{(7)}(x)\cos\mu_n x dx,$$

$$\psi_n^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \psi^{(7)}(x)\cos\mu_n x dx,$$

и справедлевы следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(7)}|^2 < \|\varphi^{(7)}\|_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n^{(5)}|^2 < \|\psi^{(5)}\|_{L_2[0,l]}. \tag{21}$$

Интегрируя по частям в интеграле для φ_n семь раз, а в интеграле для ψ_n пять раз с учетом условий Леммы 2.2 получим равенства (20). Неравенства (21) представляют собой неравенства Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций $\varphi_n^{(7)}$ и $\psi_n^{(5)}$ по системе косинусов $\{\sqrt{2/l}\cos(\mu_n x)\}$ на интервале $[0,l]$.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2.2, то в силу представлений (20) и (21) сходиться ряд (19), следовательно, ряды (6), (17) и (18) сходятся равномерно в прямоугольнике $\overline{D}$ и функция $u(x,t)$ представленная рядом (6) удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

Теперь составим оценку разности между решением исходного интегрального уравнения (9) и решением этого же уравнения с возмущенными функциями $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{k}$ определяющими $\tilde{w}_n$:

$$\tilde{w}_n(t) = \tilde{\varphi}_n\cos a\mu_n^2 t + \frac{\tilde{\psi}_n}{a\mu_n^2}\sin a\mu_n^2 t + a\mu_n^2\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau \tilde{k}(s)\tilde{w}_n(\tau - s)dsd\tau. \tag{22}$$

Тогда для $w_n - \tilde{w}_n$ с помощью (9) и (22), получим линейное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} w_n(t) - \tilde{w}_n(t) = (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n)\cos a\mu_n^2 t + (\psi_n - \tilde{\psi}_n)\frac{1}{a\mu_n^2}\sin a\mu_n^2 t + \\ + a\mu_n^2\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau \left[k(w_n - \tilde{w}_n) + \tilde{w}_n(k - \tilde{k})\right] dsd\tau. \end{aligned}$$

откуда выводиться следующее линейное интегральное неравенство для

$$\|w_n(t) - \tilde{w}_n(t)\| \le |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + \frac{1}{a\mu_n^2}|\psi_n - \tilde{\psi}_n| + 2T\|\tilde{w}_n\|\|k - \tilde{k}\| + \|k\|\int\limits_0^t |w_n - \tilde{w}_n|d\tau.$$

Воспользуясь неравенством Гронуолла получим оценку

$$\|w_n(t) - \tilde{w}_n(t)\| \le \rho\left[|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + |\psi_n - \tilde{\psi}_n| + \|\tilde{w}_n\|\|k - \tilde{k}\|\right]\exp\{\rho T\|k\|\}, \tag{23}$$

где $\rho = \max\{1, 1/a\mu_n^2, 2T\}$.

Таким образом, используя (12) находим оценку для разности $w_n' - \tilde{w}_n'$,

$$\begin{aligned} \|w_n' - \tilde{w}_n'\| \le a\mu_n^2(1 + 2T^2\|k\|\rho\exp\{\rho T\|k\|\})|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + \\ + (1 + 2a\mu_n^2 T^2\|k\|\rho\exp\{\rho T\|k\|\})|\psi_n - \tilde{\psi}_n| + 2a\mu_n^2 T(1 + T\|k\|\rho\exp\{\rho T\|k\|\})\|\tilde{w}_n\|\|k - \tilde{k}\| \end{aligned} \tag{24}$$

которая будет использована в следующем разделе.

3. Исследование обратной задачи. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть $q(t) \in C^3[0,T]$ и выполнены условия леммы 2.2, кроме того $q(0) = \varphi(x_0)$, $q'(0) = \psi(x_0)$, $q''(0) = a^2\varphi^{(4)}(x_0)$, где $\varphi^{(4)}(x_0) \neq 0$, тогда для любого $T > 0$ на отрезке $[0,T]$ существует единственное решение обратной задачи (1)–(5) $k(t)$ из класса $C[0,T]$.*

Положив в (6) $x = x_0$, с помощью (9) и используя дополнительное условие (5), получим

$$q(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos a\mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{a\mu_n^2}\sin a\mu_n^2 t + a\mu_n^2\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)dsd\tau\right] sin\mu_n x_0. \quad (25)$$

Для того чтобы получить интегральное уравнение относительно ядка $k(t)$, продифференцируем (25) три раза по t и после несложных преобразований, имеем

$$k(t) = k_0(t) + \frac{1}{\varphi^{(4)}(x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n^4\int\limits_0^t k(\tau)w_n'(t-\tau)d\tau - a^2\mu_n^8\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)dsd\tau\right)\sin\mu_n x_0, \quad (26)$$

где

$$k_0(t) = \frac{1}{\varphi^{(4)}(x_0)}\left[\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{l}{2}}q'''(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n a\mu_n^6 \sin a\mu_n^2 t - \psi_n\mu_n^4 \sin a\mu_n^2 t\right)\right].$$

Введем оператор Λ, определив его правой частью (26)

$$\Lambda[k](t) = k_0(t) + \frac{1}{\varphi^{(4)}(x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n^4\int\limits_0^t k(\tau)w_n'(t-\tau)d\tau - a^2\mu_n^8\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)dsd\tau\right)\sin\mu_n x_0.$$

Тогда уравнение (26) перепишется в более компактном виде:

$$k(t) = \Lambda[k](t). \quad (27)$$

Обозначим через $C_\sigma[0,T]$ пространстве непрерывных функций имеющих конечную норму

$$\|k\|_\sigma = \max_{t\in[0,T]}\left|k(t)e^{-\sigma t}\right|, \quad (28)$$

$\sigma > 0$ – некоторое фиксированное число. Очевидно, что при $\sigma = 0$ это множество совпадает с множеством непрерывных функций с обычной нормой. Эта норма обозначена ранее как $\|k\|$. В силу

$$e^{-\sigma T}\|k\| \le \|k\|_\sigma \le \|k\|,$$

нормы $\|k\|_\sigma$ и $\|k\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число σ выберем позже. Пусть

$$B_\sigma(k_0,\gamma) := \{k(t) : \ k(t) \in C_\sigma[0,T], \ \|k - k_0\| \le \gamma\},$$

где $\gamma > 0$ – заданное фиксированное число. Не трудно заметить, что для $k \in B_\sigma(k_0,\gamma)$ имеет место оценка

$$\|k\|_\sigma \le \|k_0\|_\sigma + \gamma \le \|k_0\| + \gamma := \gamma_0, \quad (29)$$

следовательно, γ_0 – известное число.

Пусть $k(t) \in B_\sigma(k_0,\gamma)$. Покажем что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор Λ переводит шар в шар, т.е. $\Lambda[k] \in B_\sigma(k_0,\gamma)$. В самом деле, для любых $t \in [0,T]$ и любого $k(t) \in B_\sigma(k_0,\gamma)$ выполняется неравенства:

$$\left|(\Lambda[k](t) - k_0)e^{-\sigma t}\right| =$$

$$= \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{1}{\varphi^{(4)}(x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n^4\int\limits_0^t k(\tau)w_n'(t-\tau)d\tau - a^2\mu_n^8\int\limits_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau)\int\limits_0^\tau k(s)w_n(\tau-s)dsd\tau\right)\sin\mu_n x_0\right| \le$$

$$\leq \left| \frac{1}{\varphi^{(4)}(x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^4 \int_0^t k(\tau) e^{-\sigma\tau} w_n'(t-\tau) e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. -a^2\mu_n^8 \int_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau) \int_0^\tau k(s) e^{-\sigma s} w_n(\tau - s) e^{-\sigma(\tau-s)} ds e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right) \sin \mu_n x_0 \right|.$$

Далее воспользуясь оценкой $\|(k * w)e^{-\sigma t}\| \leq \frac{1}{\sigma}\|k\|_\sigma \|w\|$, приведенной в работе [18], также (28), получим

$$\left|(\Lambda[k](t) - k_0)e^{-\sigma t}\right| \leq C_4 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^4 \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \|w_n'\| + C_5 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^6 \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \|w_n\| T \leq$$

$$\leq C_6 \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^4 \|w_n'\| + \mu_n^6 T \|w_n\|\right) \leq C_7 \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \left(1 + (2\|k\|_\sigma + 1) \sum_{n=1}^{\infty} T \exp\{2T\|k\|_\sigma\}\right) \left(a\mu_n^6 |\varphi_n| + \mu_n^4 |\psi_n|\right).$$

Далее, заменяя $\|k\|_\sigma$ с помощью (29) мы только усилим придыдующие неравенства. Выполняя эти замены, получим оценку

$$\left|(\Lambda[k](t) - k_0)e^{-\sigma t}\right| \leq C_7 \frac{1}{\sigma} \gamma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + (2\gamma_0 + 1) T \exp\{2T\gamma_0\}\right) \left(a\mu_n^6 |\varphi_n| + \mu_n^4 |\psi_n|\right).$$

Выбирая

$$\sigma \geq \sigma_1 = \frac{1}{\gamma} C_7 \gamma_0 \left(1 + (2\gamma_0 + 1) T \exp\{2T\gamma_0\}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a\mu_n^6 |\varphi_n| + \mu_n^4 |\psi_n|\right)$$

получим, что оператор Λ переводит множество $B_\sigma(k_0, \gamma)$ в себя. Отметим, что в приведенных выкладках все ряды сходятся в силу выполнения условий Леммы 2.2.

Пусть теперь k, $\tilde{k}$ – любые два элемента из $B_\sigma(k_0, \gamma)$. Функция $\tilde{w}_n(t)$, соответствующая $\tilde{k}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (22) с $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ и $\psi_n = \tilde{\psi}_n$. Составив разность $\Lambda[k](t) - \Lambda[\tilde{k}](t)$ с помощью уравнений (9) и (22), и затем оценив ее норму, получим

$$\|\Lambda[k](t) - \Lambda[\tilde{k}](t)\|_\rho = \max_{t \in [0,T]} \left| \left(\Lambda[k](t) - \Lambda[\tilde{k}](t)\right) e^{-\sigma t} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{\varphi_n^{(4)}(x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(k(\tau) w_n'(t-\tau) - \tilde{k}(\tau) \tilde{w}_n'(t-\tau)\right) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \sin \mu_n x_0 \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{\varphi_n^{(4)}(x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \mu_n^8 \int_0^t \sin a\mu_n^2(t-\tau) \int_0^\tau \left(k(s) w_n(\tau - s) - \tilde{k}(s) \tilde{w}_n(\tau - s)\right) e^{-\sigma s} e^{-\sigma(\tau-s)} e^{-\sigma(t-\tau)} ds d\tau \sin \mu_n x_0 \right| \leq$$

$$\leq C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \|w_n' - \tilde{w}_n'\| + C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \|\tilde{w}_n'\| \|k - \tilde{k}\|_\sigma + C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^6 \frac{1}{\sigma} \|k\|_\sigma \|w_n - \tilde{w}_n\| + C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^6 \frac{1}{\sigma} \|\tilde{w}_n\| \|k - \tilde{k}\|_\sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_\sigma \beta,$$

где

$$\beta = C_{10} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_0 \Big[2a\mu_n^2 T (1 + T\gamma_0 \rho \exp\{\rho T \gamma_0\}) \|\tilde{w}_n\| + (1 + 2T\gamma_0 \exp\{2T\gamma_0\})(a\mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n|) +$$

$$+ \mu_n^6 \gamma_0 \rho \|\tilde{w}_n\| \exp\{\rho T \gamma_0\} + \mu_n^6 \|\tilde{w}_n\| \Big],$$

здесь в силу выполнения условии Леммы 2.2, все ряды будут сходящимся.

Выбирая теперь $\sigma > \sigma_2 = \beta$, находим, что оператор Λ сжимает расстояние между элементами k и $\tilde{k}$ на $B_\sigma(k_0, \gamma)$.

Таким образом, как следует из вышепривенных оценок, если число σ выбрано из условия $\sigma > \sigma^* := \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, то оператор A является сжимающим на $B_\sigma(k_0, \gamma)$. В этом случае согласно принципу Банаха уравнение (27) имеет единственное решение в $B_\sigma(k_0, \gamma)$ для любого фиксированного $T > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть $k(t)$, $\tilde{k}(t)$ – два решения обратной задачи (1)–(5) с данными φ, ψ, q и $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}$ соответственно. Тогда имеет место оценка устойчивости:*

$$\|k - \tilde{k}\| \leq \tilde{C}\Big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^7(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^5(\mathbb{R})} + \|q - \tilde{q}\|_{C^3[0,T]}\Big), \tag{30}$$

где постоянная $\tilde{C}$ зависит только от T, l.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы, используя (26), запишем уравнения для $\tilde{k}(t)$ с данными $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}$ и составим разность $k(t) - \tilde{k}(t)$. Затем, оценивая это выражение и используя неравенство (11), (23) получим

$$|k - \tilde{k}|(t) \leq C_{11}\Big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^7[0,l]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^5[0,l]} + \|g - \tilde{g}\|_{C^3[0,T]}\Big) + C_{12}\int_0^t |k - \tilde{k}|(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{31}$$

где C_{11} и C_{12} зависят от тех же чисел, что и $\tilde{C}$. Из (31), используя неравенство Гронуолла, получаем оценку

$$|k - \tilde{k}|(t) \leq C_{11}\exp\left(C_{12}t\right)\Big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^7[0,l]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^5[0,l]} + \|q - \tilde{q}\|_{C^3[0,T]}\Big), \quad t \in [0, T].$$

Из этого неравенства следует оценка (30), если положить $\tilde{C} = C_{11}\exp\left(C_{12}t\right)$. □

Список литератур

1. Strutt J., Baron Rayleigh. The Theory of Sound. 1877. London: Macmillan.
2. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. 1966. Москва: Наука.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. 1984. Москва: Наука.
4. Hasanoglu A.H., Romanov V.G. Introduction to inverse problems for differential equations. 2017. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-62797-7
5. Lesnic D.Inverse Problems with Applications in Science and Engineering. 2022. CRC Press, Boca Raton, FL.
6. Romanov V.G. Inverse problems for equations with a memory. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2014. Vol. 2, Issue 4, pp. 51-80.
7. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2019. Vol. 7, Issue 2, pp. 4–19.
8. Durdiev U.D., Totieva Zh.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019. Vol. 42, Issue 18, pp. 7440–7451.
9. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation. Turkish Journal of Mathematics. 2022. Vol. 46, Issue 6, pp. 2250–2263.
10. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок. Инженерный вестник Дона. 2017. Vol. 3. http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312
11. Sabitov K.B. A Remark on the Theory of Initial-Boundary Value Problems for the Equation of Rods and Beams. Differential Equations. 2017. Vol. 53, Issue 1, pp. 89–100.
12. Durdiev U.D. Inverse Problem of Determining an Unknown Coefficient in the Beam Vibration Equation. Differential Equations. 2022. Vol. 58, Issue 1, pp. 37–44.
13. Sabitov K.B. Initial–Boundary Value Problems for the Beam Vibration Equation with Allowance for Its Rotational Motion under Bending. Differential Equations. 2021. Vol. 57, Issue 3, pp. 342–352.
14. Guojin Tan, Jinghui Shan, ChunliWu and Wensheng Wang. Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions. Advances in Mechanical Engineering. 2017. Vol. 9, Issue 11, pp. 1–17.

15. Moaveni S., Hyde R. Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data. Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. Vol. 24, Issue 6, pp. 990–1010.
16. Jin-De Chang, Bao-Zhu Guo. Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements. Automatica. 2007. Vol. 43, pp. 732–737.
17. Hiroaki Katori. Inverse Problems for an Euler-Bernoulli Beam: Identification of Bending Rigidity and External Loads. World Journal of Mechanics. 2018. Vol. 8, pp. 192–199.
18. J. Janno and L. v. Wolfersdorf. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 1996. Vol. 4, Issue 1, pp. 39–66.

Balka tebranishining integro-differensial tenglamasida yadroni aniqlash masalasi

Durdiyev Umidjon

Ushbu tadqiqot balkaning majburiy tebranishlarining integro-differensial tenglamasida muhit xotirasini ifodalovchi yadroni aniqlashga bag‘ishlangan. Birinchidan, boshlang‘ich-chegaraviy masala (to‘g‘ri masala) ko‘rib chiqiladi. Furye usuli yordamida bu masala integral tenglamalarga ekvivalent keltiriladi. Keyinchalik, ushbu funksiyalarni va umumlashtirilgan Gronuoll tengsizligini baholash texnikasidan foydalanib, biz teskari masalani o‘rganish uchun foydalaniladigan noma’lum koeffitsiyent bo‘yicha yechimning aprior baholarini olamiz. Teskari masala Volterra tipidagi ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. Ushbu tenglamaning yagona yechimi mavjudligini ko‘rsatish uchun eksponensial og‘irlik normasi bilan uzluksiz funksiyalar fazosida siqib akslantirish usuli qo‘llaniladi. Natijada ko‘rib chiqilayotgan teskari muammoning global yechilishi va yechimning shartli turg‘unlik baholari olinadi.

Kalit so‘zlar: Boshlang‘ich-chegaraviy masala; integro-differensial tenglama; balkaning tebranish tenglamasi; Gronuoll tengsizligi; teskari masala; global yechiluvchanlik.

The problem of determining the kernel in the integro-differential equation of beam vibration

Durdiev Umidjon

This study is devoted to the inverse problem for determining of kernel, which represents the memory of the medium in the integro-differential equation of forced vibrations of a beam. First, the initial boundary value problem (direct problem) is considered. Using the Fourier method, this problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using the technique of estimating these functions and the generalized Gronwall inequality, we obtain a priori estimates of the solution in terms of the unknown coefficient, which will be used to study the inverse problem. The inverse problem is reduced to an equivalent integral equation of Volterra type. To show the existence of a unique solution to this equation, the method of contraction mappings in the space of continuous functions with exponential weight norm is used. Results are obtained on the global solvability of the inverse problem under consideration and an estimate of the conditional stability of the solution.

Keywords: Initial-boundary value problem; integro-differential equation; beam vibration equation; Gronwall inequality; inverse problem; global solvability.

Получено: 17/01/2024

Принято: 11/05/2024

Cite this article

Durdiev U. The problem of determining the kernel in the integro-differential equation of beam vibration. *Bull. Inst. Math.*, 2024, Vol.7, No 2, pp. 42-49

Свойства морфизмов между решетками геометрических трипотентов в сопряженном пространстве нейтрального SFS-пространства

Ибрагимов Мухтар
Математический факультет
Каракалпакский государственный университет
Нукус, Узбекистан
mukhtar_i@bk.ru

Аннотация

В данной работе мы установим морфизм между решетками геометрических трипотентов в сопряженном пространстве сильно гранево симметричного пространства. Точнее говоря, покажем, что этот морфизм является квантово-логическим изоморфизмом и исследуем его свойства.

Ключевые слова: Гранево симметричные пространства; квантовая логика; морфизм; квантово-логический изоморфизм.

MSC 2020: 46B20; 46E30

1. Введение

Я. Фридман и Б. Руссо анализируя суждения, сделанные ими в работе [2], где они исследовали структуру предсопряженного пространства JBW^*-тройки, в работе [3], руководствуясь геометрическими введениями в процесс измерений в множестве наблюдаемых в квантово-механических системах, определили слабо и сильно гранево симметричные пространства, предложив геометрическую характеризацию Банаховых пространств, допускающие алгебраическую структуру. Основной целью этого проекта было определение в сопряженном пространстве гранево симметричного пространства алгебраической структуры на основе геометрических условии. Но для этого необходим дальнейший глубокий анализ граневой структуры единичного шара гранево симметричного пространства и его сопряженного пространства. Соответствующий анализ в предсопряженном пространстве JBW^*- тройки приведены в работах [1] и [2]. Основные факты и результаты, связанные с теорией гранево симметричных пространств более подробно отражены в работах [3, 4, 5, 6, 7].

Основными примерами гранево симметричных пространств являются предсопряженное пространства алгебры фон Неймана (см. [5, Теорема 2.11]), более общее, предсопряженное пространства JBW^*-тройки (см. [5, Теорема 3.1]).

Из вышеизложенных следует, что теорию гранево симметричных пространств целесообразно исследовать на основе анализа исследовании свойств структуры предсопряженных пространств алгебры фон Неймана, JB^*-троек или JBW^* -троек. В связи с этим необходимо особо отметит, что Я. Хамхалтером в работе [8] были исследованы свойства морфизмов решеток проекторов JBW^*-алгебрах и квантовые логики трипотентов в JBW^*-тройках. В данной работе мы рассмотрим эти понятия и их свойства на множестве геометрических трипотентов в сопряженном пространстве нейтрального сильно гранево симметричного пространства.

Отметим, что в настоящей работе мы используем терминологию и обозначения использованные в [3, 4, 5, 6, 7, 8]. В [4, Предложение 4.5] было доказано, что для любого фиксированного геометрического трипотента ω в нейтральном сильно гранево симметричном пространстве (SFS-пространстве) Z множество $L_\omega := \{v \in G\mathfrak{U} : v \leq \omega\} \bigcup \{0\}$ является полной ортомодулярной решеткой с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом ω и ортодополнением $v \mapsto v^\perp = \omega - v$, где $G\mathfrak{U}$ – множество всех геометрических трипотентов единичного шара сопряженного пространства Z^*. В данный работе