Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 66

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

XVI Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”

Сборник трудов

(*Казань, 22 – 27 августа 2023 г.*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

М. Б. Зверева, М. И. Каменский. О математических моделях с нелинейным условием 99
К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа. О существовании решения с заданным асимптотическим поведением для неоднородного уравнения Шредингера на модельных многообразиях 101
Д. Э. Исмоилова. Спектральные соотношение для матричной модели в фермионном пространстве Фока 103
М. В. Кабанко. О структуре операторов в некоторых парах пространств аналитических функций 105
М. В. Кабанко. Оценка типа мероморфной функции конечного порядка 106
М. И. Каменский, В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян, О. Ю. Петросян. Почти периодические траектории управляемых систем с обратной связью в форме sweeping процессов 108
В. В. Капустин. Пространства де Бранжа и свойства нулей дзета-функции Римана 110
И. А. Кареев. Последовательная d-апостериорная процедура отбора наиболее вероятного мультиномиального исхода, основанная на технике первого перескока и консервативном априорном распределении с зоной безразличия . . . 111
М. Б. Карманова. Субримановы свойства классов неконтактных отображений . 113
М. Кармуши. Семейство отображений полуплоскости на полосу с разрезом, выходящим из бесконечности 116
A. R. Kacimov. Analytic solution to the Laplace-Poisson equation for Strack's potential modeling transpirative drawdown, decontamination of groundwater and carbon sequestration by rectangular-shaped urban greenery zone 117
A. R. Kacimov, Yu. V. Obnosov. Analytical and numerical modeling of seepage in domains with a free boundary, tilted bedrock and seepage face: the Pavlovskii legacy revisited 118
И. Е. Каспирович. О накоплении ошибок при численном интегрировании систем дифференциальных уравнений и стабилизации связей 120
И. Н. Катковская, В. Г. Кротов. Интерполяционная теорема Марцинкевича и касательное граничное поведение функций из классов типа Харди 122
С. В. Кисляков. Оценки в разных метриках в теореме о короне и в задаче об идеалах в алгебре ограниченных аналитических функций в круге 125
С. Н. Киясов. Эффективная факторизация в некоторых классах гельдеровских матриц-функций третьего порядка 127
И. А. Колесников. Конформный модуль четырехугольника 129
М. А. Комаров. Скорость аппроксимации в пространствах Бергмана наипростейшими дробями с полюсами на окружности 130
А. Н. Кондрашов. О существовании некоторых специальных решений эллиптических уравнений на концах некомпактных римановых многообразий 132
И. И. Костенко. Интерполяция в пространстве мероморфных функций конечного порядка 134
В. Г. Кротов, М. М. Логиновская. Интерполяционная теорема Марцинкевича-Ханта для классов Харди-Лоренца 135

$| b_2(x,0) - b_2(0,0) | \leq H_5 y^{\lambda_1}, H_5 = const, \lambda_1 > 1;$

5) *a*) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)})$ *в* D ,

b) $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ *удовлетворяет определенным условиям совместности в* D;

6) $f_1(x,y) = o\left(\exp[-a_1(x,x)\omega^{(2)}_{m-1}(x,y)](x-y)^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > m+n-1$ *в окрестности* Γ_1^0,

$f_1(x,y) = o\left(\exp[-a_1(x,x)\omega^{(2)}_{m-1}(x,y)](x+y)^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > m+n-1$ *в окрестности* Γ_2^0,

$f_2(0,y) = o\left(y^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > 1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\backslash\ (\Gamma_1^0 \bigcup \Gamma_2^0))$ *представимо в виде*

$$u(x,y) \equiv K_1\left(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)\right),$$

$$\psi_1(y) \equiv M_1(c_1, f_2(0,y)),$$

$$\varphi_1(x) = F_1(x),$$

где $K_1\left(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)\right), M_1(c_1, f_2(0,y)), F_1(x)$ *– известнстные интегральные операторы и функции,* c_1 *– произвольная постоянная.*

Изучены свойства полученных решений и исследованы задачи с начальными данными.

ON AN OVER DETERMINATED SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INTERNAL SINGULAR LINES

F. M. Shamsudinov, R. S. Valiev

In the paper, for an overdetwermined system of second-order differential equations, an explicit representation of the variety of solutions is obtained when the coefficients of the first and second equations are related to each other in a definite way. The properties of the obtained solutions are studied, as well as problems with initial data are considered.

Keywords: overdetermined system, manifolds of solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions.

УДК 517.984

ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРАНИЦ ОДНОЙ 3×3 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

М. Ш. Шарипова[1]

1 *m.sh.sharipova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В данной работе получены оценки границ одной 3×3 *операторной матрицы с помощью кубической числовой области значений, вложения Гершгорина и классической теорией возмущений.*

Ключевые слова: операторная матрица, кубическая числовая область значения, вложение Гершгорина, классическая теория возмущения.

Многие научно-прикладные проблемы сводятся к исследованиям спектральных свойств операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами, действующими в банаховых или гильбертовых пространствах. Вопросы, связанные с существенными и дискретными спектрами операторных матриц, в частности гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, являются актуальными проблемами в физике твердого тела, квантовой теории поля, статистической физике, квантовой механике и многих других областей. Поэтому развитие исследования операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц, является одним из приоретных направлений.

Обозначим через $\mathbb{T}$ одномерный тор. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное пространство комплексных чисел, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комлекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}$ и $\mathscr{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямое произведение пространств $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Обычно пространство $\mathscr{H}$ называют трехчастичным обрезанным подпространством пространства Фока.

Пусть нам дана операторная матрица $\mathscr{A}$, определенная на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$ – линейные и ограниченные операторы, заданные по правилам:

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0, \ \ (A_{01} f_1)(t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_1(t) dt, \ \ A_{02} = 0, \ \ A_{10} = A_{01}^*;$$

$$(A_{11} f_1(x)) = (\varepsilon + 1 - \cos(x)) f_1(x), \quad (A_{12} f_2)(x, t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_2(x, t) dt;$$

$$A_{20} = 0, \ \ A_{21} = A_{12}^*, \ \ (A_{22} f_2)(x, y) = (\varepsilon + 2 - \cos(x) - \cos(y)) f_2(x, y).$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0, 1, 2$

С помощью простых вычислений имеем:

$$(A_{01}^* f_0)(x) = \sin(x) f_0, \quad f_0 \in \mathscr{H}_0,$$

$$(A_{12}^* f_1)(x, y) = \sin(y) f_1(x), \quad f_1 \in \mathscr{H}_1.$$

Легко видеть, что операторная матрица (1) с вышеуказаннымы элементами линейная, ограниченная и самосопряженная.

Теорема. *Для операторной матрицы (1) имеют место неравенства:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \ge \varepsilon - \sqrt{2\pi}, \quad \max \sigma(\mathscr{A}) \le \varepsilon + 2 + \sqrt{\frac{4 + 2\pi}{3}}.$$

Замечание 1. *В силу теоремы Гершгорина* [1] *имеют место неравенства:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \ge \varepsilon - 2\sqrt{\pi}, \quad \max \sigma(\mathscr{A}) \le \varepsilon + 4 - \sqrt{\pi}.$$

Замечание 2. *Классическая теория возмущений* [2] *дает нижнюю границу:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \ge \varepsilon - \sqrt{2\pi}.$$

Нижняя граница спектра, обеспечиваемая кубической числовой областью значений, является более точной, чем границы, обеспечиваемые вложениями Гершгорина и классической теорией возмущений.

Литература

1. *Rasulov T.H., Tretter C.* Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices // Rocky Mountain J. Math. – 2018. – № 1. – P. 279–324.

2. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators (Classics in Mathematics, 132). – Springer, 1995.

ESTIMATES FOR BOUNDS OF A 3×3 OPERATOR MATRIX

M. Sh. Sharipova

In this work, we obtain estimates for the bounds of a 3×3 *operator matrix using cubic numerical range, Gershgorin enclosures and classical perturbation theory.*

Keywords: operator matrix, cubic numerical range, Gershgorin enclosures, classical perturbation theory.

УДК 517.923+517.925.54

ОБ ОЦЕНКЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ПЕРИДИНАМИКОЙ

Ш. Н. Шералиев[1]

1 *shuhrat2500@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Филиал в городе Ташкенте.

Для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, найдено гильбертово пространство, которое переводится данным оператором в пространство квадратично суммируемых периодических функций.

Ключевые слова: сингулярные операторы, неравенство Кальдерона-Зигмунда, перидинамика.

Рассмотрим в пространстве 2π-периодических вектор-функций сингулярный интегральный оператор

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \Omega(y) f(x-y) |y|^{-n} \chi(|y|) dy, \tag{1}$$

где $\Omega(x)$ является $(n \times n)$-матрицей-функцией, гладкой в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяющей условию однородности: $\Omega(\lambda x) = \Omega(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Неотрицательная функция $\chi(r)$ предполагается принадлежащей $C^\infty(\mathbb{R})$, равной 1 в некоторой окрестности нуля и равной 0 при $r \geq \pi$.

Определим матрицу Ω^*, представляющую собой среднее значение ядра Ω по единичной сфере:

$$\Omega^* = \omega_n^{-1} \int_\theta \Omega(\theta)\, d\theta.$$